JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

V. PUISEUX

Note sur une formule propre à faciliter le développement de la fonction perturbatrice

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 6 (1861), p. 366-368.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1861_2_6__366_0>

NOTE

SUR UNE

FORMULE PROPRE A FACILITER LE DÉVELOPPEMENT DE LA FONCTION PERTURBATRICE;

PAR M. V. PUISEUX.

La fonction perturbatrice correspondante à l'action mutuelle de deux planètes se compose de deux parties dont la plus importante a pour dénominateur la distance mutuelle des deux astres. Quand on développe cette fonction à la manière ordinaire, chaque terme provenant de la partie principale renferme les demi grands axes a et a' des deux orbites dans un facteur de la forme

$$a^p a'^{p'} \frac{d^{p+p'}\left(a^k a'^k \mathrm{B}^{(i)}_{k+\frac{1}{2}}\right)}{da^p\, da'^{p'}},$$

où la quantité $\mathrm{B}^{(i)}_{k+\frac{1}{2}}$ est définie par l'équation

$$(a^2+a'^2-2aa'\cos\theta)^{-k-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\mathrm{B}^{(0)}_{k+\frac{1}{2}}+\mathrm{B}^{(1)}_{k+\frac{1}{2}}\cos\theta+\mathrm{B}^{(2)}_{k+\frac{1}{2}}\cos 2\theta+\ldots.$$

Le facteur dont on vient de parler peut être regardé comme une fonction homogène, du degré -1, des deux variables a et a'. Pour faciliter les réductions, il convient de l'exprimer au moyen d'une fonction d'une seule variable et de ses dérivées successives. Pour cela on pose (a' désignant la plus petite des deux quantités a, a')

$$\frac{a'}{a}=\alpha,$$

$$(1+\alpha^2-2\alpha\cos\theta)^{-k-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}b^{(0)}_{k+\frac{1}{2}}+b^{(1)}_{k+\frac{1}{2}}\cos\theta+b^{(2)}_{k+\frac{1}{2}}\cos2\theta+\ldots,$$

en sorte que $b^{(i)}_{k+\frac{1}{2}}$ soit une fonction de la seule variable α.

On a alors la relation

$$a^k a'^k \mathrm{B}^{(i)}_{k+\frac{1}{2}}=\frac{1}{a}\alpha^k b^{(i)}_{k+\frac{1}{2}};$$

en la différentiant successivement, on en déduit de proche en proche les valeurs des diverses dérivées partielles $\dfrac{d^{p+p'}\left(a^k a'^k \mathrm{B}^{(i)}_{k+\frac{1}{2}}\right)}{da^p\,da'^{p'}}$ en fonction de $b^{(i)}_{k+\frac{1}{2}}$, $\dfrac{db^{(i)}_{k+\frac{1}{2}}}{d\alpha}$, $\dfrac{d^2b^{(i)}_{k+\frac{1}{2}}}{d\alpha^2}$, etc. Mais on peut aussi former directement l'expression de chacune de ces dérivées à l'aide d'une formule qu'il me paraît utile de signaler. Cette formule peut s'écrire

$$a^p a'^{p'}\frac{d^{p+p'}\left(a^k a'^k \mathrm{B}^{(i)}_{k+\frac{1}{2}}\right)}{da^p\,da'^{p'}}$$

$$=\frac{(-1)^p\alpha^k}{a}\times\left\{\begin{array}{l}\alpha^{p+p'}\dfrac{d^{p+p'}b^{(i)}_{k+\frac{1}{2}}}{d\alpha^{p+p'}}+\dfrac{p+k}{1}(p+p')\,\alpha^{p+p'-1}\dfrac{d^{p+p'-1}b^{(i)}_{k+\frac{1}{2}}}{d\alpha^{p+p'-1}}\\[2ex]+\dfrac{(p+k)(p+k-1)}{1.2}(p+p')(p+p'-1)\,\alpha^{p+p'-2}\dfrac{d^{p+p'-2}b^{(i)}_{k+\frac{1}{2}}}{d\alpha^{p+p'-2}}+\ldots\end{array}\right\}.$$

J'indiquerai encore à cette occasion l'équation suivante

$$a^p a'^{p'} \frac{d^{p+p'} \mathrm{B}^{(i)}_{k+\frac{1}{2}}}{da^p\, da'^{p'}}$$

$$= \frac{(-1)^p}{a^{2k+1}} \times \left\{ \begin{array}{l} \alpha^{p+p'} \dfrac{d^{p+p'} b^{(i)}_{k+\frac{1}{2}}}{d\alpha^{p+p'}} + \dfrac{p}{1}(p+p'+2k)\,\alpha^{p+p'-1} \dfrac{d^{p+p'-1} b^{(i)}_{k+\frac{1}{2}}}{d\alpha^{p+p'-1}} \\ + \dfrac{p(p-1)}{1.2}(p+p'+2k)(p+p'+2k-1)\,\alpha^{p+p'-2} \dfrac{d^{p+p'-2} b^{(i)}_{k+\frac{1}{2}}}{d\alpha^{p+p'-2}} + \ldots \end{array} \right\}.$$

Dans ces formules, les nombres entiers positifs p, p' peuvent se réduire à zéro; k peut être un nombre fractionnaire quelconque positif ou négatif. On les vérifiera aisément en supposant qu'elles soient vraies pour des valeurs de p et de p' respectivement inférieures à de certaines limites, et démontrant qu'elles subsistent encore lorsqu'on augmente l'une ou l'autre limite d'une unité.

Les deux équations précédentes sont comprises d'ailleurs dans une formule plus générale que je me dispense de transcrire ici et qui sert à exprimer en fonction de α, u, $\frac{du}{d\alpha}$, $\frac{d^2 u}{d\alpha^2}$, etc., la quantité

$$a^{p-q} a'^{p'-q'} \frac{d^{p+p'}(a^q a'^{q'} u)}{da^p\, da'^{p'}},$$

où u désigne une fonction quelconque du rapport $\alpha = \frac{a}{a'}$, les nombres q, q' pouvant être entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs