

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

J. LIOUVILLE

**Nombre des représentations du double d'un entier impair  
sous la forme d'une somme de douze carrés**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 2<sup>e</sup> série*, tome 5 (1860), p. 143-146.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1860\\_2\\_5\\_\\_143\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1860_2_5__143_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

NOMBRE DES REPRÉSENTATIONS DU DOUBLE

D'UN ENTIER IMPAIR SOUS LA FORME D'UNE SOMME DE DOUZE CARRÉS;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Le nombre  $N$  des représentations du double  $2m$  d'un entier impair donné  $m$  par une somme de douze carrés, c'est-à-dire le nombre des solutions de l'équation

$$2m = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{12}^2,$$

où  $x_1, x_2, \dots, x_{12}$  sont des entiers positifs ou négatifs, ou zéro, s'exprime très-simplement au moyen de la somme des cinquièmes puissances des diviseurs de  $m$ .

Désignons en effet par  $\zeta_5(m)$  la somme des cinquièmes puissances des diviseurs de  $m$ , 1 et  $m$  compris. Je trouve que l'on a

$$N = 264\zeta_5(m).$$

Le facteur 264 se rapporte au cas de  $m = 1$  : c'est le nombre des représentations de 2 par une somme de douze carrés. Et en effet ici tout se tire de la seule équation

$$2 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2,$$

en y permutant les carrés; d'où

$$N = 4 \times \frac{12 \cdot 11}{2} = 264.$$

Soit en second lieu  $m = 3$ . On partira des deux équations

$$6 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2$$

et

$$6 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2,$$

dont les seconds membres devront d'abord être complétés par des

zéros pour parfaire le nombre 12, après quoi on effectuera les permutations convenables. Il vient ainsi

$$N = 264(20 + 224),$$

c'est-à-dire

$$N = 264 \times 244,$$

ce qui s'accorde avec notre formule, attendu que

$$\zeta_5(3) = 1^5 + 3^5 = 244.$$

Soit enfin  $m = 5$ . En partant des équations fondamentales

$$10 = 1 + 9, \quad 10 = 1 + 1 + 4 + 4,$$

puis

$$10 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 4,$$

et

$$10 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1,$$

introduisant le double signe des racines des carrés, ajoutant les zéros voulus, et permutant, on trouvera

$$N = 3.8.11(2 + 180 + 2688 + 256),$$

d'où

$$N = 264 \times 3126 = 264(1 + 5^5),$$

comme notre formule le dit.

Je ne sache pas que personne ait jusqu'ici donné cette formule. Il est inutile d'avertir que nous l'avons conclue sans aucune difficulté de nos *formules générales*.

En calculant  $N$ , nous avons tenu compte de toutes les solutions entières de l'équation

$$2m = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{12}^2.$$

Mais si l'on voulait s'en tenir aux solutions *propres*, c'est-à-dire exclure les solutions où  $x_1, x_2, \dots, x_{12}$  ont un facteur commun plus grand que l'unité, on obtiendrait un autre nombre  $M$  facile au reste à déduire de  $N$ . Pour en donner la valeur, je décompose  $m$  en ses facteurs

premiers de manière à avoir

$$m = a^\alpha b^\beta \dots c^\gamma.$$

Cela fait, M s'exprime par le produit

$$264 [a^{5\alpha} + a^{5(\alpha-1)}][b^{5\beta} + b^{5(\beta-1)}] \dots [c^{5\gamma} + c^{5(\gamma-1)}].$$

Le coefficient numérique est le même que ci-dessus; mais la fonction  $\zeta_5(m)$  est remplacée par une autre fonction qui ne coïncide avec  $\zeta_5(m)$  que quand les exposants  $\alpha, \beta, \dots, \gamma$  sont tous égaux à 1.

Soit, comme exemple,

$$m = 9.$$

Il viendra

$$M = 264(9^5 + 3^5),$$

tandis que

$$N = 264(9^5 + 3^5 + 1);$$

et en effet on a dû perdre les solutions de l'équation

$$2 \cdot 9 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{12}^2$$

où  $x_1, x_2, \dots, x_{12}$  sont divisibles par 3, solutions dont le nombre est évidemment celui des représentations de 2, c'est-à-dire 244.

La fonction numérique

$$[2^{5\alpha} + a^{5(\alpha-1)}][b^{5\beta} + b^{5(\beta-1)}] \dots,$$

dont nous venons de faire usage, est liée à  $\zeta_5(m)$  comme la fonction

$$(a^\alpha + a^{\alpha-1})(b^\beta + b^{\beta-1}) \dots,$$

employée par Eisenstein dans l'expression du nombre des représentations propres de l'entier  $m$  par une somme de quatre carrés, est liée à  $\zeta_1(m)$ , c'est-à-dire à la somme des diviseurs de  $m$ .

En général la fonction

$$[a^{n\alpha} + a^{n(\alpha-1)}][b^{n\beta} + b^{n(\beta-1)}] \dots,$$

que je désignerai par  $Z_n(m)$  est liée de même à  $\zeta_n(m)$ , c'est-à-dire à la somme des puissances de degré  $n$  des diviseurs de  $m$ . Cette fonction jouit d'un grand nombre de propriétés curieuses que je me propose de développer dans un autre article. Observons seulement ici qu'en représentant par  $D^2$  les diviseurs carrés de  $m$ , c'est-à-dire en représentant par  $D$  ceux des diviseurs de  $m$  dont le carré divise aussi  $m$ , en sorte que

$$\frac{m}{D^2}$$

soit un entier, on a

$$\sum Z_n\left(\frac{m}{D^2}\right) = \zeta_n(m),$$

équation que l'on pourrait prendre comme définition de la fonction  $Z_n(m)$  dont elle fournirait la valeur telle qu'on l'a écrite plus haut. Le signe sommatoire porte, bien entendu, sur les valeurs de  $D$  : l'unité est toujours une de ces valeurs.

