JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Nouveau théorème concernant les nombres premiers de la forme $8\mu + 1$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 7 (1862), p. 19-20.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__19_0>

NOUVEAU THÉORÈME

CONCERNANT

LES NOMBRES PREMIERS DE LA FORME $8\mu+1$;

Par M. J. LIOUVILLE.

Soit m un nombre premier donné, de la forme $8\mu+1$. Posons de toutes les manières possibles l'équation

$$m = 16x^2 + p^{4l+1}y^2,$$

x, y étant des entiers positifs, x pair ou impair à volonté, y naturellement impair. Quant à p, c'est un nombre premier $(8\nu+1)$ qui ne divise pas y. On admet pour l la valeur zéro. Il s'agit d'indiquer une règle simple qui dise à priori si le nombre N des décompositions de m ainsi obtenues est pair ou impair. Dans le cas de N impair, on est sûr qu'il y a au moins une décomposition.

Pour répondre à cette question, il faut d'abord mettre m sous la forme

$$m = a^2 + 16b^2,$$

ce qu'on peut faire d'une seule manière. On cherchera ensuite le nombre σ des facteurs premiers (égaux ou inégaux) des deux formes $8k+1$, $8k+3$, qui entrent dans la composition de a. La règle demandée sera fournie alors par la congruence

$$\mathrm{N} \equiv b + \sigma + 1 \pmod{2}.$$

Ainsi N est impair quand b et σ sont tous les deux pairs ou tous les deux impairs. Mais N est pair quand b est pair et σ impair, et quand b est impair et σ pair.

Soit d'abord

$$m = 17 = 1^2 + 16.1^2.$$

On aura $\sigma = 1$, $b = 1$, donc N pair. Or il est évident que $N = 0$.

Soit en second lieu

$$m = 41 = 5^2 + 16.1^2.$$

On aura encore $\sigma = 0$, $b = 1$, donc N pair; et il est aisé de s'assurer que cette fois encore $N = 0$.

Il en est de même pour

$$m = 3^2 + 16.2^2 = 73,$$

nombre premier $8\mu + 1$ pour lequel $\sigma = 1$ et $b = 2$.

Mais pour

$$m = 89 = 5^2 + 16.2^2,$$

on a $b = 2$, $\sigma = 0$. Donc N doit être impair. Et en effet on a cette fois une décomposition canonique :

$$89 = 16.1^2 + 73.1^2.$$

Nous ne pousserons pas plus loin ces exemples.