JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + y^2 + 4(z^2 + t^2)$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 5 (1860), p. 305-308.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1860_2_5__305_0>

SUR LA FORME

$x^2 + y^2 + 4(z^2 + t^2)$;

Par M. J. LIOUVILLE.

Il est clair que la forme

$$x^2 + y^2 + 4(z^2 + t^2)$$

ne peut pas représenter les nombres impairs $4k + 3$; mais elle représente tous les autres nombres, soit pairs, soit impairs, $2k$, $4k + 1$, et l'on peut fixer d'une manière précise le nombre N des représentations dans chaque cas. Ici, comme pour la forme

$$x^2 + y^2 + 4(z^2 + t^2),$$

dont nous nous sommes occupés dans le cahier de *juillet*, tout dépend des théorèmes de Jacobi concernant la représentation des nombres par une somme de quatre carrés. Voici les résultats qu'on obtient : je désigne à mon ordinaire par $\zeta_1(m)$ la somme des diviseurs de m.

1°. Pour un nombre impair m, on a, comme nous venons de le dire,

$$\mathrm{N} = 0,$$

quand m est de la forme $4k + 3$; mais

$$\mathrm{N} = 4\zeta_1(m),$$

quand m est de la forme $4k + 1$. Ainsi le nombre 5 a vingt-quatre représentations, qui sont contenues dans les six équations suivantes :

$$5 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 4(0^2 + 0^2),$$
$$5 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + 4(0^2 + 0^2),$$
$$5 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 4[(\pm 1)^2 + 0^2],$$
$$5 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 4[0^2 + (\pm 1)^2],$$
$$5 = 0^2 + (\pm 1)^2 + 4[(\pm 1)^2 + 0^2],$$
$$5 = 0^2 + (\pm 1)^2 + 4[0^2 + (\pm 1)^2],$$

dont chacune fournit quatre représentations.

2°. Pour le double $2m$ d'un nombre impair quelconque m, on a encore

$$N = 4\zeta_1(m).$$

Ainsi le nombre 6 a seize représentations, contenues dans ces deux égalités :

$$6 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 4[(\pm 1)^2 + 0^2],$$
$$6 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 4[0^2 + (\pm 1)^2].$$

3°. Pour le quadruple $4m$ d'un nombre impair quelconque m, on a

$$N = 8\zeta_1(m).$$

Ainsi le nombre 4 a huit représentations. Elles sont fournies par ces quatre équations :

$$4 = (\pm 2)^2 + 0^2 + 4(0^2 + 0^2),$$
$$4 = 0^2 + (\pm 2)^2 + 4(0^2 + 0^2),$$
$$4 = 0^2 + 0^2 + 4[(\pm 1)^2 + 0^2)],$$
$$4 = 0^2 + 0^2 + 4[(0^2 + (\pm 1)^2],$$

dont chacune donne deux représentations.

4°. Enfin pour tous les nombres divisibles par 8, c'est-à-dire exprimés par $2^\alpha m$, m étant impair et $\alpha > 2$, on a

$$N = 24\zeta_1(m).$$

Ainsi 8, 16, 32, etc., ont vingt-quatre représentations.

Pour chaque nombre donné n, N est le nombre des représentations tant propres qu'impropres dont n est susceptible; en d'autres termes, N est le nombre des solutions de l'équation indéterminée

$$n = x^2 + y^2 + 4(z^2 + t^2),$$

en prenant pour x, y, z, t des entiers positifs, nuls ou négatifs, absolument quelconques. Mais on peut aussi demander le nombre M des représentations propres, c'est-à-dire le nombre M des solutions que l'équation

$$n = x^2 + y^2 + 4(z^2 + t^2)$$

conserve quand on exclut celles où les quatre entiers x, y, z, t ont un diviseur commun > 1.

Il faut, pour exprimer M, remplacer $\zeta_1(m)$ par la fonction $Z_1(m)$, qui, pour chaque entier m décomposé en facteurs premiers,

$$m = a^\mu b^\nu \ldots c^\omega,$$

s'exprime par

$$Z_1(m) = (a^\mu + a^{\mu-1})(b^\nu + b^{\nu-1}) \ldots (c^\omega + c^{\omega-1}).$$

Les coefficients numériques varient d'ailleurs ainsi qu'il suit :

1°. Pour un nombre impair m, on a

$$M = 0,$$

ou

$$M = 4Z_1(m),$$

suivant que m est de la forme $4k + 3$ ou de la forme $4k + 1$.

2°. Pour le double $2m$ d'un entier impair quelconque m, on a

$$M = 4Z_1(m).$$

3°. Pour le quadruple $4m$ d'un entier impair m, on a

$$M = 8Z_1(m),$$

ou

$$M = 4Z_1(m),$$

suivant que m est de la forme $4k+3$ ou de la forme $4k+1$.

4°. Pour l'octuple $8m$ d'un nombre impair quelconque m, on a

$$M = 20Z_1(m).$$

5°. Pour $16m$, m étant un entier impair quelconque, on a

$$M = 16Z_1(m).$$

6°. Enfin pour tous les nombres divisibles par 32, on a

$$M = 0.$$