JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PAUL SERRET

De quelques propositions réciproques relatives à la théorie des courbes et des surfaces du second degré

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 6 (1861), p. 9-27.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1861_2_6__9_0>

DE

QUELQUES PROPOSITIONS RÉCIPROQUES

RELATIVES

A LA THÉORIE DES COURBES ET DES SURFACES DU SECOND DEGRÉ;

Par M. Paul SERRET.

I.

1. Théorème I. — *Si tout système de cordes parallèles d'une courbe plane admet un diamètre rectiligne, cette courbe est du second degré* (Bertrand).

La démonstration la plus simple de ce théorème repose sur l'emploi de la proposition *directe*. On peut cependant éviter cet emploi, si on le veut, et trouver, à priori, l'équation différentielle de la courbe.

Nous remarquerons d'abord, à cet effet, que si une corde mm' d'une courbe quelconque fait partie d'un système de cordes parallèles admettant un diamètre rectiligne, l'on a, pour le rapport des rayons de courbure aux extrémités de cette corde,

$$\frac{\rho}{\rho'} = \left(\frac{mt}{m't}\right)^3, \tag{1}$$

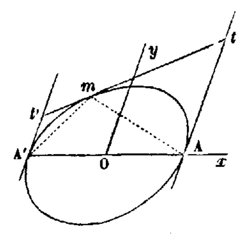
mt, $m't$ étant les longueurs des tangentes, menées par les extrémités de la corde, et terminées à leur point de concours. L'équation (1) résulte d'ailleurs de la formule connue $R = \frac{a.b.c}{4S}$. Dès lors, si l'on prend, sur la courbe considérée, les extrémités d'un *diamètre* AA', ou deux points *fixes* A et A' tels, que les tangentes en ces points soient parallèles; et si, ayant mené la tangente tmt' en un point quelconque m de la courbe, on applique la relation (1) aux deux systèmes de points m et A, m et A'; l'on aura

$$\frac{\rho}{R} = \left(\frac{mt}{At}\right)^3, \tag{2}$$

$$\frac{\rho}{R'} = \left(\frac{mt'}{At'}\right)^3: \tag{3}$$

R et R' désignant les rayons de courbure pour les points A et A'. D'ail-

Fig. 1.



leurs ces rayons R et R' sont égaux; cela résulte encore, implicitement, de la formule (1): et l'on a, par suite,

$$\frac{mt}{mt'} = \frac{At}{At'}. \tag{4}$$

Or cette propriété de la tangente est facile à traduire en analyse : et la démonstration s'achève alors aisément.

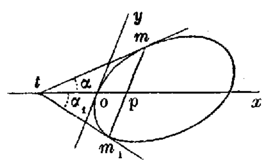
Remarque. — La démonstration précédente suppose que l'on puisse trouver un diamètre AA' rencontrant la courbe en deux points : ce qui est toujours possible, en effet, à moins que tous les diamètres ne soient parallèles. Mais, dans ce cas, la droite qui joint le point de concours des tangentes, menées par les extrémités d'une corde, au milieu de cette corde, est parallèle à une direction fixe, la direction des diamètres : Et il en résulte, en rendant fixe l'une des extrémités de la corde, et choisissant des axes convenables, que la *sous-tangente*, en un point quelconque de la courbe considérée, *est double de l'abscisse du point de contact :* ce qui caractérise la *parabole.*

2 Théorème II. — *Si toutes les cordes* concourantes d'*une courbe plane ont leurs* pôles *en ligne droite, cette courbe est du second degré :*

le *pôle* d'une corde n'étant autre chose ici que le point de concours des tangentes menées par ses extrémités.

Supposons seulement que la propriété ait lieu pour tous les systèmes de cordes dont les points de concours sont situés sur une droite déterminée; et faisons la perspective de la figure de manière que cette droite soit *emportée à l'infini* : la perspective nous présentera une courbe telle, que les *pôles* des cordes parallèles à une direction quelconque

Fig. 2.



soient situés en ligne droite. Or il résulte de là que toutes les cordes parallèles mm_1 sont divisées dans un rapport constant par la droite $\mathrm{O}x$ qui contient leurs pôles : $\frac{mp}{m_1p} = \frac{k}{1}$. On a, en effet,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{pt}, \quad \frac{dy_1}{dx} = \frac{y_1}{pt}; \quad \frac{dy}{y} = \frac{dy_1}{y_1}, \quad \frac{y}{y_1} = k.$$

En outre, ce rapport constant k est égal à l'unité. Car on trouve, pour le rapport des rayons de courbure aux extrémités de la corde mm_1,

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{1}{k}\left(\frac{mt}{m_1t}\right)^3,$$

ou encore

$$\frac{\rho}{\rho_1} = k^2\left(\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha}\right)^3.$$

D'ailleurs, quand les deux points m, m_1 tendent simultanément vers le point O, le rapport précédent tend vers k^2; il doit, en réalité, tendre vers l'unité; donc $k = 1$. La droite $\mathrm{O}x$, qui contient les pôles des cordes parallèles mm', est un diamètre de ces cordes; tout système de cordes parallèles admet un diamètre rectiligne, et nous rentrons dans le théorème précédent.

