JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Nouveaux théorèmes concernant les fonctions N (n, p, q) et d'autres fonctions qui s'y rattachent

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 6 (1861), p. 369-376.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1861_2_6__369_0>

NOUVEAUX THÉORÈMES

CONCERNANT

LES FONCTIONS $N(n, p, q)$ ET D'AUTRES FONCTIONS QUI S'Y RATTACHENT;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Je désigne par $N(n, p, q)$ le nombre des décompositions d'un entier donné n en p carrés dont les q premiers sont impairs et à racines positives, tandis que les $(p-q)$ derniers sont pairs et à racines indifféremment positives, nulles ou négatives. Cette notation a déjà été employée dans le cahier de juillet, où j'ai communiqué deux théorèmes en prenant pour n un nombre impairement pair. Ici au contraire je supposerai n pairement pair, savoir

$$n = 2^{\alpha+2} m,$$

m étant impair et α pouvant se réduire à zéro, mais n'étant jamais négatif. Il y a pour ces nombres pairement pairs deux théorèmes tout à fait analogues à ceux que j'ai donnés pour les nombres impairement pairs : on y verra figurer de nouveau les fonctions $\zeta_\mu(m)$, $\rho_\mu(m)$ que je définis, comme on sait, par les équations

$$\zeta_\mu(m) = \sum d^\mu, \quad \rho_\mu(m) = \sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} d^\mu,$$

dans lesquelles le signe sommatoire porte sur les groupes de diviseurs conjugués d, δ du nombre $m = d\delta$.

Théorème I. — « Soit ν un entier donné > 0 : je dis qu'il existe » des constantes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{\nu-1}$ telles, que l'on puisse poser, pour » tout entier impair m et pour tout entier α positif ou nul, l'équation

$$2^{(2\nu+1)\alpha}\zeta_{2\nu+1}(m) = \sum a_s \mathrm{N}(2^{\alpha+2}m,\ 4\nu+4,\ 4s+4),$$

» le signe $\sum$ portant sur s dont les valeurs sont $0, 1, 2, \ldots, \nu-1$. »

Les coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{\nu-1}$ sont constants en ce sens qu'ils ne dépendent ni de m, ni de α; mais ils changent quand ν change. Cependant on a toujours $a_0 = 1$. On a aussi $a_{\nu-1} = 16^{\nu-1}$, et en général

$$a_{\nu-s-1} = 16^{\nu-2s-1}a_s.$$

Au reste les coefficients a_s se déterminent aisément, pour chaque valeur donnée de ν, au moyen des plus petites valeurs de $2^{\alpha+2}m$.

Pour la plus petite valeur de ν, c'est-à-dire pour $\nu = 1$, on a

$$2^{3\alpha}\zeta_3(m) = \mathrm{N}(2^{\alpha+2}m,\ 8,\ 4).$$

Pour $\nu = 2$, il vient

$$2^{5\alpha}\zeta_5(m) = \mathrm{N}(2^{\alpha+2}m,\ 12,\ 4) + 16\mathrm{N}(2^{\alpha+2}m,\ 12,\ 8).$$

Pour $\nu = 3$, je trouve

$$2^{7\alpha}\zeta_7(m) = \mathrm{N}(2^{\alpha+2}m,\ 16,\ 4) + 104\mathrm{N}(2^{\alpha+2}m,\ 16,\ 8) + 256\mathrm{N}(2^{\alpha+2}m,\ 16,\ 12).$$

Et ainsi de suite. On voit que ces équations ne commencent qu'à $\zeta_3(m)$: il n'y en a pas cette fois pour $\zeta_1(m)$.

Théorème II. — « Soit ν un entier donné > 0 : je dis qu'il existe » des constantes $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{\nu-1}$ telles, que l'on puisse poser, pour » tout entier impair m et pour tout entier α positif ou nul, l'équation

$$2^{2\alpha\nu}\rho_{2\nu}(m) = \sum b_s \mathrm{N}(2^{\alpha+2}m,\ 4\nu+2,\ 4s+4),$$

» le signe $\sum$ portant sur s dont les valeurs sont $0, 1, 2, \ldots, \nu - 1$. »

Les coefficients b_s sont constants en ce sens qu'ils ne dépendent ni de m, ni de α; mais ils changent quand ν change : cependant on a toujours $b_0 = 1$. Au reste ces coefficients b_s se déterminent facilement, pour chaque valeur donnée de ν, au moyen des plus petites valeurs de $2^{\alpha+2} m$.

