JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MAXIMILIEN MARIE

Nouvelle théorie des fonctions de variables imaginaires ; quatrième partie. Des angles imaginaires et de la courbure des courbes et surfaces imaginaires

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 6 (1861), p. 377-408.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1861_2_6__377_0>

NOUVELLE THÉORIE
DES
FONCTIONS DE VARIABLES IMAGINAIRES;

Par M. Maximilien MARIE,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

QUATRIÈME PARTIE.
DES ANGLES IMAGINAIRES ET DE LA COURBURE DES COURBES ET SURFACES IMAGINAIRES.

CHAPITRE IX.
De la courbure des courbes imaginaires.

133. *Des contacts des divers ordres des lieux plans en général.* — Deux courbes réelles,

$$f(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad f_1(x, y) = 0,$$

qui passent en un même point réel $[x, y]$, ont en ce point un contact de l'ordre n, lorsque $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}$, tirées des deux équations séparément, y ont les mêmes valeurs.

On serait disposé à appliquer, sans nouvelle démonstration, le même principe aux courbes imaginaires : cependant, outre que l'énoncé doit en être complété alors par une restriction spéciale destinée à faire connaître expressément les lieux conjoints auxquels le théorème est applicable, la vérification en est en quelque sorte rendue nécessaire par la composition des coordonnées en parties réelles et imaginaires, et par l'obscurité qui s'attache en conséquence à la notion même des coefficients différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc.

Nous croyons donc devoir établir directement le théorème suivant :

Si deux équations

$$f(x, y) = 0, \quad f_1(x, y) = 0,$$

ont une solution commune, réelle ou imaginaire, $[x, y]$, et qu'au point correspondant, $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}$, tirées séparément des deux équations, présentent les mêmes valeurs, les lieux partant du point $[x, y]$, qui seraient définis par les équations

$$f(x, y) = 0 \quad \text{ou} \quad f_1(x, y) = 0$$

et par une relation complémentaire commune, $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, établie entre les parties réelle et imaginaire de x, auront au point $[x, y]$ un contact de l'ordre n, c'est-à-dire que x_1 et y_1 désignant les coordonnées réelles de l'un ou de l'autre des deux lieux, $\frac{dy_1}{dx_1}, \frac{d^2y_1}{dx_1^2}, \ldots, \frac{d^ny_1}{(dx_1)^n}$, auront les mêmes valeurs de part et d'autre au point commun à ces deux lieux.

Il suffira pour cela d'établir que

$$\frac{dx_1}{d\alpha}, \frac{d^2x_1}{d\alpha^2}, \ldots, \frac{d^nx_1}{d\alpha^n}$$

et

$$\frac{dy_1}{d\alpha}, \frac{d^2y_1}{d\alpha^2}, \ldots, \frac{d^ny_1}{d\alpha^n}$$

auront les memes valeurs de part et d'autre; car $\frac{dy_1}{dx_1}, \frac{d^2y_1}{dx_1^2}, \ldots, \frac{d^ny_1}{dx_1^n}$, dépendant de

$$\frac{dx_1}{d\alpha}, \frac{d^2x_1}{d\alpha^2}, \ldots, \frac{d^nx_1}{d\alpha^n}$$

et de

$$\frac{dy_1}{d\alpha}, \frac{d^2y_1}{d\alpha^2}, \ldots, \frac{d^ny_1}{d\alpha^n}$$

auront par suite aussi les mêmes valeurs de part et d'autre.

Or la loi de progression de x_1 étant de part et d'autre réglée par les mêmes équations

$$x_1 = \alpha + \beta,$$
$$\varphi(\alpha, \beta) = 0,$$

les dérivées de tous les ordres de x_1, par rapport à α, seront d'elles-mêmes égales de part et d'autre; de sorte que la démonstration doit porter seulement sur les dérivées de y_1 par rapport à α.

Mais les dérivées de y_1, par rapport à α, se déduisant de celles de y, par rapport à la même variable, en y remplaçant $\sqrt{-1}$ par 1, tout se réduira, en définitive, à établir l'identité des valeurs de

$$\frac{dy}{d\alpha}, \frac{d^2y}{d\alpha^2}, \ldots, \frac{d^ny}{d\alpha^n},$$

tirées séparément des deux équations proposées.

Or

$$\frac{dy}{d\alpha} = \frac{dy}{dx}\left(1 + \frac{d\beta}{d\alpha}\sqrt{-1}\right),$$
$$\frac{d^2y}{d\alpha^2} = \frac{d^2y}{dx^2}\left(1 + \frac{d\beta}{d\alpha}\sqrt{-1}\right)^2 + \frac{dy}{dx}\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\sqrt{-1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Ces équations montrent suffisamment que les dérivées de y, par rapport à α, ne dépendant que de celles de y par rapport à x, qui sont supposées égales de part et d'autre, et de celles de β par rapport à α, qui sont identiques, seront aussi égales.

On pourrait évidemment substituer à la relation $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ une équation quelconque entre α, β, α' et β' : mais la démonstration du théorème montre même qu'à une relation commune $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, on pourrait substituer deux relations différentes $\psi(\alpha, \beta) = 0$, $\chi(\alpha, \beta) = 0$ qui donnassent au point $[x, y]$ les mêmes valeurs pour

$$\frac{d\beta}{d\alpha}, \frac{d^2\beta}{d\alpha^2}, \ldots, \frac{d^n\beta}{d\alpha^n}.$$

134. *Des contacts des divers ordres des conjuguées, de même ca-*

ractéristique, de deux courbes quelconques. — Le théorème précédent s'applique de lui-même aux conjuguées de deux courbes

$$f(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad f_1(x, y) = 0$$

qui passent en un point réel ou imaginaire commun aux deux lieux. C'est-à-dire que si deux équations

$$f(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad f_1(x, y) = 0$$

ont une solution commune $[x, y]$ et qu'au point correspondant les n premières dérivées de y par rapport à x aient mêmes valeurs de part et d'autre, les conjuguées des deux courbes, dont la caractéristique serait celle du point $[x, y]$, auront en ce point un contact de l'ordre n.

Car la condition que la caractéristique reste constante, fournira une équation $\beta' = \beta c$ parfaitement équivalente à une condition $\varphi(\alpha, \beta) = 0$.

135. Il résulte de ce qui précède que si l'on détermine, au moyen des formules usuelles, les coefficients A, B, R de l'équation

$$(x - A)^2 + (y - B)^2 = R^2,$$

de manière que cette équation admette une solution réelle ou imaginaire $[x, y]$, d'une équation $f(x, y) = 0$, et fournisse de plus, au point correspondant, pour $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$, les mêmes valeurs que donnerait l'équation $f(x, y) = 0$ elle-même, les conjuguées des deux lieux auront au point $[x, y]$ même centre et même rayon de courbure.

La recherche du centre et du rayon de courbure d'une conjuguée d'une courbe quelconque en un point de cette conjuguée revient donc à la recherche du centre et du rayon de courbure de la conjuguée du *cercle imaginaire osculateur en ce point à la courbe proposée.*

De sorte que la question des courbures des courbes imaginaires est ramenée à celle des courbures des conjuguées du lieu

$$(x - A)^2 + (y - B)^2 = R^2.$$

Nous devons donc commencer par discuter ces conjuguées.

136. *Du cercle imaginaire.* — Les conjuguées que peut représenter l'équation

$$(x - a - a'\sqrt{-1})^2 + (y - b - b'\sqrt{-1})^2 = (r + r'\sqrt{-1})^2$$

ne changeant pas, quelque transformation qu'on fasse subir aux axes de coordonnées, nous les ferons tourner autour de l'origine d'un angle tel, que la partie imaginaire de l'ordonnée du centre disparaisse.