3. Théorème III. — *Si une courbe à centre admet une infinité de systèmes de rayons vecteurs conjugués,* ou tels, que la tangente, menée par l'extrémité de l'un quelconque des deux rayons, soit parallèle à l'autre : *L'aire du parallélogramme construit sur deux rayons vecteurs conjugués est constante; et la courbe est l'enveloppe d'une série d'ellipses de même centre et de même surface.*

Considérons, en effet, le parallélogramme inscrit dans la courbe, et ayant pour sommets les quatre extrémités de deux rayons vecteurs conjugués quelconques aoa', bob'. Ce parallélogramme est *maximum d'aire,* parmi tous les quadrilatères que l'on peut inscrire dans la courbe, parce que la tangente en chacun des sommets est parallèle à la diagonale qui réunit les sommets adjacents. Il en est de même pour chacun des parallélogrammes que l'on peut construire de la même manière; et, par suite, tous *ces parallélogrammes maximums sont équivalents.* D'ailleurs, si l'on construit l'ellipse auxiliaire, définie par les deux *diamètres conjugués* aoa', bob' ; la courbe proposée sera tangente en a, b, a' et b' à cette ellipse, et sera la commune enveloppe de toutes les ellipses analogues, lesquelles ont même centre et même surface.

4. Théorème IV. — *Si le sommet d'un angle droit, circonscrit à une courbe plane, décrit une ligne droite; et si, en même temps, la corde qui réunit les points de contact des côtés de cet angle passe par un point fixe : cette courbe est une parabole.*

Quoique la démonstration de ce théorème paraisse d'abord dépendre du calcul aux différences mêlées, l'analyse exacte et géométrique de *toutes les données* de la courbe permet d'obtenir son équation différentielle sous la forme ordinaire. On trouve ainsi l'équation

$$\frac{p^2}{r} = \text{constante},$$

r désignant le rayon vecteur et p la distance de l'*origine* à la tangente.

II.

5. Théorème V. — *Toute surface qui admet deux modes distincts*

de génération par un cercle dont le plan demeure parallèle à un plan fixe, est une surface du second degré.

Prenons, en effet, pour axe des z la corde commune à deux des cercles de la surface, situés dans les plans obliques zy, zx, et représentés par les équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} x = 0, \\ z^2 + y^2 + By + C = 0; \end{array}\right.$$

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} y = 0, \\ z^2 + x^2 + Ax + C = 0: \end{array}\right.$$

l'*origine* étant placée au milieu de la corde commune.

Si, prenant alternativement le premier ou le second de ces cercles pour cercle *directeur*, on cherche l'équation de la surface engendrée par un cercle variable, parallèle au plan du second cercle ou du premier, et rencontrant constamment en deux points réels le cercle directeur, on trouvera cette double équation de la surface cherchée

$$(\mathrm{I})\qquad z^2 + y^2 + x^2 + By - 2x.\psi(y) + C = 0,$$

$$(\mathrm{II})\qquad z^2 + y^2 + x^2 + Ax - 2y.\varphi(x) + C = 0,$$

$\psi(y)$ et $\varphi(x)$ étant des fonctions *arbitraires* de la seule variable qu'elles renferment.

La surface cherchée, qui admet les deux modes de génération, est donc représentée, indifféremment, par l'une ou l'autre de ces équations; et celles-ci, par conséquent, doivent devenir identiques, après la multiplication de l'une d'elles par un coefficient constant. Ce coefficient d'ailleurs est égal à l'unité, puisque les deux équations ne contiennent qu'un seul terme en z, le terme z^2, affecté du même coefficient dans l'une et dans l'autre. Les deux équations sont donc actuellement identiques; et l'on voit, en négligeant les parties communes, que les fonctions φ et ψ, primitivement arbitraires, doivent être telles, que l'on ait, quels que soient x et y, l'*identité*

$$Ax - 2y.\varphi(x) = By - 2x.\psi(y),$$

ou celle-ci,

$$[A + 2\psi(y)]x = [B + 2\varphi(x)]y,$$

ou cette dernière enfin,

$$\frac{A + 2\psi(y)}{y} = \frac{B + 2\varphi(x)}{x}$$

qui exige, évidemment, que chacun des deux membres se réduise à une constante C'. On a donc