Pour $\nu = 1$, on a

$$2^{2\alpha} \rho_2(m) = \mathrm{N}(2^{\alpha+2} m, 6, 4).$$

Pour $\nu = 2$, il vient

$$2^{4\alpha} \rho_4(m) = \mathrm{N}(2^{\alpha+2} m, 10, 4) + 4\mathrm{N}(2^{\alpha+2} m, 10, 8).$$

Pour $\nu = 3$, je trouve

$$2^{6\alpha} \rho_6(m) = \mathrm{N}(2^{\alpha+2} m, 14, 4) + 44\mathrm{N}(2^{\alpha+2} m, 14, 8) + 16\mathrm{N}(2^{\alpha+2} m, 14, 12).$$

Et ainsi de suite. On voit qu'on ne commence qu'à $\rho_2(m)$, et qu'il n'y a pas d'équation relative à $\rho(m)$.

2. Nous réservons pour un autre moment les applications qu'on peut faire de ces formules, déjà très-curieuses par elles-mêmes. Mais il nous est impossible de ne pas indiquer ici quelques conséquences qu'on en déduit immédiatement en les comparant entre elles pour diverses valeurs de α, ou bien en les comparant à celles qu'on a données dans le cahier de juillet au sujet des nombres impairement pairs. Il suffira en effet d'éliminer les fonctions ζ ou les fonctions ρ pour avoir des relations simples (et partant dignes d'intérêt) entre les seules fonctions N.

Prenez, par exemple, dans le cahier de juillet, l'équation

$$\zeta_5(m) = \mathrm{N}(2m, 12, 2) + 224\mathrm{N}(2m, 12, 6) + 256\mathrm{N}(2m, 12, 10)$$

et rapprochez-la de l'équation

$$2^{5\alpha}\zeta_8(m) = \mathrm{N}(2^{\alpha+2}m, 12, 4) + 16\mathrm{N}(2^{\alpha+2}m, 12, 8):$$

vous en conclurez que, quels que soient m et α, les deux quantités

$$\mathrm{N}(2^{\alpha+2}m, 12, 4) + 16\mathrm{N}(2^{\alpha+2}m, 12, 8)$$

et

$$2^{5\alpha}[\mathrm{N}(2m, 12, 2) + 224\mathrm{N}(2m, 12, 6) + 256\mathrm{N}(2m, 12, 10)]$$

sont égales entre elles.

De même on n'a qu'à comparer les équations

$$\rho_4(m) = \mathrm{N}(2m, 10, 2) + 64\mathrm{N}(2m, 10, 6)$$

et

$$2^{4\alpha}\rho_4(m) = \mathrm{N}(2^{\alpha+2}m, 10, 4) + 4\mathrm{N}(2^{\alpha+2}m, 10, 8),$$

pour en conclure que les deux expressions

$$\mathrm{N}(2^{\alpha+2}m, 10, 4) + 4\mathrm{N}(2^{\alpha+2}m, 10, 8)$$

et

$$2^{4\alpha}[\mathrm{N}(2m, 10, 2) + 64\mathrm{N}(2m, 10, 6)$$

sont toujours égales.

On nous dispensera d'écrire sous leur forme générale les équations auxquelles ces considérations conduisent.

3. Nous avons désigné par $\mathrm{N}(n, p, q)$ le nombre total des solutions tant propres qu'impropres de l'équation

$$n = i_1^2 + \ldots + i_q^2 + \varpi_1^2 + \ldots + \varpi_{p-q}^2,$$

où (nous le répétons) les entiers i sont impairs et positifs, tandis que les entiers ϖ sont pairs et indifféremment positifs, nuls ou négatifs. On pourrait aussi considérer à part le nombre des solutions propres, c'est-à-dire des solutions pour lesquelles aucun entier > 1 ne divise à la fois $i_1, \ldots, i_q, \varpi_1, \ldots, \varpi_{p-q}$. Désignons ce nombre par

$$M(n, p, q),$$

et nous aurons pour la fonction M des théorèmes tout à fait analogues à ceux que nous venons de donner pour la fonction N. Il n'y a qu'à substituer dans nos formules aux fonctions $\zeta_\mu(m)$, $\rho_\mu(m)$ d'autres fonctions que je vais définir et dont l'une du reste s'est déjà dans le temps présentée à nous.