La transformation n'affectera jamais le rayon, qui restera toujours représenté par $r + r'\sqrt{-1}$; quant aux coordonnées du centre, la transformation les changera de la même manière que si elle ne se faisait que pour ce point. De sorte que si ω désigne l'angle dont on aura fait tourner les axes, l'équation nouvelle du lieu sera

$$\begin{aligned}&\left[x - (a + a'\sqrt{-1})\cos\omega + (b + b'\sqrt{-1})\sin\omega\right]^2\\ &+\left[y - (a + a'\sqrt{-1})\sin\omega - (b + b'\sqrt{-1})\cos\omega\right]^2 = (r + r'\sqrt{-1})^2.\end{aligned}$$

On fera donc disparaître la partie imaginaire de l'ordonnée du centre en faisant

$$\operatorname{tang}\omega = -\frac{b'}{a'}.$$

L'équation du lieu ainsi simplifiée sera

$$(x - a - a'\sqrt{-1})^2 + (y - b)^2 = (r + r'\sqrt{-1})^2;$$

en transportant ensuite les axes parallèlement à eux-mêmes au point réel $[a, b]$, on ramènera cette équation à la forme

$$(x - a\sqrt{-1})^2 + y^2 = (r + r'\sqrt{-1})^2.$$

C'est cette équation que nous allons discuter.

Nous déterminerons d'abord l'enveloppe imaginaire des courbes qu'elle représente.

Les coordonnées d'un point de l'enveloppe étant

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1},$$

la condition que devront remplir les variables α, β, α', β' sera

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x - a\sqrt{-1}}{y} = -\frac{\alpha + (\beta - a)\sqrt{-1}}{\alpha' + \beta'\sqrt{-1}} = \text{réel},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta - a}{\beta'},$$

équation qu'il faudra adjoindre à celles qui exprimeraient que le point $[x, y]$ appartient au lieu proposé, et qui sont

$$\alpha^2 - (\beta - a)^2 + \alpha'^2 - \beta'^2 = r^2 - r'^2,$$
$$\alpha(\beta - a) + \alpha'\beta' = rr'.$$

En éliminant successivement β et β' d'abord, ensuite α et α' entre ces équations, on trouve

$$\alpha^2 + \alpha'^2 = r^2$$

et

$$(\beta - a)^2 + \beta'^2 = r'^2.$$

Il résulte de ces équations que l'enveloppe cherchée est la circonférence décrite du point $[x = a, y = 0]$ comme centre, avec un rayon égal à $r + r'$.

En effet, d'après l'équation

$$\alpha^2 + \alpha'^2 = r^2,$$

les coordonnées d'un point N quelconque (*fig.* 9) de la circonférence décrite autour de l'origine, avec un rayon r, sont des valeurs conjointes de α et de α' ; et de même, d'après l'équation

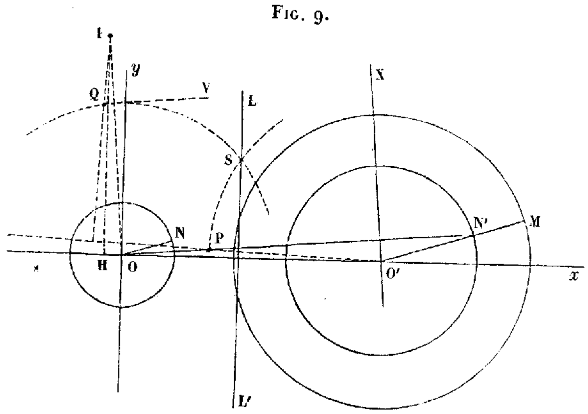
$$(\beta - a)^2 + \beta'^2 = r'^2,$$

les coordonnées d'un point N' quelconque de la circonférence décrite autour du point O' $[x = a, y = 0]$ avec un rayon r', sont aussi des valeurs conjointes de β et de β' ; mais d'un autre côté, en raison de l'équation

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta - a}{\beta'},$$

les quatre valeurs conjointes de α, α', β, β' doivent être les coordonnées de points N et N' situés aux extrémités de rayons parallèles ON, O'N' des deux circonférences.

Fig. 9.



$\alpha + \beta$ et $\alpha' + \beta'$ sont donc les coordonnées du point M situé sur la circonférence décrite du point O' comme centre, avec un rayon égal à $r + r'$, à l'extrémité du rayon de cette circonférence qui se trouve couché sur O'N'.

Ainsi l'enveloppe imaginaire des conjuguées du lieu

$$(x - a\sqrt{-1})^2 + y^2 = (r + r'\sqrt{-1})^2$$

est le cercle

$$(x - a)^2 + y^2 = (r + r')^2.$$

Si l'on avait conservé à l'équation du cercle imaginaire sa forme primitive

$$(x - a - a'\sqrt{-1})^2 + (y - b - b'\sqrt{-1})^2 = (r + r'\sqrt{-1})^2,$$

on aurait trouvé pour équation en coordonnées réelles de l'enveloppe imaginaire

$$(x-a-a')^2+(y-b-b')^2=(r+r')^2.$$

Ce résultat est remarquable.

Pour obtenir le point de contact M d'une conjuguée désignée C avec l'enveloppe, il suffira de construire le point N' qui lui correspond, car en prolongeant ensuite O'N' on aura le point M; or les coordonnées β' et β du point N' devant fournir un rapport égal à C, on obtiendra ce point en menant la droite ON' dont l'angle avec l'axe des x ait pour tangente C.

Lorsque l'origine sera dans l'intérieur du cercle O'N', le rapport des coordonnées du point N' pourra passer par tous les états de grandeur et, dans ce cas, toutes les conjuguées toucheront l'enveloppe chacune en deux points. Dans le cas contraire, les valeurs extrêmes du rapport des coordonnées du point N' seront les coefficients angulaires des tangentes menées de l'origine au cercle O'N'; les conjuguées dont la caractéristique resterait comprise entre ces limites toucheront donc seules l'enveloppe imaginaire.

L'équation

$$(x-a\sqrt{-1})^2+y^2=(r+r'\sqrt{-1})^2$$

fournira dans ce dernier cas deux points réels par où passeront toutes les conjuguées. En effet les valeurs réelles de x et de y que pourrait comporter cette équation seraient

$$x=-\frac{rr'}{a} \quad \text{et} \quad y=\pm\frac{\sqrt{(a^2+r^2)(a^2-r'^2)}}{a},$$

mais la réalité des ordonnées dépend de la condition $a^2>r'^2$.

Si a^2 était égal à r'^2, c'est-à-dire si le cercle O'N' passait par l'origine, les deux points réels se confondraient en un seul et avec l'une des extrémités du diamètre horizontal du cercle ON.

Nous avons supposé, en faisant la figure, que r et r' fussent de même signe; autrement les rayons ON et O'N' devraient être de sens contraires, et, par suite, le rayon O'M de l'enveloppe, toujours représenté par $r + r'$, serait la différence des rayons ON et O' N'. En effet, les équations

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta - a}{\beta'}$$

et

$$\alpha(\beta - a) + \alpha'\beta' = rr',$$

qui se rapportent à un point quelconque de l'enveloppe, montrent, la première, que $\frac{\alpha}{\beta - a}$ et $\frac{\alpha'}{\beta'}$, ou, par suite, $\alpha(\beta - a)$ et $\alpha'\beta'$, sont toujours de même signe, tandis que la seconde exige ensuite que ces produits ou rapports aient le signe de rr'. De sorte que si rr' est négatif, $\frac{\alpha}{\beta - a}$ et $\frac{\alpha'}{\beta'}$ étant négatifs, les rayons ON, O' N' sont de sens contraires.