$$\frac{A + 2\psi(y)}{y} = C',$$

$$2\psi(y) = C'y - A;$$

et la substitution de cette valeur dans (I) donne enfin, pour la surface cherchée, l'équation du *second degré*

$$(\mathrm{I}') \qquad z^2 + y^2 + x^2 - C'xy + By + Ax + C = 0.$$

Autre démonstration. — Considérons une surface S qui admette les deux modes de génération dont il s'agit : soient C, Γ deux cercles *déterminés* de la surface, ayant deux points réels communs, et faisant partie des deux séries de sections circulaires; et soit, en dehors de ces cercles, m un point *déterminé* de la surface. Considérons, en même temps, la surface du second degré Σ assujettie à passer par le cercle C, par le cercle Γ et par le point m. Cette surface est déterminée par ces conditions qui équivalent à la donnée de *neuf* points, à savoir : le point m donné explicitement; les *cinq* points auxquels équivaut la donnée première du cercle C, et les *trois* derniers points auxquels équivaut la donnée seconde du cercle Γ qui a déjà deux points réels communs avec le précédent; et je dis que la surface primitive S se confond avec la nouvelle surface Σ.

En effet, si l'on mène d'abord par le point m commun aux deux surfaces un plan parallèle au plan du cercle C, commun à l'une et à l'autre; ce plan devra couper les deux surfaces suivant des cercles, et ces cercles ayant trois points communs (le point m, et les deux points réels du cercle Γ situés dans le plan sécant), se confondent en un seul

Soit C′ ce cercle commun. Si l'on coupe ensuite les deux surfaces par un plan quelconque, parallèle au plan du cercle Γ, les sections obtenues seront encore des cercles, dans les deux surfaces; et ces cercles ayant quatre points réels communs (les quatre points déterminés par le plan sécant sur les cercles C et C′ communs aux deux surfaces) se confondent encore en un seul. Les deux surfaces S et Σ se confondent donc elles-mêmes, et la surface S est du second degré.

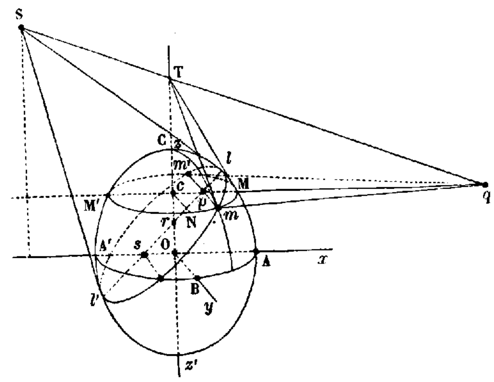
Remarque. — Ce théorème ne paraîtra pas sans intérêt si l'on remarque qu'il existe des surfaces algébriques d'un degré supérieur au second, admettant *deux, trois* ou même *quatre* séries de sections circulaires, non situées dans des plans parallèles. Le parallélisme des plans de ces sections caractérisant dès lors, d'une manière exclusive, les surfaces du second degré.

6. Théorème VI. — *Une série de lignes de niveau d'une surface étant composée d'ellipses semblables, semblablement placées et ayant leurs centres en ligne droite : si la courbe de contact d'un cône circonscrit à la surface est plane, cette surface est du second degré;* le cas excepté où le sommet du cône circonscrit donné appartiendrait à la droite des centres Oz.

Nous remarquerons d'abord, en appelant *méridiennes* les sections déterminées dans la surface par les plans menés suivant *l'axe des centres* Oz, que toutes les tangentes, menées aux sections méridiennes par les différents points d'une même ellipse de niveau, vont couper l'axe en un même point T; chaque ellipse de niveau étant dès lors la base d'un cône circonscrit à la surface, et dont le sommet appartient à l'axe : cela se déduit très-simplement de la similitude de forme et de position des ellipses de niveau.

En outre, si nous considérons la corde commune à la courbe de contact lml' du cône donné et à l'une quelconque des ellipses de niveau MmM′, nous reconnaîtrons que *cette corde* mm', dont la direction est fixe, *est conjuguée au diamètre* cM, trace de l'ellipse de niveau sur le plan de la *section principale* : en appelant ainsi la section zOA menée par l'axe Oz et le sommet S du cône circonscrit. En effet, les points m et m', extrémités de cette corde, appartenant à la courbe de contact lml' du cône circonscrit donné, les plans tangents à la surface en ces points passent l'un et l'autre par le sommet S de ce cône; et, ces points appartenant à l'ellipse de niveau MmM', ces mêmes plans

Fig. 3.



tangents passent aussi par le point T, de l'axe Oz, qui est le sommet du cône circonscrit à la surface suivant l'ellipse MmM'. La droite ST représente donc l'intersection des plans tangents considérés, et sa trace q, sur le plan de l'ellipse de niveau, n'est autre chose que le point de concours des tangentes de l'ellipse aux points m et m'. Mais la droite ST est dans le plan de la section principale; sa trace q est donc sur le *diamètre principal* cM de l'ellipse. Les tangentes aux extrémités de la corde mm' vont concourir sur ce diamètre cM, qui est, par suite, conjugué à cette corde.