Soit P un quelconque des diviseurs premiers de l'entier impair donné m, et r son exposant dans m de façon qu'on puisse écrire, d'après une notation connue,

$$m = \prod (P^r),$$

puis faisons

$$Z_\mu(m) = \prod [P^{r\mu} + P^{(r-1)\mu}]$$

et

$$R_\mu(m) = \prod \left[P^{r\mu} + (-1)^{\frac{P-1}{2}} P^{(r-1)\mu}\right].$$

C'est la fonction

$$Z_\mu(m)$$

qui devra remplacer

$$\zeta_\mu(m),$$

et la fonction

$$R_\mu(m)$$

remplacera

$$\rho_\mu(m).$$

On aura donc

$$Z_{2\nu-1}(m) = \sum A_s M(2m, 4\nu, 4s+2),$$

le signe sommatoire portant sur s dont les valeurs successives sont 0, $1, 2, \ldots, \nu - 1$, et les coefficients A_s étant, pour chaque valeur du nombre entier positif ν, les mêmes que dans la formule

$$\zeta_{2\nu-1}(m) = \sum A_s N(2m, 4\nu, 4s+2)$$

du cahier de juillet.

Avec les coefficients B_s de la formule

$$\rho_{2\nu}(m) = \sum B_s N(2m, 4\nu+2, 4s+2),$$

on aura semblablement

$$R_{2\nu}(m) = \sum B_s M(2m, 4\nu+2, 4s+2):$$

ici on peut avoir $\nu = 0$, et les valeurs de s sont $0, 1, 2, 3, \ldots, \nu-1, \nu$; mais $B_\nu = 0$ dès que ν est > 0.

Aux formules nouvelles données dans le présent article pour les fonctions N répondront de même des formules concernant les fonctions M où figureront les coefficients a_s, b_s.

Ainsi l'on aura

$$2^{(2\nu+1)\alpha} Z_{2\nu+1}(m) = \sum a_s M(2^{\alpha+2}m, 4\nu+4, 4s+4):$$

l'entier ν est > 0; le signe sommatoire porte sur s dont les valeurs successives sont $0, 1, 2, \ldots, \nu-1$.

On aura pareillement

$$2^{2\alpha\nu} R_{2\nu}(m) = \sum b_s M(2^{\alpha+2}m, 4\nu+2, 4s+4)$$

avec les mêmes conditions pour ν et s.

Restent les équations entre les seules fonctions N. Celles-là, bien évidemment, s'appliqueront d'elles-mêmes aux fonctions M sans qu'on ait rien à y changer.

Ainsi, par exemple, de l'égalité des deux quantités

$$N(2^{\alpha+2}m, 12, 4) + 16N(2^{\alpha+2}m, 12, 8)$$

et

$$2^{5\alpha}[N(2m, 12, 2) + 224N(2m, 12, 6) + 256N(2m, 12, 10)],$$

on conclura que ces deux autres quantités

$$M(2^{\alpha+2}m, 12, 4) + 16M(2^{\alpha+2}m, 12, 8)$$

et

$$2^{5\alpha}[M(2m, 12, 2) + 224M(2m, 12, 6) + 256M(2m, 12, 10)$$

sont aussi égales.

Semblablement, de l'égalité des deux expressions

$$N(2^{\alpha+2}m, 10, 4) + 4N(2^{\alpha+2}m, 10, 8)$$

et

$$2^{4\alpha}[N(2m, 10, 2) + 64N(2m, 10, 6)],$$

on conclura que ces deux autres expressions

$$M(2^{\alpha+2}m, 10, 4) + 4m(2^{\alpha+2}m, 10, 8)$$

et

$$2^{4\alpha}[M(2m, 10, 2) + 64M(2m, 10, 6)]$$

sont égales entre elles.

4. Il ne sera pas inutile, en terminant, de rappeler comment les fonctions $Z_\mu(m)$ sont liées aux fonctions $\zeta_\mu(m)$; car les fonctions $R_\mu(m)$ sont liées de la même manière aux fonctions $\rho_\mu(m)$. Considérons spécialement, parmi les diviseurs de m, ceux qui s'expriment par un carré D^2. L'unité est toujours un tel diviseur, mais il peut y en avoir d'autres. Or on a

$$\sum Z_\mu\left(\frac{m}{D^2}\right) = \zeta_\mu(m)$$

et

$$\sum R_\mu\left(\frac{m}{D^2}\right) = \rho_\mu(m),$$

le signe $\sum$ portant sur tous les diviseurs D^2. J'ajouterai que l'on a pareillement

$$\sum M\left(\frac{2m}{D^2}, p, q\right) = N(2m, p, q).$$

On a même encore

$$\sum M\left(\frac{2^{\alpha+2}m}{D^2}, p, q\right) = N(2^{\alpha+2}m, p, q),$$

mais cette dernière fois sous la condition essentielle de $q > 0$.