On peut construire par points, avec la règle et le compas, les conjuguées du cercle imaginaire

$$(x - a\sqrt{-1})^2 + y^2 = (r + r'\sqrt{-1})^2.$$

En effet,

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$$

désignant maintenant les coordonnées d'un point de la conjuguée C, on doit avoir

$$\alpha^2 + \alpha'^2 - r^2 = (\beta - a)^2 + \beta'^2 - r'^2,$$

$$\alpha(\beta - a) + \alpha'\beta' = rr'$$

et

$$\frac{\beta'}{\beta} = \mathrm{C}.$$

La première de ces équations exprime que les tangentes menées du point $[\alpha, \alpha']$ au cercle

$$y^2 + x^2 = r^2$$

sont égales aux tangentes menées du point $[\beta, \beta']$ au cercle

$$y^2 + (x - a)^2 = r'^2.$$

LL′ étant donc l'axe radical de ces deux cercles O et O′, si l'on marque un point S quelconque de cet axe et qu'on décrive les deux circonférences OS et O′S, $[\alpha, \alpha']$ seront les coordonnées d'un point de la première et $[\beta, \beta']$ celles d'un point de la seconde. Comme $\frac{\beta'}{\beta} = C$, le point $[\beta, \beta']$ se trouvera au point de rencontre de la circonférence O′S et de la droite fixe ON′ que l'on aura menée pour obtenir le point de contact M de la conjuguée C avec l'enveloppe. Ce point $[\beta, \beta']$ sera en P par exemple. D'un autre côté, α et α' doivent satisfaire à la condition

$$\alpha(\beta - a) + C\alpha'\beta = rr'$$

ou

$$\beta(\alpha + C\alpha') - a\alpha - rr' = 0.$$

Or cette équation, en y considérant α et α' comme les coordonnées courantes, représente une droite qui, quel que soit β, passe toujours au point fixe

$$\alpha = -\frac{rr'}{a}, \quad \alpha' = \frac{rr'}{aC}$$

et dont le coefficient angulaire

$$-\frac{\beta - a}{C\beta} \quad \text{ou} \quad -\frac{\beta - a}{\beta'}$$

est l'inverse changée de signe du coefficient angulaire de O′P. Ces deux conditions la déterminent, et il en résulte que le point $[\beta, \beta']$ de la circonférence OS, qui correspond au point $[\alpha, \alpha']$ de la circonférence O′S, doit être sur la perpendiculaire menée à O′P du point fixe

$$\left[-\frac{rr'}{a}, \frac{rr'}{aC}\right].$$

Ce dernier point est en I, à la rencontre de la ligne HI,

$$x = -\frac{rr'}{a},$$

qui passe par les deux points réels, et de la perpendiculaire OI à ON′.

Par conséquent si IQ est perpendiculaire à O′ P, Q est l'un des points cherchés.

Les points P et Q étant ainsi déterminés, le point correspondant V du lieu s'obtiendra en menant de Q une droite QV égale et parallèle à OP.

Les asymptotes de toutes les conjuguées sont représentées par les équations

$$y = \pm \sqrt{-1}\,(x - a\sqrt{-1});$$

celles de la conjuguée C sont donc, en coordonnées réelles,

$$y = \frac{C-1}{C+1}\,x + a$$

et

$$y = \frac{1+C}{1-C}\,x - a.$$

Les deux asymptotes d'une même conjuguée sont en conséquence toujours perpendiculaires l'une sur l'autre; elles partent respectivement des points $[0, +a]$, $[0, -a]$ et enfin sont inclinées de 45° sur la droite $y = Cx$. Quant à leur point de rencontre, il décrit la circonférence du cercle $y^2 + x^2 = a^2$ et de plus appartient à la perpendiculaire O′ X menée à la droite ON′, $y = Cx$, car les équations de ces asymptotes donnent

$$(C+1)\,y = (C-1)\,x + a\,(C+1)$$

et

$$(1-C)\,y = (1+C)\,x - a\,(1-C),$$

d'où l'on tire par soustraction

$$y = -\frac{1}{C}\,(x-a).$$

Au reste la ligne O′ X,

$$y = -\frac{1}{C}\,(x-a),$$

est un axe de symétrie de la conjuguée C. La règle qui a été donnée pour la construction des points de cette conjuguée le montre suffisamment.

Remarque. — Les conjuguées du cercle imaginaire, dont la construction par points est, comme on vient de le voir, toujours si facile, sont remarquables à plus d'un titre. En les projetant d'un plan sur un autre, on en tirerait d'abord toutes les courbes que peut représenter l'équation

$$\begin{gathered} Ay^2 + Bxy + Cx^2 \\ + (D + D'\sqrt{-1})\, y + (E + E'\sqrt{-1})\, x + F + F'\sqrt{-1} = 0; \end{gathered}$$

mais celles-ci fourniront ensuite, comme on le verra plus tard, toutes les courbes du quatrième ordre dont l'équation peut être abaissée au second degré en substituant la représentation en coordonnées imaginaires à la représentation en coordonnées réelles.

Or ces courbes jouissent de propriétés toutes caractéristiques : elles n'ont que deux tangentes parallèles à une direction donnée, elles n'ont que deux asymptotes, elles ont toujours un diamètre rectiligne; enfin leurs aires peuvent s'exprimer au moyen seulement des fonctions circulaires et sont, par suite, simplement périodiques.

Ces courbes formeraient donc, parmi celles du quatrième ordre, une classe fort intéressante, à ces divers titres, mais de plus assez étendue, puisque leur équation contiendrait dix constantes arbitraires sur quatorze qui peuvent entrer dans l'équation générale du quatrième degré.

137. La détermination des courbures des lieux plans réels ou imaginaires se trouve, par ce qui précède, ramenée à la détermination des courbures des conjuguées du cercle imaginaire

$$(x - a - a'\sqrt{-1})^2 + (y - b - b'\sqrt{-1})^2 = (r + r'\sqrt{-1}).$$

Deux méthodes bien différentes se présentent d'elles-mêmes pour cette dernière recherche, comme au reste pour toutes celles qui nous ont déjà occupé.

Si l'on ne peut mieux faire, on repassera, des équations entre les formes imaginaires des variables considérées, aux équations entre les valeurs réelles de ces variables, pour n'avoir plus qu'à appliquer les formules usuelles de solution des questions qu'on se proposait.

Mais si l'on a pu au contraire concevoir d'abord à la question posée une réponse intelligible, quoique compliquée par la présence d'imaginaires, on conservera aux données leur forme primitive imaginaire, pour en former directement le résultat cherché, sous sa forme imaginaire prévue et interprétée d'avance.

La première méthode, en raison même des moyens dont elle dispose, ne peut conduire qu'à des résultats informes; elle ne constitue donc qu'une ressource insuffisante pour les cas où l'on n'aurait pu instituer la seconde : aussi est-ce à permettre d'en éviter l'emploi que tend la théorie tout entière, puisque ce ne serait rien en effet que d'avoir su attribuer la forme imaginaire aux données réelles d'une question, s'il fallait, pour traiter cette question, rendre avant tout aux données leur forme réelle.

La solution que nous allons proposer de la question qui nous occupe se trouverait donc condamnée à l'avance par les raisons que nous venons d'indiquer. On ne doit en effet la considérer que comme provisoire.

Au reste, nous bornons ici nos recherches à la détermination du rayon de courbure de l'enveloppe imaginaire des conjugués d'une courbe quelconque et à celle du rayon de courbure d'une conjuguée aux points seulement où elle touche l'une ou l'autre enveloppe.

Les résultats auxquels nous sommes parvenu étant assez simples pour pouvoir être conservés sous leur forme actuelle, quelques progrès qu'on puisse faire plus tard dans la solution générale de la question, nous pouvons donc les noter.

