JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + y^2 + 3\left(z^2 + t^2\right)$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 5 (1860), p. 147-152.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1860_2_5__147_0>

SUR LA FORME

$$x^2 + y^2 + 3(z^2 + t^2);$$

PAR M. J. LIOUVILLE.

Que tout nombre entier n puisse être exprimé par la forme

$$x^2 + y^2 + 3(z^2 + t^2),$$

en prenant pour x, y, z, t des entiers, c'est ce qu'on peut établir, comme j'ai déjà l'occasion de le dire [*], par la méthode même que Lagrange a suivie pour la décomposition d'un nombre en quatre carrés. Mais je veux ici aller plus loin et fixer avec précision le nombre des représentations de tout entier donné n sous la forme indiquée, c'est-à-dire le nombre des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + 3(z^2 + t^2),$$

où les entiers x, y, z, t peuvent être indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

Je distinguerai deux cas, suivant que n est un entier impair ou bien est de la forme $2^\alpha m$, m étant impair et $\alpha > 0$.

Dans le premier cas, celui où n est un nombre impair, le nombre N des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + 3(z^2 + t^2)$$

s'obtient très-simplement; c'est le quadruple de la somme des diviseurs de n, ceux que 3 divise exceptés.

Ainsi pour $n = 1$, on a $N = 4$, et c'est ce que l'on voit *a priori* en

[*] *Voir* tome I (2e série), page 230.

observant que

$$1 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 3(0^2 + 0^2) = 0^2 + (\pm 1)^2 + 3(0^2 + 0^2).$$

Pour $n = 3$, les diviseurs de n sont 1 et 3, mais le diviseur 3 doit être exclu. Il vient donc encore $N = 4$. Et c'est bien ce que montre l'équation double

$$3 = 0^2 + 0^2 + 3[(\pm 1)^2 + 0^2] = 0^2 + 0^2 + 3[0^2 + (\pm 1)^2].$$

Soit encore $n = 5$. On aura $N = 24$. Les équations

$$5 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 3[0 + (\pm 1)^2] = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 3[(\pm 1)^2 + 0^2]$$

et

$$5 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 3(0^2 + 0^2) = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + 3(0^2 + 0^2)$$

confirment ce fait.

Quand on a

$$n = 2^\alpha m,$$

m étant impair et $\alpha > 0$, la règle pour trouver le nombre N des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + 3(z^2 + t^2)$$

est un peu plus compliquée. Il faut alors opérer sur le facteur impair m comme tout à l'heure sur n, c'est-à-dire chercher la somme des diviseurs de m, ceux que 3 divise exceptés. Soit S cette somme. Je trouve pour N la valeur générale que voici :

$$N = 4(2^{\alpha+1} - 3)S.$$

Pour $\alpha = 1$, $n = 2m$, on a donc

$$N = 4S;$$

pour $\alpha = 2$, $n = 4m$, on a

$$N = 20S;$$

pour $\alpha = 3$, $n = 8m$, on a

$$N = 52S;$$

pour $\alpha = 4$, $n = 16m$, on a

$$N = 116S;$$

pour $\alpha = 5$, $n = 32m$, on a

$$N = 244S;$$

et ainsi de suite.

Ajoutons quelques exemples, et d'abord soit $n = 2$, d'où $\alpha = 1$, $m = 1$, $S = 1$, $N = 4$: cela s'accorde avec l'équation

$$2 = (\pm 1^2) + (\pm 1)^2 + 3(0^2 + 0^2).$$

Soit ensuite $n = 10$, d'où $\alpha = 1$, $m = 5$, $S = 6$. On en conclura $N = 24$; or c'est bien ce qui résulte des expressions ci-après du nombre 10 :

$$(\pm 1)^2 + (\pm 3)^2 + 3(0^2 + 0^2),\quad (\pm 2)^2 + 0^2 + 3[(\pm 1)^2 + (\pm 1)^2],$$
$$(\pm 3)^2 + (\pm 1)^2 + 3(0^2 + 0^2),\quad 0^2 + (\pm 2)^2 + 3[(\pm 1^2) + (\pm 1)^2].$$

Soit encore $n = 4$, d'où $\alpha = 2$, $m = 1$. Il viendra $N = 20$, comme le donnent effectivement les expressions suivantes du nombre 4 :

$$(\pm 2)^2 + 0^2 + 3(0^2 + 0^2),\qquad 0^2 + (\pm 2)^2 + 3(0^2 + 0^2),$$
$$(\pm 1)^2 + 0^2 + 3[(\pm 1)^2 + 0^2],\qquad (\pm 1)^2 + 0^2 + 3[0^2 + (\pm 1)^2],$$
$$0^2 + (\pm 1)^2 + 3[(\pm 1)^2 + 0^2],\qquad 0^2 + (\pm 1)^2 + 3[0^2 + (\pm 1)^2].$$

