JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. MANNHEIM

Recherches géométriques relatives au lieu des positions successives des centres de courbure d'une courbe qui roule sur une droite

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 4 (1859), p. 93-104.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1859_2_4__93_0>

RECHERCHES GÉOMÉTRIQUES

RELATIVES

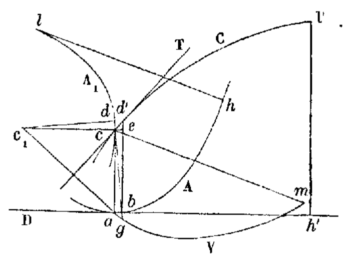
AU LIEU DES POSITIONS SUCCESSIVES DES CENTRES DE COURBURE D'UNE COURBE QUI ROULE SUR UNE DROITE;

PAR A. MANNHEIM,

Capitaine d'artillerie.

1. Soient a (*fig.* 1) le point où une courbe quelconque A touche

Fig. 1.



une droite D sur laquelle elle roule, c le centre de courbure de A correspondant au point a; pour chacune des positions de A, il existe un point tel que c, tous ces points sont sur une certaine courbe C, dont nous allons nous occuper.

2. *Construction de la tangente* T *au point c de la courbe* C.

Soient b (*fig.* 1) un point infiniment rapproché de a, d le centre de courbure correspondant à ce point; pour un mouvement infiniment petit de A, b est venu sur D, et le point d est venu en d' sur la courbe C.

Pour déterminer la tangente T, il suffit de chercher la limite de $\frac{d'e}{ce}$; ce égale ab qui est un élément de A, en appelant ρ le rayon de courbure ca et ω l'angle de contingence de A au point a, on a

$$ab = \rho . d\omega;$$

$d'e$ égale cd qui est un élément de la développée A_1 de A, en appelant ρ_1 le rayon de courbure cc_1, on a

$$cd = \rho_1 d\omega;$$

on a donc

$$\frac{d'e}{ce} = \frac{\rho_1}{\rho};$$

d'où l'on voit que T est perpendiculaire sur ac_1. On peut dire aussi que ac_1 est parallèle à la normale de C qui passe par c.

On arrive, de la même manière, à la construction de la normale au lieu des positions successives des points tels que c_1, etc.

3. *Arc équivalent en longueur à un arc de* C.

Prolongeons cb d'une longueur bg égale à dc, joignons le point a au point g; nous obtenons ainsi un triangle abg qui est égal au triangle ced', on a donc

$$cd' = ag.$$

Ce que nous venons de dire pour cd' est vrai, comme il est facile de le voir, pour d'autres éléments de C ainsi que pour leur somme; en supposant donc que h est venu en h', l en l', et que cm est égale et parallèle à lh, on a l'arc cl' de C égal à l'arc am de V; la courbe V étant le lieu des extrémités des droites, issues d'un point fixe, égales et parallèles aux rayons de courbure de A.

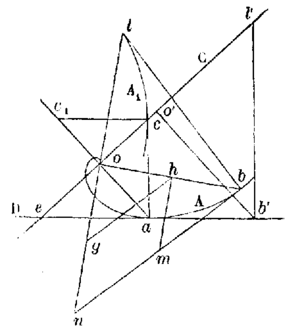
4. *Aire équivalente à l'aire* $cah'l'$ *comprise entre* C, D *et deux ordonnées de* C.

Nous venons de considérer une certaine courbe V (*fig.* 1); il est facile de voir que le secteur $cagm$ limité à cette courbe est équivalent à l'aire $cahl$ comprise entre A et sa développée. Cette dernière aire est équivalente à la moitié de l'aire $cah'l'$: en effet, le rectangle $cabe$ est double du triangle cab; ce que nous disons pour un élément est vrai pour d'autres éléments ainsi que pour leur somme : donc $cah'l'$ est double de $cahl$ ou de son égal $cagm$.

5. *Remarque*. L'équation en coordonnées rectangles de C n'est autre que l'équation de A_1 rapportée à A, en prenant pour abscisses des arcs de A et pour ordonnées les rayons de courbure de cette courbe.