138. *De la courbure de l'enveloppe imaginaire des lieux plans représentés par une équation entre deux variables.* — Lorsque deux équations admettent une solution commune et qu'au point correspondant les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ sont, de part et d'autre, réelles et égales, les deux enveloppes passent en ce point et s'y touchent : il était donc présumable que si les valeurs de $\frac{d^2y}{dx^2}$ se trouvaient encore les mêmes de part et d'autre, au point considéré, les deux enveloppes y auraient un contact du second ordre et par conséquent même centre et même rayon de courbure.

La démonstration positive du fait présentait toutefois des difficultés inattendues. Les deux enveloppes, une fois tracées, remplissent bien en effet la condition graphique énoncée, mais sans cependant que les conditions supposées entraînent l'existence simultanée sur les deux enveloppes de trois points ayant identiquement les mêmes coordonnées. Les grandeurs des coordonnées du troisième point réalisées sont bien les mêmes de part et d'autre, mais les valeurs algébriques imaginaires de ces coordonnées ne sont point pareilles. La répartition en parties réelles et imaginaires des coordonnées réalisées de ce troisième point peut différer d'une enveloppe à l'autre, les sommes seules des parties réelles et imaginaires des deux coordonnées restent identiques.

Lorsque ce théorème sera établi, on pourra prendre pour centre et pour rayon de courbure de l'enveloppe imaginaire des conjuguées d'un lieu quelconque, en un point de cette enveloppe, le centre et le rayon de courbure de l'enveloppe imaginaire des conjuguées du cercle osculateur, en ce point, au lieu considéré.

Soit donc $[x, y]$ le point commun aux enveloppes imaginaires des conjuguées de deux lieux et supposons que $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ aient de part et d'autre les mêmes valeurs en ce point, $\frac{dy}{dx}$ y étant d'ailleurs réel.

Si p désigne la valeur réelle de $\frac{dy}{dx}$ au point $[x, y]$,

$$dy = d\alpha' + d\beta'\sqrt{-1}$$

et

$$dx = d\alpha + d\beta\sqrt{-1},$$

devront satisfaire à la condition

$$\frac{d\alpha' + d\beta'\sqrt{-1}}{d\alpha + d\beta\sqrt{-1}} = p,$$

qui donne

$$\frac{d\alpha'}{d\alpha} = p \quad \text{et} \quad \frac{d\beta'}{d\beta} = \frac{\frac{d\beta'}{d\alpha}}{\frac{d\beta}{d\alpha}} = p;$$

d'un autre côté, si $r + s\sqrt{-1}$ est la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ au point $[x, y]$, la valeur de $\frac{dy}{dx}$ en un point du lieu, voisin de $[x, y]$, sera représentée par

$$\frac{dY}{dX} = p + (r + s\sqrt{-1})\frac{X - x}{1} + \ldots,$$

et pour que le point

$$[x + d\alpha + d\beta\sqrt{-1},\ y + d\alpha' + d\beta'\sqrt{-1}]$$

appartienne aussi à l'enveloppe, il faudra que l'accroissement

$$(r + s\sqrt{-1})(d\alpha + d\beta\sqrt{-1}),$$

qu'aura subi la dérivée de Y par rapport à X, en passant du premier point au second, soit réel. Cette condition donne

$$s\,d\alpha + r\,d\beta = 0$$

ou

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{s}{r}.$$

Ainsi au point commun aux deux enveloppes considérées, puisque p, r et s sont supposés les mêmes de part et d'autre, $\frac{d\beta}{d\alpha}$, $\frac{d\alpha'}{d\alpha}$ et $\frac{d\beta'}{d\alpha}$ auront les mêmes valeurs de part et d'autre.

Passons aux dérivées secondes $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}$, $\frac{d^2\alpha'}{d\alpha^2}$ et $\frac{d^2\beta'}{d\alpha^2}$: de quelque point $[x, y]$ qu'il s'agisse, on a toujours identiquement

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dY}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dX} = \left(\frac{d\alpha'}{d\alpha} + \frac{d\beta'}{d\alpha}\sqrt{-1}\right)\frac{1}{1 + \frac{d\beta}{d\alpha}\sqrt{-1}},$$

et, par suite,

$$\frac{d^2 Y}{dX^2} = \frac{d\left(\frac{d\alpha'}{d\alpha}+\frac{d\beta'}{d\alpha}\sqrt{-1}\right)}{d\alpha}\,\frac{1}{\left(1+\frac{d\beta}{d\alpha}\sqrt{-1}\right)^2} - \left(\frac{d\alpha'}{d\alpha}+\frac{d\beta'}{d\alpha}\sqrt{-1}\right)\frac{\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\sqrt{-1}}{\left(1+\frac{d\beta}{d\alpha}\sqrt{-1}\right)^3}$$

$$= \frac{\left(\frac{d^2\alpha'}{d\alpha^2}+\frac{d^2\beta'}{d\alpha^2}\sqrt{-1}\right)\left(1+\frac{d\beta}{d\alpha}\sqrt{-1}\right) - \left(\frac{d\alpha'}{d\alpha}+\frac{d\beta'}{d\alpha}\sqrt{-1}\right)\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\sqrt{-1}}{\left(1+\frac{d\beta}{d\alpha}\sqrt{-1}\right)^3}.$$

Les dérivées secondes de Y par rapport à X au point $[x, y]$ étant donc supposées égales de part et d'autre et leur valeur commune étant $r + s\sqrt{-1}$, on aura pour l'un et l'autre lieu

$$r + s\sqrt{-1} = \frac{\left(\frac{d^2\alpha'}{d\alpha^2}+\frac{d^2\beta'}{d\alpha^2}\sqrt{-1}\right)\left(1+\frac{d\beta}{d\alpha}\sqrt{-1}\right) - \left(\frac{d\alpha'}{d\alpha}+\frac{d\beta'}{d\alpha}\sqrt{-1}\right)\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\sqrt{-1}}{\left(1+\frac{d\beta}{d\alpha}\sqrt{-1}\right)^3}.$$

En remplaçant dans cette équation $\frac{d\beta}{d\alpha}$ par $-\frac{s}{r}$, $\frac{d\alpha'}{d\alpha}$ par p, et $\frac{d\beta'}{d\alpha}$ par $-\frac{ps}{r}$, valeurs trouvées plus haut, et décomposant, on trouve

$$r^3\frac{d^2\alpha'}{d\alpha^2} + r^2 s\left(\frac{d^2\beta'}{d\alpha^2} - p\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\right) = r^4 - s^4$$

et

$$rs\frac{d^2\alpha'}{d\alpha^2} - r^2\left(\frac{d^2\beta'}{d\alpha^2} - p\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\right) = 2s(r^2+s^2),$$

d'où l'on conclut

$$\frac{d^2\alpha'}{d\alpha^2} = \frac{r^2+s^2}{r}$$

et

$$\frac{d^2\beta'}{d\alpha^2} - p\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = -\frac{s}{r}\frac{d^2\alpha'}{d\alpha^2} = -\frac{s}{r^2}(r^2+s^2) \; [*].$$

---

[*] L'équation

$$\frac{d^2\beta'}{d\alpha^2} - p\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = -\frac{s}{r}\frac{d^2\alpha'}{d\alpha^2}$$

Ces deux dernières équations ne se rapportent pas plus à l'enveloppe imaginaire des conjuguées qu'à tout autre lieu partant du point

$$[x + d\alpha + d\beta\sqrt{-1},\ y + d\alpha' + d\beta'\sqrt{-1}]$$

de l'enveloppe. Aussi contiennent-elles trois inconnues $\frac{d^2\alpha'}{d\alpha^2}$, $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}$ et $\frac{d^2\beta'}{d\alpha^2}$ et, par suite, laissent-elles l'une d'elles indéterminée.