Enfin soit $n = 120$. En observant que 120 est le produit de 8 par 15, on verra que, pour ce nombre 120, on a $\alpha = 3$, $m = 15$: les diviseurs de 15 étant 1, 3, 5, 15, après avoir exclu 3 et 15 que 3 divise, on obtiendra $S = 6$; d'où finalement

$$N = 52 \times 6 = 312.$$

Je laisse au lecteur le soin de vérifier ce résultat par le calcul direct.

La formule

$$N = 4(2^{\alpha+1} - 3)S$$

qui fournit le nombre des solutions de l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + y^2 + 3(z^2 + t^2)$$

quand $\alpha > 0$, ne convient pas au cas de $\alpha = 0$. On aurait une formule générale en posant

$$N = 4\left[2^{\alpha+1} - 2 - (-1)^{2^\alpha}\right]S,$$

ou bien encore

$$N = 4\left[2^{\alpha+1} - 2 - \cos(2^\alpha \pi)\right]S.$$

Mais il est plus simple de considérer séparément les nombres impairs et les nombres pairs.

Jusqu'ici nous avons admis tout à la fois et les solutions propres et les solutions impropres de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + 3(z^2 + t^2).$$

Excluons maintenant les solutions *impropres* où x, y, z, t ont un facteur commun > 1, et cherchons le nombre M des solutions *propres*. A cet effet, mettons en évidence les nombres premiers qui peuvent entrer dans la composition de n, et posons

$$n = 2^\alpha . 3^\beta . a^\mu . b^\nu \ldots c^\omega,$$

où α et β peuvent se réduire à zéro. Nous séparons 2 et 3 des autres nombres premiers a, b,..., c. Ils jouent en effet un rôle particulier.

J'observe d'abord que quand on a

$$\beta \geqq 2,$$

il vient

$$M = 0;$$

car alors x, y, z, t ont nécessairement le diviseur 3.

Restent les valeurs

$$\beta = 0, \quad \beta = 1,$$

répondant aux deux formes

$$2^\alpha a^\mu b^\nu \ldots c^\omega, \quad 2^\alpha . 3 . a^\mu b^\nu \ldots c^\omega.$$

Or il est aisé de voir que pour les deux nombres qu'elles donnent en prenant pour α, a, μ, etc., les mêmes valeurs, la valeur de M est aussi la même. Désormais donc nous supposerons $\beta = 0$, partant n premier à 3, ou

$$n = 2^\alpha a^\mu b^\nu \ldots c^\omega.$$

Cela étant, M dépendra du produit

$$(a^\mu + a^{\mu-1})(b^\nu + b^{\nu-1}) \ldots (c^\omega + c^{\omega-1}),$$

que je désignerai par R, et de l'exposant α.

Pour $\alpha = 0$ et pour $\alpha = 1$, c'est-à-dire pour n impair et pour n simplement pair, on aura

$$M = 4R.$$

Pour $\alpha = 2$, on aura

$$M = 16R.$$

Enfin pour $\alpha > 2$, on trouve généralement

$$M = 3.2^{\alpha+1} R.$$

Soit, comme exemple,

$$n = 5^2 :$$

il viendra

$$M = 4(5^2 + 5),$$

tandis que

$$N = 4(5^2 + 5 + 1);$$

et en effet on a dû perdre les quatre solutions contenues dans la double égalité

$$5^2 = (\pm 5)^2 + 0^2 + 3(0^2 + 0^2) = 0^2 + (\pm 5)^2 + 3(0^2 + 0^2).$$

Soit ensuite

$$n = 4.5^2 ;$$

il viendra

$$M = 16(5^2 + 5),$$

tandis que

$$N = 20(5^2 + 5 + 1).$$

Or les solutions perdues ici sont d'abord celles où x, y, z, t sont divisibles par 2 sans l'être par 5; leur nombre est celui des solutions propres de l'équation

$$5^2 = x'^2 + y'^2 + 3(z'^2 + t'^2):$$

nous venons de le trouver égal à $4(5^2 + 5)$. En outre on perd les solutions où x, y, z, t ont le facteur 5, le facteur 2 restant possible sans être nécessaire : leur nombre est celui des solutions propres ou impropres de l'équation

$$4 = x''^2 + y''^2 + 3(z''^2 + t''^2),$$

c'est-à-dire 20. C'est bien là ce que disent nos formules.