JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

# Addition à la note sur certaines égalités entre des sommes qui dépendent de la fonction numérique E $(x)$, insérée dans le cahier d'août

*Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série*, tome 5 (1860), p. 455-456.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1860_2_5__455_0>

# ADDITION

## A LA NOTE SUR CERTAINES ÉGALITÉS ENTRE DES SOMMES QUI DÉPENDENT DE LA FONCTION NUMÉRIQUE $E(x)$, INSÉRÉE DANS LE CAHIER D'AOUT [*];

PAR M. J. LIOUVILLE.

Je veux ajouter une égalité nouvelle aux deux égalités que j'ai données dans la Note indiquée (*voir* p. 287 et 288). Celle dont je veux parler aujourd'hui est plus compliquée, mais toujours dépendante de la fonction $E(x)$ qui marque l'entier contenu dans $x$. Elle offrira un troisième exemple d'une suite de propositions qui touchent à la théorie des formes quadratiques. L'égalité dont il s'agit se rapporte en effet à la forme $x^2 + 3y^2$, comme les deux précédentes à la forme $x^2 + y^2$.

Au premier membre figurera la différence des deux sommes

$$\sum E\left(\frac{\alpha + r}{2r}\right), \quad \sum E\left(\frac{\alpha + s}{2s}\right):$$

$\alpha$ est une quantité positive donnée à volonté; les signes sommatoires portent sur $r$ et sur $s$ : on donne à $r$ les valeurs successives 1, 7, 13, etc., tirées de la formule $6\mu + 1$, et à $s$ les valeurs 5, 11, 17, etc., tirées de la formule $6\mu + 5$; dès qu'on dépasse $\alpha$, on ne trouve plus que des zéros, et les séries s'arrêtent d'elles-mêmes. Ceci expliqué, je fais

$$A = \sum E\left(\frac{\alpha + r}{2r}\right) - \sum E\left(\frac{\alpha + s}{2s}\right),$$

pour désigner le plus simplement possible la différence que j'ai en vue.

[*] Il y a une faute d'impression à corriger : page 288, ligne 15, au lieu de $m$, mettez $n$.

En second lieu, représentons par B et C les deux sommes respectives

$$\sum \mathrm{E}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\alpha-3\varpi^2}\right),\quad \sum \mathrm{E}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha-\varpi^2}{3}}\right),$$

où $\varpi$ prend les valeurs 2, 4, 6, 8, etc., formant la suite des nombres pairs en commençant à 2 et en s'arrêtant pour chaque somme au moment où le radical deviendrait imaginaire.

L'égalité que j'ai annoncée peut maintenant s'écrire :

$$\mathrm{A}=\mathrm{E}\left(\frac{1+\sqrt{\alpha}}{2}\right)+\mathrm{E}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{3}}\right)+2(\mathrm{B}+\mathrm{C})\ [*].$$

Soit, comme exemple, $\alpha=27$ : il viendra

$$\mathrm{A}=14+2+1+1+1-3-1-1-1,$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{A}=13.$$

D'un autre côté, on trouve, pour cette valeur de $\alpha$,

$$\mathrm{E}\left(\frac{1+\sqrt{\alpha}}{2}\right)=3,\quad \mathrm{E}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{3}}\right)=2$$

et

$$2(\mathrm{B}+\mathrm{C})=2(2+1+1)=8:$$

le total $3+2+8$ faisant 13, notre égalité est vérifiée.

---

[*] On remarquera que $\alpha$ est une quantité positive quelconque. Nous aurions pu attribuer cette même signification étendue aux lettres $m$ et $n$ dans nos deux anciennes égalités, au lieu de supposer que $m$ et $n$ désignent des entiers, l'un impair, l'autre quelconque. Mais alors au lieu de dire (page 287) que les valeurs de $s$ sont $1, 3, 5, 7, \ldots, m$, il aurait fallu dire de prendre $s=1, 3, 5, 7, \ldots$, sans dépasser $m$, la série s'arrêtant d'elle-même dès qu'on a $s>m$.