Mais ce que la question offre de particulier, c'est que les données ne suffisent pas pour achever la détermination de $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}$ et de $\frac{d^2\beta'}{d\alpha^2}$ qui restent liées entre elles par la seule condition

$$\frac{d^2\beta'}{d\alpha^2} - p\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = -\frac{s}{r^2}(r^2 + s^2).$$

Il est évident en effet que, pour exprimer que le troisième point est aussi resté sur l'enveloppe, il faudrait exprimer que le nouvel accroissement subi par $\frac{dY}{dX}$ est encore resté réel; or l'expression de cette condition renfermerait les parties réelle et imaginaire de $\frac{d^3Y}{dX^3}$ au point $[x, y]$, parties que l'on ne connaît pas.

Les valeurs de $\frac{d^3Y}{dX^3}$ n'étant donc pas supposées les mêmes pour les deux lieux, au point $[x, y]$, $\frac{d^2\alpha'}{d\alpha^2}$ aura bien de part et d'autre la même valeur, puisque les conditions précédentes l'ont séparé; mais $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}$ et

---

se retrouverait en dérivant par rapport à α l'équation

$$\frac{d\alpha'}{d\alpha} = \frac{\frac{d\beta'}{d\alpha}}{\frac{d\beta}{d\alpha}},$$

qui exprime que $\frac{dy}{dx}$ est resté réel en passant du point $[x, y]$ au point

$$[x + d\alpha + d\beta\sqrt{-1},\ y + d\alpha' + d\beta'\sqrt{-1}].$$

$\frac{d^2\beta'}{d\alpha^2}$ pourront être différents et seront seulement liés l'un à l'autre par la même condition

$$\frac{d^2\beta'}{d\alpha^2} - p\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = -\frac{s}{r^2}(r^2 + s^2).$$

Les deux enveloppes auront cependant au point $[x, y]$ la même courbure et le même centre de courbure, puisqu'elles passent toutes deux au point $[x, y]$, qu'elles y ont la même tangente sous le coefficient angulaire p; qu'elles contiennent par conséquent toutes deux le point

$$[x + d\alpha + d\beta\sqrt{-1},\ y + d\alpha' + d\beta'\sqrt{-1}],$$

défini par les conditions

$$\frac{d\alpha'}{d\alpha} = p,\quad \frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{s}{r},\quad \frac{d\beta'}{d\alpha} = -p\frac{s}{r},$$

et qu'enfin elles ont encore en ce point

$$[x + d\alpha + d\beta\sqrt{-1},\ y + d\alpha' + d\beta'\sqrt{-1}]$$

même tangente, sous le coefficient angulaire

$$p + r d\alpha - s d\beta.$$

Pour concilier ces résultats, en apparence contradictoires, il faut donc que la courbure de l'une et de l'autre enveloppe ne dépende pas séparément de $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}$ et de $\frac{d^2\beta'}{d\alpha^2}$ au point commun, mais seulement de la somme

$$\frac{d^2\beta'}{d\alpha^2} - p\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}.$$

La vérification de ce point est en effet aisée à produire.

Car si x_1 et y_1 désignent les coordonnées réalisées d'un point quelconque d'un lieu imaginaire, la courbure de ce lieu au point $[x_1, y_1]$

dépend de $\frac{dy_1}{dx_1}$ et de $\frac{d^2y_1}{dx_1^2}$; or

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{d\alpha' + d\beta'}{d\alpha + d\beta} = \frac{\frac{d\alpha'}{d\alpha} + \frac{d\beta'}{d\alpha}}{1 + \frac{d\beta}{d\alpha}}$$

et

$$\frac{d^2y_1}{dx_1^2} = \frac{d\,\frac{\frac{d\alpha'}{d\alpha} + \frac{d\beta'}{d\alpha}}{1 + \frac{d\beta}{d\alpha}}}{d\alpha}\,\frac{d\alpha}{dx_1} = \frac{d\,\frac{\frac{d\alpha'}{d\alpha} + \frac{d\beta'}{d\alpha}}{1 + \frac{d\beta}{d\alpha}}}{d\alpha}\cdot\frac{1}{1 + \frac{d\beta}{d\alpha}}.$$

$$= \frac{\left(\frac{d^2\alpha'}{d\alpha^2} + \frac{d^2\beta'}{d\alpha^2}\right)\left(1 + \frac{d\beta}{d\alpha}\right) - \left(\frac{d\alpha'}{d\alpha} + \frac{d\beta'}{d\alpha}\right)\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}}{\left(1 + \frac{d\beta}{d\alpha}\right)^3}.$$

Mais au point commun aux deux enveloppes qui nous occupent, $\frac{d\beta}{d\alpha}$, $\frac{d\alpha'}{d\alpha}$ et $\frac{d\beta'}{d\alpha}$ ont identiquement les mêmes valeurs, $\frac{dy_1}{dx_1}$ a donc de part et d'autre la même valeur; d'un autre côté, si l'on remplace, dans l'expression de $\frac{d^2y_1}{dx_1^2}$, $\frac{d\beta}{d\alpha}$, $\frac{d\alpha'}{d\alpha}$ et $\frac{d\beta'}{d\alpha}$ par leurs valeurs trouvées plus haut,

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{s}{r}, \quad \frac{d\alpha'}{d\alpha} = p, \quad \frac{d\beta'}{d\alpha} = -\frac{ps}{r},$$

il vient

$$\frac{d^2y_1}{dx_1^2} = \frac{\left(\frac{d^2\alpha'}{d\alpha^2} + \frac{d^2\beta'}{d\alpha^2}\right)\left(1 - \frac{s}{r}\right) - \left(p - \frac{ps}{r}\right)\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}}{\left(1 - \frac{s}{r}\right)^3}:$$

cette expression ne dépend en effet que de la somme

$$\frac{d^2\beta'}{d\alpha^2} - p\,\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}.$$

Ainsi quand on applique à un point $[x, y]$ de l'enveloppe imaginaire des conjuguées d'un lieu $f(x, y) = 0$, les formules qui fourniraient le centre et le rayon de courbure de la courbe en un de ses points réels, l'enveloppe imaginaire des conjuguées du lieu représenté par l'équation du cercle osculateur, alors imaginaire, que donnent les formules, passe au point $[x, y]$, et les deux enveloppes y ont même centre et même rayon de courbure.

Mais si l'équation du cercle osculateur est

$$(x - a - a'\sqrt{-1})^2 + (y - b - b'\sqrt{-1})^2 = (r + r'\sqrt{-1})^2,$$

l'enveloppe imaginaire des conjuguées coïncide avec le cercle réel

$$(x - a - a')^2 + (y - b - b')^2 = (r + r')^2,$$

c'est-à-dire que le centre de courbure de cette enveloppe est le point $[a + a', b + b']$ et sa courbure $\frac{1}{r + r'}$.

Par conséquent donc, si en un point quelconque $[x, y]$ de l'enveloppe imaginaire des conjuguées d'un lieu $f(x, y) = 0$ on a calculé les valeurs $a + a'\sqrt{-1}$, $b + b'\sqrt{-1}$ et $(r + r'\sqrt{-1})^2$ de

$$x + \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

$$y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

et

$$\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2},$$

le cercle osculateur de cette enveloppe au point considéré sera

$$(x - a - a')^2 + (y - b - b')^2 = (r + r')^2.$$

Ce théorème aidera beaucoup à la construction toujours si importante de l'enveloppe imaginaire des conjuguées du lieu dont on s'occupera.

139. *De la courbure d'une conjuguée quelconque en un point où elle touche l'une ou l'autre enveloppe.* — On pourrait établir très-simplement que les courbures de la courbe réelle et d'une quelconque de ses conjuguées, aux points où elles se touchent, sont toujours égales et opposées : en effet, quelle qu'en soit la cause, le fait est vrai pour le cercle et ses conjuguées hyperboliques ; or il en résulte que si l'on a déterminé le cercle osculateur à une courbe réelle en un de ses points réels, la conjuguée de ce cercle, qui passera au même point, aura sa courbure réelle et opposée à celle de la courbe réelle; et comme d'un autre côté il a été établi que cette conjuguée du cercle aura, avec la conjuguée de la courbe réelle, qui la touche au même point, un contact du second ordre. La courbe réelle et sa conjuguée auront donc elles-mêmes, au point où elles se touchent, leurs courbures égales et opposées.

Quant à l'explication du fait, on la trouverait aisément dans la comparaison des termes de moindres degrés par rapport à x et à y des équations en coordonnées réelles de la courbe réelle et de sa conjuguée, rapportées toutes deux à leur tangente et à leur normale communes.

Mais nous n'insisterons pas, parce que la courbe réelle n'étant en définitive qu'une branche particulière de l'enveloppe totale, ses propriétés se déduisent, comme cas particuliers, de celles de l'enveloppe imaginaire.

140. Nous savons déjà que si l'on a déterminé le cercle imaginaire osculateur à une courbe $f(x, y) = 0$ en un point $[x, y]$ pris sur l'enveloppe imaginaire des conjuguées de cette courbe, non-seulement les deux enveloppes seront osculatrices l'une à l'autre, en ce point, mais encore les conjuguées qui y passeront le seront aussi.

En sorte que la recherche de la courbure d'une conjuguée en un point où elle touche l'enveloppe imaginaire revient à celle de la courbure en ce point de la conjuguée du cercle osculateur qui y passe.

Tout se réduit donc à obtenir le rayon et le centre de courbure d'une des conjuguées du lieu

$$(x - a - a'\sqrt{-1})^2 + (y - b - b'\sqrt{-1})^2 = (r + r'\sqrt{-1})^2,$$

au point où elle touche l'enveloppe imaginaire de ce lieu.

Soient en conséquence x et y les coordonnées d'un point de l'enveloppe des conjuguées du cercle imaginaire

$$(x - a - a'\sqrt{-1})^2 + (y - b - b'\sqrt{-1})^2 = (r + r'\sqrt{-1})^2.$$

Si l'on pose

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1},$$

il en résultera

$$(1) \qquad (\alpha - a)^2 - (\beta - a')^2 + (\alpha' - b)^2 - (\beta' - b')^2 = r^2 - r'^2$$

et

$$(2) \qquad (\alpha - a)(\beta - a') + (\alpha' - b)(\beta' - b') = rr',$$

et, pour exprimer que le point $[x, y]$ appartient à l'enveloppe, c'est-à-dire que $\frac{dy}{dx}$ est réel en ce point,

$$(3) \qquad \frac{\alpha - a}{\alpha' - b} = \frac{\beta - a'}{\beta' - b'}.$$

Mais ces trois équations n'entreront pas dans le calcul aux mêmes titres : les deux premières expriment simplement que le point

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$
$$y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1},$$

appartient au lieu considéré; on pourra donc les différentier une et deux fois pour passer du point $[x, y]$ aux points voisins de la conjuguée qui passe en ce point; tandis que l'équation (3) exprimant en outre que le point $[x, y]$ appartient à l'enveloppe, ne convient qu'au point de départ.

Ainsi en désignant par x_1, y_1 les coordonnées réalisées d'un point quelconque de la conjuguée qui touche l'enveloppe imaginaire au point $[x, y]$, on pourra poser

$$x_1 = \alpha + \beta,$$
$$y_1 = \alpha' + \beta',$$

et les dérivées de y_1 par rapport à x_1 résulteront indirectement des équations dérivées des équations (1) et (2) et d'une condition particulière qui exprimera que le point $[x_1, y_1]$ se déplace sur la même conjuguée.

On aura en effet pour déterminer $\frac{dy_1}{dx_1}$ et $\frac{d^2y_1}{dx_1^2}$ les formules

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{d\alpha' + d\beta'}{d\alpha + d\beta} = \frac{\frac{d\alpha'}{d\alpha} + \frac{d\beta'}{d\alpha}}{1 + \frac{d\beta}{d\alpha}}$$

et

$$\frac{d^2y_1}{dx_1^2} = \frac{d \cdot \dfrac{\frac{d\alpha'}{d\alpha} + \frac{d\beta'}{d\alpha}}{1 + \frac{d\beta}{d\alpha}}}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dx_1} = \frac{d \cdot \dfrac{\frac{d\alpha'}{d\alpha} + \frac{d\beta'}{d\alpha}}{1 + \frac{d\beta}{d\alpha}}}{d\alpha} \cdot \frac{1}{1 + \frac{d\beta}{d\alpha}}$$

$$= \frac{\left(\frac{d^2\alpha'}{d\alpha^2} + \frac{d^2\beta'}{d\alpha^2}\right)\left(1 + \frac{d\beta}{d\alpha}\right) - \left(\frac{d\alpha'}{d\alpha} + \frac{d\beta'}{d\alpha}\right)\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}}{\left(1 + \frac{d\beta}{d\alpha}\right)^3}.$$

Ainsi il ne reste qu'à tirer, en fonction de α, β, α' et β', les valeurs de $\frac{d\alpha'}{d\alpha}$, $\frac{d\beta}{d\alpha}$, $\frac{d\beta'}{d\alpha}$, $\frac{d^2\alpha'}{d\alpha^2}$, $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}$, et $\frac{d^2\beta'}{d\alpha^2}$, au moyen d'abord des équations différentielles des équations (1) et (2) et de la condition complémentaire $\frac{\beta'}{\beta}$ égale constante.

141. Mais on peut simplifier le calcul en se servant d'une remarque bonne à consigner, du reste, parce qu'elle pourra être souvent utile.

Voici le fait : lorsqu'on s'éloigne, sur une conjuguée quelconque, du point où elle touche l'une des deux enveloppes, les parties imaginaires des coordonnées varient seules, lorsque ce point appartient à l'enveloppe réelle, tandis que, dans le cas contraire, ce sont les parties réelles qui varient; c'est-à-dire que dans le premier cas $\frac{d\alpha}{d\beta}$ et $\frac{d\alpha'}{d\beta}$ ont pour limites o, tandis que $\frac{d\beta'}{d\beta}$ a pour valeur la caractéristique de la conjuguée, ou le coefficient angulaire de la tangente à l'enveloppe réelle au point considéré; et que dans le second cas, $\frac{d\beta}{d\alpha}$ et $\frac{d\beta'}{d\alpha}$ ont pour limites o, tandis que $\frac{d\alpha'}{d\alpha}$ a pour valeur le coefficient angulaire de la tangente à l'enveloppe imaginaire au point considéré.

En effet, dans le premier cas, où le point considéré appartient à l'enveloppe réelle, si l'on regarde la caractéristique C comme une fonction de α et de β, on pourra poser

$$dC = \frac{dC}{d\alpha}d\alpha + \frac{dC}{d\beta}d\beta.$$

Or la dérivée partielle $\frac{dC}{d\beta}$, prise en un point de l'enveloppe réelle, est toujours identiquement nulle; car si β varie seul, pour que $\frac{dy}{dx}$, qui peut alors se mettre sous la forme $\frac{d\alpha' + d\beta'\sqrt{-1}}{d\beta\sqrt{-1}}$, ait la valeur C, il faut que $d\alpha' = 0$, et que $d\beta' = Cd\beta$; de sorte que

$$C + dC = \frac{d\beta'}{d\beta} = C$$

et que par suite la dérivée partielle $\frac{dC}{d\beta}$ est identiquement nulle; d'un autre côté, la dérivée partielle $\frac{dC}{d\alpha}$ ne se trouve nulle qu'en des points singuliers du lieu, sa valeur est habituellement donnée par celle de $\frac{d^2y}{dx^2}$ prise au point considéré de la courbe réelle.