Nous prendrons dès lors pour axes de coordonnées Ox, Oy, Oz, le *diamètre principal* OA de l'une quelconque des ellipses de niveau, son conjugué OB qui représente la direction générale des cordes mm', et l'axe Oz déja défini; le plan de la courbe de contact, et le sommet S du cône donné étant représentés par les équations

(P) $$x = k(z - c),$$

(S) $$\begin{cases} x = \alpha, \\ y = 0, \\ z = \gamma: \end{cases}$$

et comme il suffira, pour démontrer le théorème, d'établir que l'une quelconque des sections par l'axe est une courbe du second degré, nous chercherons seulement l'équation différentielle de la *section principale* zMA, que l'on peut obtenir d'abord par la géométrie.

En effet, nous avons reconnu précédemment que *les trois points* S, T *et* q *sont en ligne droite.* Or le point S est un point fixe dont les coordonnées, prises dans le plan zx, sont

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 = \alpha, \\ z_1 = \gamma. \end{cases}$$

Le point T est la trace, sur l'axe Oz, de la tangente en m de la section zm, ou de la tangente au point correspondant M de la section principale z MA; et les coordonnées du point M, prises dans le plan zx, étant x, z, l'on a $Z - z = \frac{dz}{dx}(X - x)$ pour la tangente en M; d'où

$$(2)\qquad \begin{cases} x_2 = 0, \\ z_2 = z - \dfrac{xdz}{dx}, \end{cases}$$

pour les coordonnées du point T. Enfin le point q est la trace, sur le diamètre principal cM de l'ellipse MmN, de la tangente menée à cette ellipse par l'une des extrémités de la corde mm' conjuguée à ce diamètre. D'ailleurs, le pied de la corde mm' sur son diamètre étant le point p, et c étant le centre de l'ellipse, on a la relation connue

$$\overline{cq}\,.\,\overline{cp} = \overline{c\mathrm{M}}^2 = x^2;$$

et comme le point p appartient à une droite fixe, ll' ou rs, trace du plan de contact du cône donné S sur le plan zx, l'on a

$$\overline{cp} = k.\overline{cr},$$

ou

$$\overline{cp} = k(z - c),$$

k et c désignant des constantes. Par suite, les coordonnées du point q sont les suivantes,

$$(3)\qquad \begin{cases} x_3 = \dfrac{x^2}{k(z-c)}, \\ z_3 = z; \end{cases}$$

et en exprimant que les points (1), (2), (3) sont en ligne droite, l'on trouve, après quelques simplifications,

$$(4) \qquad \frac{x\,dx}{dz} = \frac{x^2 - k\alpha(z-c)}{z-\gamma}$$

pour équation différentielle de la section principale zMA. De là, en posant

$$(\mathrm{A}) \qquad \begin{cases} x^2 = \mathrm{Y}, \\ z \;\, = \mathrm{X}, \end{cases}$$

l'on déduit

$$(5) \qquad \frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}} - \frac{2}{\mathrm{X}-\gamma}\mathrm{Y} = -\frac{2k\alpha(\mathrm{X}-c)}{\mathrm{X}-\gamma}:$$

équation *linéaire*, de la forme $\frac{dy}{dx} + \mathrm{P}y = \mathrm{Q}$, et dont l'intégrale

$$(6) \qquad \mathrm{Y} = \mathrm{C}(\mathrm{X}-\gamma)^2 + 2k\alpha(\mathrm{X}-\gamma) + k\alpha(\gamma - c)$$

devient, par le retour à la notation primitive (A),

$$(7) \qquad x^2 = \mathrm{C}(z-\gamma)^2 + 2k\alpha(z-\gamma) + k\alpha(\gamma-c).$$

La section principale est donc une courbe du second degré, une ellipse par exemple, ayant son centre sur l'axe Oz, et rapportée, dans Ox et Oz, à deux directions conjuguées : de telle sorte que, si le point O est supposé le centre de cette ellipse, *la surface proposée est identique à l'ellipsoïde* qui serait *défini* par les trois diamètres conjugués OA, OB et Oz ou OC.

On peut parvenir autrement, et par le calcul seul, à l'équation de la section méridienne.

