JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + 8y^2 + 16z^2 + 64t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 7 (1862), p. 249-252.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__249_0>

SUR LA FORME
$x^2 + 8y^2 + 16z^2 + 64t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

La détermination du nombre N des représentations d'un entier donné, par la forme

$$x^2 + 8y^2 + 16z^2 + 64t^2,$$

ne peut nous offrir aucune difficulté quand cet entier est pair. D'abord, s'il est impairement pair, on a évidemment $N = 0$. Et s'il est pairement pair, de sorte qu'on puisse le représenter par $2^\alpha m$ en prenant m impair et $\alpha > 1$, l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + 8y^2 + 16z^2 + 64t^2$$

exigera que x soit pair, $x = 2x_1$, par conséquent se ramènera à celle-ci

$$2^{\alpha-2} m = x_1^2 + 2y^2 + 4z^2 + 16t^2,$$

qui a été l'objet d'une discussion détaillée dans le cahier de mai.

Quant au cas d'un entier impair m, j'observe que l'on a $N = 0$, si m est de l'une des trois formes $8\mu + 3$, $8\mu + 5$, $8\mu + 7$. Nous supposerons donc désormais

$$m = 8\mu + 1,$$

et voici comment nous calculerons alors N.

Il faudra d'abord chercher la valeur de la fonction $\omega_1(m)$, définie, comme à l'ordinaire, par les équations

$$m = d\delta, \quad \omega_1(m) = \sum (-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}} d;$$

puis former, d'une part, la somme

$$\sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r$$

relative aux entiers positifs r qui peuvent figurer dans l'équation

$$m = r^2 + 2u^2$$

où l'entier u est indifféremment positif, nul ou négatif, et, d'autre part, la somme

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}+\frac{i^2-1}{8}} i$$

relative aux entiers positifs i qui peuvent se présenter dans l'équation

$$m = i^2 + 4s^2$$

où l'entier s, quand il n'est pas zéro, devra être pris négativement comme positivement.

Cela posé, on aura

$$N = \frac{1}{2}\left[\omega_1(m) + \sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r\right] + \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}+\frac{i^2-1}{8}} i.$$

Ainsi pour $m = 1 = 1^2 + 2.0^2 = 1^2 + 4.0^2$, on a

$$N = \frac{1}{2}(1+1) + 1 = 2,$$

ce qui s'accorde avec la double équation

$$1 = (\pm 1)^2 + 8.0^2 + 16.0^2 + 64.0^2.$$

Pour $m = 9$, on a les équations

$$9 = 3^2 + 2.0^2, \quad 9 = 1^2 + 2(\pm 2)^2, \quad 9 = 3^2 + 4.0^2;$$

d'ailleurs

$$\omega_1(9) = 9 - 3 + 1 = 7.$$

Il vient donc cette fois

$$N = \frac{1}{2}(7 - 3 + 2) + 3 = 6,$$

résultat confirmé par les équations

$$9 = (\pm 3)^2 + 8.0^2 + 16.0^2 + 64.0^2,$$
$$9 = (\pm 1)^2 + 8(\pm 1)^2 + 16.0^2 + 64.0^2,$$

qui fournissent pour l'entier 9 six représentations.

Pour $m = 17$, comme $\omega_1(17) = 18$, et que l'on a

$$17 = 3^2 + 2(\pm 2)^2, \quad 17 = 1 + 4(\pm 2)^2,$$

je trouve

$$N = \frac{1}{2}(18 - 6) + 2 = 8;$$

et cela s'accorde avec les équations

$$17 = (\pm 1)^2 + 8.0^2 + 16(\pm 1)^2 + 64.0^2,$$
$$17 = (\pm 3)^2 + 8(\pm 1)^2 + 16.0^2 + 64.0^2,$$

qui donnent pour 17 huit représentations.

Pour $m = 25$, il faut considérer les équations

$$25 = 5^2 + 2.0^2, \quad 25 = 5^2 + 4.0^2, \quad 25 = 3^2 + 4(\pm 2)^2,$$

d'ailleurs $\omega_1(25) = 25 - 5 + 1 = 21$: donc

$$N = \frac{1}{2}(21 + 5) - 5 + 6 = 14;$$

or 25 a en effet quatorze représentations exprimées par les égalités multiples

$$25 = (\pm 5)^2 + 8.0^2 + 16.0^2 + 64.0^2,$$
$$25 = (\pm 3)^2 + 8.0^2 + 16(\pm 1)^2 + 64.0^2,$$
$$25 = (\pm 1)^2 + 8(\pm 1)^2 + 16(\pm 1)^2 + 64.0^2.$$

Pour $m = 33$, les équations à considérer, savoir

$$33 = 1^2 + 2(\pm 4)^2, \quad 33 = 5^2 + 2(\pm 2)^2,$$

appartiennent toutes les deux au type

$$m = r^2 + 2u^2;$$

il n'y en a point pour le type

$$m = i^2 + 4s^2.$$

Comme d'ailleurs

$$\omega_1(33) = 33 - 11 - 3 + 1 = 20,$$

notre formule donne

$$\mathrm{N} = \frac{1}{2}(20 + 2 + 10) = 16;$$

ce qui s'accorde avec les égalités

$$\begin{aligned}
33 &= (\pm 5)^2 + 8(\pm 1)^2 + 16.0^2 + 64.0^2,\\
33 &= (\pm 3)^2 + 8(\pm 1)^2 + 16(\pm 1)^2 + 64.0^2,\\
33 &= (\pm 1)^2 + 8(\pm 2)^2 + 16.0^2 + 64.0^2.
\end{aligned}$$

Pour $m = 41, 49, 57$, notre formule donne respectivement $\mathrm{N} = 8$, 18, 16; mais je passe à $m = 65$, et là trouvant

$$\omega_1(65) = 65 - 5 - 13 + 1 = 48,$$

ayant d'ailleurs à considérer les équations

$$65 = 1^2 + 4(\pm 4)^2, \quad 65 = 7^2 + 4(\pm 2)^2,$$

j'obtiens

$$\mathrm{N} = 12;$$

et je vois que dans ce dernier exemple, comme dans tous ceux qu'on voudrait ajouter, notre formule est vérifiée, les égalités

$$\begin{aligned}
65 &= (\pm 1)^2 + 8.0^2 + 16(\pm 2)^2 + 64.0^2,\\
65 &= (\pm 1)^2 + 8.0^2 + 16.0^2 + 64(\pm 1)^2,\\
65 &= (\pm 7)^2 + 8.0^2 + 16(\pm 1)^2 + 64.0^2,
\end{aligned}$$

fournissant effectivement douze représentations.