Dans le cas donc où nous raisonnons,

$$dC = \frac{d^2y}{dx^2}\,d\alpha:$$

pour que dC soit nul, c'est-à-dire pour que le point $[x, y]$ soit resté sur la même conjuguée, il faut donc que $d\alpha$ soit nul, et alors $d\alpha'$, comme on l'a déjà dit, est nul aussi.

Dans le second cas, où le point considéré appartient à l'enveloppe imaginaire, il suffit d'observer que si

$$dx = d\alpha + d\beta\sqrt{-1}$$

et que p désigne la valeur réelle de $\frac{dy}{dx}$ au point considéré, la valeur de dy sera

$$dy = p d\alpha + p d\beta\sqrt{-1},$$

de sorte que $\frac{d\beta'}{d\beta}$ ayant d'une part la valeur p, et devant de l'autre être égal à C, la conciliation n'est possible qu'en faisant $d\beta$ et $d\beta'$ nuls, c'est-à-dire

$$\frac{d\beta'}{d\beta} = \frac{\frac{d\beta'}{d\alpha}}{\frac{d\beta}{d\alpha}} = \frac{0}{0},$$

à moins que p ne soit égal à C, ce qui n'arrive qu'en des points particuliers de l'enveloppe imaginaire.

142. Dans le cas qui nous occupe, du cercle imaginaire, p est toujours différent de C; car la valeur de p, au point M de l'enveloppe (*fig.* 9), est le coefficient angulaire réel de la tangente à cette enveloppe, en ce point, tandis que la caractéristique du point M est le coefficient angulaire de ON'. Ainsi dans le calcul que nous nous proposons de faire, $\frac{d\beta}{d\alpha}$ et $\frac{d\beta'}{d\alpha}$ devront être faits nuls.

Cela posé, nous pourrons, pour simplifier les calculs, réduire notre recherche à ce qui concerne la conjuguée $C = 0$; cette hypothèse ne constitue pas un cas particulier, puisque les axes sont quelconques.

Dans ce cas, β' restant constamment nul, $\frac{d^2\beta'}{d\alpha^2}$ sera nul aussi et les valeurs de $\frac{dy_1}{dx_1}$ et de $\frac{d^2y_1}{dx_1^2}$ se réduiront à

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{d\alpha'}{d\alpha},$$

$$\frac{d^2y_1}{dx_1^2} = \frac{d^2\alpha'}{d\alpha^2} - \frac{d\alpha'}{d\alpha}\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}.$$

Les équations (1) et (2) différentiées une fois, par rapport à α, en tenant compte des conditions

$$\beta' = 0, \quad \frac{d\beta}{d\alpha} = 0, \quad \frac{d\beta'}{d\alpha} = 0,$$

donnent

$$\alpha - a + (\alpha' - b)\frac{d\alpha'}{d\alpha} = 0$$

et

$$(\beta - a') - b'\frac{d\alpha'}{da} = 0;$$

mais ces deux relations se réduisent à une seule

$$\frac{d\alpha'}{da} = -\frac{\alpha - a}{\alpha' - b},$$

en vertu de la condition (3)

$$\frac{\alpha - a}{\alpha' - b} = \frac{\beta - a'}{\beta' - b'},$$

qui se réduit ici à

$$-\frac{\alpha - a}{\alpha' - b} = \frac{\beta - a'}{b'}.$$

Les mêmes équations (1) et (2) différentiées deux fois, par rapport à α, en tenant compte des conditions

$$\beta' = 0, \quad \frac{d\beta}{d\alpha} = 0, \quad \frac{d\beta'}{d\alpha} = 0, \quad \frac{d^2\beta'}{d\alpha^2} = 0,$$

donnent

$$1 + \left(\frac{d\alpha'}{d\alpha}\right)^2 + (\alpha' - b)\frac{d^2\alpha'}{d\alpha^2} - (\beta - a')\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = 0$$

et

$$- b'\frac{d^2\alpha'}{d\alpha^2} + (\alpha - a)\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = 0;$$

on en tire

$$\frac{d^2\alpha'}{d\alpha^2} = - \frac{(\alpha - a)\left[1 + \left(\frac{d\alpha'}{d\alpha}\right)^2\right]}{(\alpha' - b)(\alpha - a) - b'(\beta - a')}$$

et

$$\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = \frac{- b'\left[1 + \left(\frac{d\alpha'}{d\alpha}\right)^2\right]}{(\alpha' - b)(\alpha - a) - b'(\beta - a')},$$

ou bien

$$\frac{d^2\alpha'}{d\alpha^2} = \frac{-(\alpha - a)[(\alpha - a)^2 + (\alpha' - b)^2]}{(\alpha' - b)^2[(\alpha' - b)(\alpha - a) - b'(\beta - a')]}$$

et

$$\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = \frac{- b'[(\alpha - a)^2 + (\alpha' - b)^2]}{(\alpha' - b)^2[(\alpha' - b)(\alpha - a) - b'(\beta - a')]};$$

ou, en remplaçant $\beta - a'$ par sa valeur tirée de l'équation (3) réduite à $\frac{\alpha - a}{\alpha' - b} = - \frac{\beta - a'}{b'}$,

$$\frac{d^2\alpha'}{d\alpha^2} = \frac{-[(\alpha - a)^2 + (\alpha' - b)^2]}{(\alpha' - b)[(\alpha' - b)^2 + b'^2]}.$$

et

$$\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = \frac{- b'[(\alpha - a)^2 + (\alpha' - b)^2]}{(\alpha' - b)(\alpha - a)[(\alpha' - b)^2 + b'^2]}$$

Il en résulte d'abord

$$\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\frac{d\alpha'}{d\alpha} = \frac{b'[(\alpha - a)^2 + (\alpha' - b)^2]}{(\alpha' - b)^2[(\alpha' - b)^2 + b')]},$$

et, par suite,

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{\alpha - a}{\alpha' - b}$$

et

$$\frac{d^2 y_1}{dx_1^2} = -\frac{(\alpha - a)^2 + (\alpha' - b)^2}{(\alpha' - b)^2[(\alpha' - b)^2 + b'^2]}[(\alpha' - b) + b'].$$

Cela posé, il ne reste plus qu'à obtenir $\alpha - a$ et $\alpha' - b$, on les tirerait des équations (1), (2) et (3) après y avoir fait $\beta' = 0$ et avoir éliminé entre elles $\beta - a'$.

Mais on a vu plus haut que ces équations donnent

$$(\alpha - a)^2 + (\alpha' - b)^2 = r^2$$

et

$$(\beta - a')^2 + (\beta' - b')^2 = r'^2.$$

Il suffira donc de faire dans celles-ci $\beta' = 0$ et d'y remplacer $\beta - a'$ par $-b'\frac{\alpha - a}{\alpha' - b}$.