En effet, de la nature des sections déterminées dans la surface par des plans parallèles au plan des xy, l'on déduit cette première équation de la surface

$$(1') \qquad m^2.x^2 + y^2 - m^2.f(z) = 0:$$

m étant un coefficient constant, qui mesure le rapport des diamètres conjugués OB et OA des ellipses de niveau, et $f(z)$ désignant une fonction, encore indéterminée, de la seule variable z. Si l'on forme ensuite l'équation du plan tangent en un point (x, y, z) de la surface, et si l'on exprime que ce plan tangent passe par le point donné $S(x = \alpha,\ y = 0,\ z = \gamma)$, on trouve

$$(\alpha - x)\, m^2 x - y^2 - \frac{m^2}{2}(\gamma - z) \,.\, f'(z) = 0,$$

qui, combinée avec l'équation (1′), représente la courbe de contact du cône, de sommet S, circonscrit à la surface. Mais, dans cette combinaison des deux équations, on peut simplifier la seconde au moyen de la première; et il vient ainsi,

$$\alpha \,.\, m^2 x - \frac{m^2}{2}(\gamma - z) \,.\, f'(z) - m^2 \,.\, f(z) = 0,$$

ou, en divisant par m^2,

$$(2') \qquad 2\alpha x - (\gamma - z) \,.\, f'(z) - 2f(z) = 0.$$

D'ailleurs la courbe de contact du cône considéré est plane, par hypothèse; et son plan, comme on l'a démontré, est parallèle à Oy : on a donc aussi

$$(3') \qquad x = k(z - c),$$

k, c désignant de nouvelles constantes; et si l'on porte cette valeur de x en z dans (2′), il vient l'identité suivante, propre à déterminer la fonction $f(z)$,

$$(4') \qquad 2k\alpha(z - c) - (\gamma - z) \,.\, f'(z) - 2f(z) = 0.$$

De là, en posant

$$(\text{A}') \qquad \begin{cases} Y = f(z), \\ X = z, \end{cases}$$

l'on déduit

$$(5') \qquad \frac{dY}{dX} - \frac{2}{X - \gamma} Y = -2k\alpha \cdot \frac{X - c}{X - \gamma}:$$

Équation identique à l'équation (5), et conduisant aux mêmes conséquences.

Remarque. — Le théorème que nous venons de démontrer est une généralisation du suivant, dû à M. de la Gournerie : « Une surface de révolution, qui admet une ligne d'ombre plane, est du second degré. » Il convient toutefois, afin de bien apprécier l'utilité de notre généralisation, de remarquer que le nombre des conditions sous lesquelles on affirme, dans l'énoncé précédent, que la surface est du second degré, paraît plus restreint qu'il ne l'est en réalité ; puisque l'existence d'une première ligne d'ombre plane, dans une surface de révolution, entraîne l'existence d'une infinité d'autres lignes analogues, obtenues en faisant tourner la première d'un angle quelconque autour de l'axe.

7. Théorème VII. — *Si les cônes et les cylindres, circonscrits à une surface, ont leurs courbes de contact planes, cette surface est du second degré.*

Que l'on imagine une série de *lignes de niveau* de la surface; les cylindres circonscrits à la surface parallèlement aux diverses directions tracées dans le plan de l'une de ces lignes, et la série correspondante des courbes de contact de ces cylindres : il résulte, de l'hypothèse, que chacune de ces courbes est plane, et que chaque ligne de niveau est la base d'un cône circonscrit à la surface. On peut donc considérer, *en chaque point de la surface,* deux systèmes de *tangentes conjuguées.* La génératrice du cône circonscrit, et la tangente à la ligne de niveau qui sert de base à ce cône (premier système); la génératrice du cylindre circonscrit, et la tangente à la courbe de contact de ce cylindre (second système). Mais la génératrice du cylindre coïncide avec la tangente de la ligne de niveau, par une suite à peu près immédiate de la définition du cylindre; nos deux systèmes de tangentes conjuguées ont donc une tangente commune : les autres tangentes coïncident, et la génératrice du cône coïncide avec la tangente à la courbe de contact du cylindre. Le sommet du cône relatif à l'une quelconque des lignes de niveau est donc situé dans le plan de contact de l'un quelconque des cylindres déjà définis. Donc, *les plans de contact de tous ces cylindres se coupent suivant une même droite,* et *cette droite contient les sommets des cônes relatifs à toutes les lignes de niveau.*

Que l'on compare maintenant deux lignes de niveau quelconques; et que l'on prenne, pour origine des rayons vecteurs de chacune de ces lignes, le point où son plan est rencontré par la droite précédente : on reconnaîtra sans peine que les tangentes, menées à ces lignes par les extrémités de deux rayons vecteurs parallèles, sont elles-mêmes parallèles; d'où la conséquence que *toutes les lignes de niveau sont des courbes semblables, semblablement placées, et ayant leurs centres de similitude en ligne droite.* Les sections, faites dans la surface proposée par des plans parallèles à une direction quelconque, sont donc des courbes semblables; l'on rentre dans un théorème dû à M. Bertrand (*Journal de Mathématiques,* p. 77, t. XIII, 1848), et la surface est du second degré.

