JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

BESGE

Extrait d'une Lettre de M. Besge à M. Liouville

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 6 (1861), p. 239-240.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1861_2_6__239_0>

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. BESGE A M. LIOUVILLE.

« Soient A et a deux entiers impairs, a premier absolu, A premier à a et diviseur de $t^2 + a$. On sait qu'on pourra poser

$$A^\mu = x^2 + ay^2,$$

x et y étant des entiers premiers entre eux. Les valeurs de μ convenables sont en nombre infini ; mais je ne considère ici que la plus petite. Il arrivera souvent qu'elle soit paire, et elle le sera sans aucun doute si A est non résidu quadratique de a, ou encore si a est de la forme $4n+1$ et A de la forme $4n+3$. Or lorsque l'on a $\mu = 2\nu$, je dis que y est impair. En effet si l'on avait $y = 2^\alpha z$, l'équation

$$(A^\nu - x)(A^\nu + x) = 2^{2\alpha} a z^2,$$

où je prends x indifféremment positif ou négatif, se décomposerait de l'une des deux manières suivantes :

$$A^\nu - x = 2p^2, \qquad A^\nu + x = 2^{2\alpha-1} a q^2,$$

ou

$$A^\nu - x = 2ap^2, \qquad A^\nu + x = 2^{2\alpha-1} q^2,$$

de sorte qu'en ajoutant et divisant par 2, on trouverait

$$A^\nu = m^2 + an^2,$$

ν étant plus petit que μ, qu'on a supposé minimum.

» Puisque y est impair, x doit être pair, et dès lors les deux facteurs au premier membre de l'équation

$$(A^\nu - x)(A^\nu + x) = ay^2$$

sont impairs. Cette équation se décomposera donc en deux telles que celles-ci :

$$A^\nu - x = p^2, \qquad A^\nu + x = aq^2,$$

p^2 et aq^2 étant premiers entre eux. Dans les conditions où nous nous sommes placés, il vient donc

$$2A^\nu = p^2 + aq^2,$$

et il est aisé de voir que ν est à son tour un minimum, car s'il existait un exposant moindre, convenable à une telle équation, en élevant au carré et divisant par 4, on retrouverait pour une puissance de A, avec un exposant double de celui-là, partant $< \mu$, la forme $x^2 + ay^2$.

» L'exposant ν peut être pair ou impair; mais le premier cas reste seul possible quand $2A$ est non résidu quadratique de a, et le second quand 2 est non résidu. Ni l'un, ni l'autre ne pouvant avoir lieu quand 2 et $2A$ à la fois sont non résidus quadratiques de a, on voit qu'alors l'équation $\mu = 2\nu$ doit être impossible, en sorte que μ ne peut être qu'impair. Il en est évidemment de même quand a est de la forme $4n + 3$, ou quand, a étant de la forme $8n + 5$, A est de la forme $4n + 1$. J'ajoute que quand a est de la forme $4n + 1$ et A de la forme $4n + 3$, μ est pairement ou impairement pair suivant que $a \equiv 1$ ou 5 (mod. 8). »