On en tire alors

$$\alpha' - b = \pm\frac{rb'}{r'}$$

et

$$(\alpha - a) = \pm\frac{r}{r'}\sqrt{r'^2 - b'^2}.$$

En substituant dans les expressions de $\frac{dy_1}{dx_1}$ et de $\frac{d^2y_1}{dx_1^2}$, il vient

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \pm\frac{\sqrt{r'^2 - b'^2}}{b'}$$

et

$$\frac{d^2y_1}{dx_1^2} = -\frac{r^2}{\frac{r^2b'^2}{r'^2}\left(\frac{r^2b'^2}{r'^2} + b'^2\right)}\left(b' \pm \frac{rb'}{r'}\right) = -\frac{r'^3(r' \pm r)}{b'^3(r^2 + r'^2)}.$$

Par conséquent le rayon de courbure cherché serait

$$\mathrm{R} = \pm\frac{\left(1 + \frac{r'^2 - b'^2}{b'^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{r'^3(r' \pm r)}{b'^3(r^2 + r'^2)}} = \pm\left(\frac{r^2 + r'^2}{r' \pm r}\right).$$

143. Mais il est impossible d'admettre concurremment pour R^2 les deux valeurs qu'on vient de trouver. En effet, chaque conjuguée qui touche l'enveloppe la touche bien en deux points, mais ce ne pourrait être, en tous cas, à cette circonstance que fût due l'ambiguïté qui affecte R^2, puisque la conjuguée ayant pour axe de symétrie un diamètre de l'enveloppe elle-même, les deux points de contact doivent être symétriques l'un de l'autre et la conjuguée doit y avoir même courbure.

L'ambiguïté du double signe qui se trouve dans la valeur de R^2 tient à une autre cause. Si l'on reprend les équations (1), (2), (3) :

$$(1)\qquad (\alpha - a)^2 - (\beta - a')^2 + (\alpha' - b)^2 - (\beta' - b')^2 = r^2 - r'^2,$$

$$(2)\qquad (\alpha - a)(\beta - a') + (\alpha' - b)(\beta' - b') = rr'$$

et

$$(3)\qquad \frac{\alpha - a}{\alpha' - b} = \frac{\beta - a'}{\beta' - b'},$$

on voit que les deux dernières seules établissent de certaines dépendances entre les signes des quantités $\alpha - a$, $\alpha' - b$, $\beta - a'$ et $\beta' - b'$. Or l'équation (3) montre que les produits

$$(\alpha - a)(\beta - a') \quad \text{et} \quad (\alpha' - b)(\beta' - b')$$

sont toujours de même signe, et l'équation (2) ensuite exige qu'ils aient le signe de rr'.

Dans le cas donc où r et r' auront le même signe, $\alpha' - b$ et $\beta' - b'$ devront aussi être de même signe, et par conséquent si l'on a supposé que β' fût nul, ce qui aura réduit $\beta' - b'$ à $-b'$, bien qu'on ait trouvé pour $\alpha' - b$ la valeur

$$\alpha' - b = \pm \frac{rb'}{r'},$$

on ne devra prendre que la valeur

$$\alpha' - b = -\frac{rb'}{r'},$$

et si r et r' sont de signes contraires, $\alpha' - b$ et $\beta' - b'$ devant être aussi de signes contraires, on devra prendre encore

$$\alpha' - b = -\frac{rb'}{r'}.$$

Ainsi $\alpha' - b$ ne doit jamais recevoir que la seule valeur

$$\alpha' - b = -\frac{rb'}{r'},$$

d'où il résulte que R^2 en réalité se réduit à

$$R^2 = \left(\frac{r^2 + r'^2}{r - r'}\right)^2.$$

144. Quant au centre de courbure, il se trouve naturellement sur la normale à l'enveloppe, mais rien, dans ce qui précède, ne prouve qu'il doive être plutôt d'un côté que de l'autre du point de contact.

Pour trancher la question, il faut calculer l'une au moins des coordonnées de ce centre. Nous allons en déterminer l'y.

L'ordonnée réalisée du centre de courbure est

$$y_1 + \frac{1 + \left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2}{\frac{d^2 y_1}{dx_1^2}}.$$

Or les formules précédentes donnent

$$\frac{1 + \left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2}{\frac{d^2 y_1}{dx_1^2}} = -\frac{b'(r^2 + r'^2)}{r'(r' - r)};$$

quant à y_1, qui se réduit à α', puisque β' est nul, sa valeur est fournie par l'équation

$$\alpha' - b = -\frac{rb'}{r'},$$

qui donne

$$y_1 = \alpha' = \frac{br' - rb'}{r'}.$$

Cela posé, il s'agit de savoir si le centre de courbure de la conjuguée du cercle imaginaire au point où elle touche son enveloppe est, par rapport à ce point, du même côté que le centre de courbure de l'enveloppe ou du côté opposé : cela se réduit à savoir si les différences des ordonnées du point de l'enveloppe et des deux centres sont de même signe ou de signes contraires, c'est-à-dire si

$$y_1 + \frac{1 + \left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2}{\frac{d^2y_1}{dx_1^2}} - y_1$$

et

$$b + b' - y_1$$

sont de même signe ou de signes contraires. Or ces différences se réduisent à

$$-\frac{b'(r^2 + r'^2)}{r'(r' - r)} \quad \text{et} \quad \frac{b'(r' + r)}{r'}$$

dont le quotient est

$$\frac{r^2 + r'^2}{r^2 - r'^2};$$

de sorte que selon que $r^2 - r'^2$ sera positif ou négatif, le centre de courbure de la conjuguée sera, par rapport au point où elle touche l'enveloppe, du même côté que le centre de courbure de cette enveloppe ou du côté opposé.

145. Tous les calculs qui précèdent se rapportaient à la conjuguée $C = 0$ du cercle imaginaire

$$(x - a - a'\sqrt{-1})^2 + (y - b - b'\sqrt{-1})^2 = (r + r'\sqrt{-1})^2,$$

mais les résultats auxquels on est parvenu ne contenant aucune des constantes a, a', b, b' qui seules pourraient changer lorsqu'on changerait les axes, ces résultats conviennent à une conjuguée quelconque.

La forme circulaire de l'enveloppe pouvait permettre de présumer cette permanence dans les résultats, et c'est du reste ce qui a engagé à les chercher.

146. On pourra toujours, quand on le voudra, déterminer le centre et le rayon de courbure d'une conjuguée C d'un lieu

$$f(x, y) = 0$$

en un de ses points, au moyen des parties réelles et imaginaires des coordonnées

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$
$$y = \alpha' + \beta C\sqrt{-1}$$

de ce point et des éléments a, b, a', b', r, r' du cercle osculateur au lieu en ce point.

L'équation en coordonnées réelles de la conjuguée C du cercle osculateur

$$(x - a - a'\sqrt{-1})^2 + (y - b - b'\sqrt{-1})^2 = (r + r'\sqrt{-1})^2$$

sera en effet fournie par le système

$$x = \alpha + \beta, \quad y = \alpha' + \beta C,$$
$$(\alpha - a)^2 - (\beta - a')^2 + (\alpha' - b)^2 - (\beta C - b')^2 = r^2 - r'^2,$$
$$(\alpha - a)(\beta - a')^2 + (\alpha' - b)(\beta C - b') = rr',$$

qui permettra d'obtenir $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ au moyen de $\frac{d\beta}{d\alpha}$, $\frac{d\alpha'}{d\alpha}$, $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}$ et $\frac{d^2\alpha'}{d\alpha^2}$ qu'on pourra exprimer d'autre part en fonction de α, α' et β.

Ainsi la solution pratique de la question ne sera jamais difficile à obtenir. Mais il est clair qu'une pareille solution, capable seulement de fournir les valeurs numériques des résultats dans chaque cas, ne saurait conduire à la constatation d'aucune loi.

La courbure d'une courbe en un de ses points est un angle : si la courbe est imaginairement représentée, sa courbure doit l'être aussi, sans quoi toute comparaison, tout rapprochement deviennent impossibles.

La théorie des courbures des courbes imaginaires nécessite donc l'introduction d'angles imaginaires.