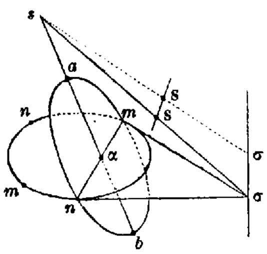
Remarque I. — On peut achever la démonstration autrement, et sans recourir au théorème auquel il a été fait allusion. Ce changement n'aurait en lui-même aucun avantage, s'il ne devait permettre de diminuer le nombre des conditions sous lesquelles on peut affirmer que la surface est du second degré; et c'est ce qui arrive ici. Il résulte, en effet, de la théorie des tangentes conjuguées et des considérations dont nous ferons usage dans les théorèmes suivants, que les lignes de niveau dont il a été question sont des *ellipses,* ayant leurs centres sur la droite qui contient les sommets des cônes relatifs à ces lignes, *homothétiques entre elles* et à l'ellipse qui sert d'indicatrice à la surface aux points où celle-ci est rencontrée par la droite des sommets. L'on rentre donc dans le cas du théorème VI, et l'on a ce nouvel énoncé :

THÉORÈME VIII. — *Si les cylindres circonscrits à une surface, parallèlement au plan tangent en l'un de ses points, ont leurs courbes de contact planes; et si les diverses sections de la surface, parallèles au même plan tangent, sont les bases d'autant de cônes circonscrits : cette surface sera du second degré, dès qu'elle admettra un nouveau cône, ou un nouveau cylindre, à courbe de contact plane.* Il convient d'ajouter toutefois que le point de la surface, qui joue un rôle spécial dans l'énoncé, doit n'être pas un *point singulier,* afin que le théorème d'Euler puisse s'appliquer à ce point.

Remarque II. — Le théorème VII est susceptible d'une autre démonstration, assez curieuse en ce que la théorie des surfaces n'y joue aucun rôle.

Soit un cône *déterminé*, de sommet s, circonscrit à la surface suivant

Fig. 4.



la courbe plane *mnmn*. Que l'on mène, par le sommet s, une droite quelconque *sab* rencontrant la surface aux points a et b, et que l'on imagine toutes les sections faites dans la surface par les plans menés suivant *sab*. Ces sections *manb* sont les bases d'autant de cônes circonscrits dont *les sommets* S *sont distribués sur une même droite* SS, intersection des plans tangents menés à la surface par les points a et b. Si l'on considère le point de concours des tangentes menées à la première courbe *mn*, par ses points de rencontre m et n avec l'une quelconque des nouvelles courbes *manb*, on reconnaît que ce point de concours est situé sur la droite sS, commune intersection des plans tangents à la surface en m et n. Or, comme toutes les droites analogues sS sont situées dans un même plan, on voit, en appelant α et $\sigma\sigma$ les traces de la droite *sab* et du plan sSS sur le plan de la courbe primitive *mnmn*, que les points de concours des tangentes à cette courbe, menées par les extrémités de toutes les cordes $m\alpha n$ qui se croisent au point α, sont distribués sur une même droite $\sigma\sigma$; et cette propriété subsiste, quélle que soit la position de la droite S*ab* autour du point s, ou quel que soit le point α, trace de cette droite sur le plan de la courbe *mn*. Cette courbe *mnmn* est donc telle, que « toutes les cordes concourantes de cette courbe ont leurs *pôles* en ligne droite »; le théorème II est applicable, la courbe *mn* et la surface proposée sont du second degré.

8. Théorème IX. — *Si les cônes, circonscrits à une surface, se cou-*

pent, deux à deux, suivant des courbes planes, cette surface est du second degré.

Soient, en effet, un cône *fixe*, de sommet s, et un cône variable dont le sommet s' se rapproche indéfiniment du premier. La ligne formée par l'intersection de ces cônes sera une certaine courbe *plane*, variant de forme et de position en même temps que le second cône, et ayant pour limite une courbe plane. D'ailleurs, cette courbe limite n'est autre que la courbe de contact du cône fixe et de la surface proposée. Tous les cônes circonscrits à la surface ont donc leur courbe de contact plane; l'on rentre dans le théorème VII, et la surface est du second degré.

9. Théorème X. — *Si les cônes circonscrits à une surface sont du second degré, cette surface elle-même est du second degré.*

Que l'on considère, en effet, deux *quelconques* des cônes du second degré circonscrits à la surface. Ces cônes auront *deux plans tangents communs*, à savoir les deux plans tangents que l'on peut mener à la surface proposée par la droite qui réunit leurs sommets. L'intersection de ces deux cônes forme donc, suivant une proposition bien connue, un système de deux courbes planes; et l'on rentre, si l'on veut, dans le théorème précédent.

10. Théorème XI. — *Si toutes les sections planes, menées suivant un axe* O*z, sont les courbes de contact d'autant de cylindres circonscrits à la surface; l'équateur* AB *de la surface*, c'est-à-dire la courbe de contact d'un cylindre circonscrit parallèle à l'axe, *est une ellipse plane; les sections faites dans la surface, parallèlement aux plans tangents menés par les extrémités de l'axe, sont des ellipses homothétiques à la précédente; et les centres de toutes ces ellipses sont situés sur l'axe:* le mot *axe* n'entraînant ici aucune idée d'orthogonalité ou de symétrie, et servant seulement à désigner la droite qui réunit, dans une surface quelconque, les points de contact de deux plans tangents parallèles, ou deux *pôles* quelconques de la surface.

Considérons, en effet, un point quelconque A de l'équateur AB; et la section par l'axe, ou section méridienne, zAz', qui passe par ce point et s'y trouve tangente à la génératrice du cylindre circonscrit à la surface suivant l'équateur, ainsi que cela résulte de la définition de celui-ci. Nous aurons, au point considéré, deux systèmes de tangentes conjuguées. La génératrice du cylindre circonscrit suivant l'équateur, et la tangente de l'équateur (premier système); la génératrice du cylindre circonscrit suivant la ligne méridienne, et la tangente de cette ligne (second système). D'ailleurs ces deux systèmes de tangentes conjuguées ayant une droite commune (la génératrice du cylindre relatif à l'équateur, génératrice qui coïncide avec la tangente de la méridienne), les autres droites coïncident : et la tangente en un point quelconque de l'équateur coïncide avec la génératrice du cylindre relatif à la méridienne. Mais cette génératrice est parallèle au plan tangent au pôle z; donc toutes les tangentes de l'équateur sont parallèles à ce plan. *L'équateur est une ligne plane, et son plan est parallèle au plan tangent au pôle.*

Soit maintenant O la trace de l'axe zOz' sur le plan de l'équateur. Prenons ce point O pour origine des rayons vecteurs OA de l'équateur; et, supposant tracée dans le plan tangent au pôle z, autour de ce point comme centre, l'ellipse qui sert d'indicatrice à la surface en ce point; imaginons le demi-diamètre de cette ellipse qui est parallèle au rayon vecteur OA de l'équateur, ainsi que la tangente à l'extrémité de ce diamètre. Puisque celui-ci est tangent à la section méridienne zA, cette tangente de l'ellipse est parallèle aux génératrices du cylindre relatif à la méridienne, comme l'est déjà la tangente au point correspondant de l'équateur. Les tangentes de l'indicatrice et de l'équateur, en des points de ces lignes qui correspondent à des rayons vecteurs parallèles, sont donc parallèles : ces deux lignes sont *homothétiques*, et l'équateur est une *ellipse* ayant pour centre le point O, trace de l'axe Oz sur son plan, comme l'indicatrice est une ellipse ayant pour centre le pôle z.

On trouverait, d'une manière toute semblable, la nature des sections faites dans la surface parallèlement au plan tangent au pôle, que l'on suppose n'être pas un point singulier.

11. Théorème XII. — *Si les cylindres, circonscrits à une surface, ont leurs courbes de contact planes; cette surface est du second degré.*

Nous établirons d'abord que : *tous les plans des courbes de contact qui se croisent en un même point z de la surface, se coupent suivant une même droite zz'*.

Considérons, à cet effet, la droite zz', intersection des plans de deux de ces courbes zAz', zBz'; et la courbe de contact AB du cylindre circonscrit à la surface parallèlement à cette droite zz'. En vertu de l'hypothèse, cette troisième courbe AB est plane; et l'on verrait, comme dans le théorème précédent, que les tangentes de cette courbe, aux points A et B où elle est rencontrée par les deux premières zA et zB, coïncident avec les génératrices des cylindres relatifs à ces lignes, en se trouvant, par suite, parallèles au plan tangent de la surface en z. Le plan de la courbe AB elle-même est donc parallèle au plan tangent en z.

Dès lors, si les plans de toutes les courbes de contact zA, zB,..., qui se croisent en z, ne se coupaient pas suivant une droite unique zz', les intersections de ces plans, pris deux à deux, donneraient naissance à une infinité de droites analogues à la droite zz'; et la surface admettrait une infinité de sections planes parallèles au plan tangent en z, et servant de bases à une infinité de cylindres circonscrits parallèles à ces différentes droites; ce qui est absurde.

Les plans des courbes de contact, qui se croisent en un point quelconque z de la surface, se coupent donc suivant une même droite zz'; nous rentrons dans le cas du théorème XI, et toutes les sections de la surface, parallèles au plan tangent en z, sont des ellipses homothétiques ayant leurs centres sur la droite zz'. Le théorème V est donc applicable à son tour, et la surface est du second degré.

Remarque I. — Pour achever la démonstration sans recourir au théorème V, il suffit d'appliquer les propriétés trouvées pour un point quelconque z de la surface, à l'un des points A de l'*ellipse* de contact AB du cylindre circonscrit à la surface parallèlement à la droite zOz'. Car, ayant reconnu que l'*axe commun* aux plans des courbes de contact qui se croisent au point A, est précisément le diamètre OA; nous verrions que la courbe de contact du cylindre circonscrit, parallèle à l'axe OA, est une nouvelle ellipse plane, passant par les points z, z' et par les extrémités du diamètre BOB', conjugué du diamètre AOA' : la surface étant dès lors identique à l'ellipsoïde qui serait défini par les trois diamètres conjugués AOA', BOB', zOz'.

Remarque II. — Enfin la combinaison des théorèmes V et XI conduit à ce nouvel énoncé :

THÉORÈME XIII. — *Si les cylindres circonscrits à une surface, parallèlement au plan tangent en un point non singulier de la surface, ont leurs courbes de contact planes; et si les plans de ces courbes se coupent suivant une même droite : cette surface sera du second degré, dès qu'elle admettra* un nouveau *cylindre, ou un cône, à courbe de contact plane.*

12. THÉORÈME XIV. — *Si,* dans la série infinie des courbes de contact des cylindres circonscrit à une surface, *les plans osculateurs de toutes celles de ces courbes qui se croisent en chaque point* O *de la surface, se coupent suivant une même droite : cette surface est du second degré.*

Nous allons, du moins, établir la proposition pour le cas, assez étendu, ou l'*indicatrice de la surface*, en tous les points de celle-ci, *est une hyperbole;* et cela suffira pour mettre hors de doute la proposition générale.

Considérons donc, en un point quelconque O de la surface, les deux *lignes asymptotiques* OA, OB qui se croisent en ce point en ayant pour tangentes les asymptotes de l'hyperbole qui sert d'indicatrice à la surface au point O : et, parmi les cylindres dont les courbes de contact se croisent en ce point, considérons spécialement ceux dont les génératrices sont parallèles aux asymptotes de l'indicatrice; et soient Oa, Ob leurs courbes de contact.

La tangente en O de la courbe Oa, et la génératrice du cylindre correspondant, sont deux tangentes conjuguées; mais la génératrice du cylindre coïncide avec l'une des asymptotes de l'indicatrice, et cette asymptote représente un système de deux tangentes conjuguées, confondues en une seule. Donc la courbe de contact Oa du cylindre considéré est tangente en O à la génératrice du cylindre; et dès lors, par un théorème connu, *le plan osculateur en* O *de la courbe* Oa *coïncide* avec le plan tangent du cylindre, ou *avec le plan tangent de la surface primitive au même point.* Mais, d'après l'hypothèse, les plans osculateurs de toutes les courbes de contact qui se croisent en O, se coupent suivant une même droite; on vient de voir que l'un de ces plans coïncide avec le plan tangent de la surface pour le point O; donc la droite, intersection commune de tous les plans osculateurs, est située dans *le plan tangent qui représente,* dès lors, *le plan osculateur commun à toutes les courbes de contact* Oa, Ob, Oc. Or, il résulterait de là, que la génératrice en O de chacun de ces cylindres se confondrait avec la tangente au même point de la courbe de contact correspondante. La surface admettrait, *en chacun de ses points* O, une infinité de systèmes de tangentes conjuguées confondues en une seule; et, l'indicatrice, une infinité d'asymptotes : ce qui est absurde.

L'hypothèse contenue dans l'énoncé ne peut donc se réaliser, à moins que les plans osculateurs des deux courbes de contact Oa, Ob, ne deviennent *indéterminés*. D'ailleurs ces courbes sont respectivement tangentes aux lignes asymptotiques OA, OB; les plans osculateurs de ces quatre lignes coïncident deux à deux, et ces plans osculateurs ne deviennent indéterminés que dans le cas où *les lignes asymptotiques* OA *et* OB *deviennent des lignes droites*. Il passe donc, en chaque point de la surface proposée, deux lignes droites situées sur la surface : celle-ci admet deux systèmes de génératrices rectilignes, et n'est autre qu'une surface gauche du second degré.