APPLICATIONS. — *Spirale logarithmique.* — Soit a (*fig.* 2) le point où

FIG. 2.



la spirale A touche la droite D : on sait que pour construire le centre de courbure correspondant au point a, il faut élever, sur le rayon vecteur oa, la perpendiculaire oc jusqu'à sa rencontre en c avec la normale qui passe en a. Le point c ainsi obtenu est le centre de courbure cherché.

En appliquant la construction de Savary, on trouve que le centre de courbure de l'élément décrit par o pendant le roulement de A est à l'infini sur oa, nous pouvons conclure de là que : *le lieu décrit par le point o est la perpendiculaire C élevée du point o sur oa; par suite, le lieu des points tels que c est cette même droite C.*

La courbe V de la spirale est une autre spirale qui lui est semblable, d'où l'on conclut, d'après le n° 3, que la spirale logarithmique est rectifiable.

Cette rectification est aussi une conséquence de la connaissance du lieu décrit par le point o : puisque ce point décrit une droite, le point e où celle-ci coupe D correspond à la position qu'occuperait o sur D par suite du roulement, et la distance ae est égale à l'arc de spirale compris entre o et a. De même, en élevant on perpendiculairement à ob jusqu'à sa rencontre en n avec la tangente bn, on a bn égal à l'arc bo; d'après cela, en prenant $(bn - ae)$, on aura une droite égale à l'arc ab. On sait que l'angle oac est constant quel que soit le point de la spirale, il suffit donc de porter oa en oh sur ob, d'élever la perpendiculaire hm sur ob, et l'on obtient bm égale à l'arc ab.

L'aire $cabl$ étant la moitié de $cab'l'$, a pour mesure l'arc ab par la demi-somme des rayons de courbure ac, bl. On peut exprimer cette aire en fonction des rayons vecteurs oa, ob et de l'angle constant oae.

Désignons cet angle par α et les rayons vecteurs par r et R, on a

$$\text{arc}\, ab = mb = \frac{\mathrm{R}-r}{\cos\alpha}, \quad ac = \frac{r}{\sin\alpha}, \quad bl = \frac{\mathrm{R}}{\sin\alpha};$$

par suite,

$$\text{aire}\, cabl = \frac{\mathrm{R}^2 - r^2}{\sin 2\alpha}.$$

En considérant la courbe V, que nous savons être semblable à A, on trouve que l'aire du secteur oab est égale à $\frac{\mathrm{R}^2 - r^2}{2\cos\alpha}$.

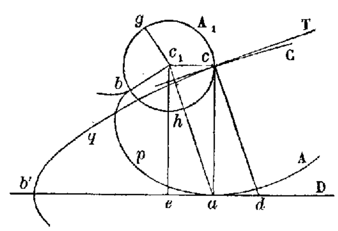
D'après la remarque du n° 5, nous avons pour l'équation de la développée de la spirale A,

$$\frac{y}{x} = \cot\alpha,$$

y représentant les rayons de courbure de A, x les arcs de cette courbe comptés à partir de son pôle, et α l'angle constant des rayons vecteurs avec les tangentes. On peut remarquer aussi que y est la longueur de l'arc de la developpée correspondant à l'arc oa, et l'équation précédente exprime alors que le rapport de ces arcs est constant. Quant au lieu des positions successives des centres de courbure tels que c_1 de la développée A_1, nous dirons seulement que c'est encore une droite qui passe par e.

Développante de cercle (*fig.* 3.). — Pour déterminer la nature

Fig. 3.



de C, nous allons construire la tangente T qui passe par le point c, centre de courbure de la développante A, correspondant au point a. Soit c_1 le centre de la circonférence A_1 développée de A, d'après ce que nous savons (n° 2), il faut abaisser du point c une perpendiculaire sur ac_1, et l'on a la tangente cherchée.

Menons du point c la droite cd parallèle à ac_1, nous avons ainsi la normale à la courbe C, la sous-normale ad étant, par suite de cette construction, égale à $c_1 c$ est constante, donc la *courbe* C *est une parabole*.

Du point c_1 menons la droite $c_1 e$ égale et parallèle à ca, on trouve ainsi le point e sur D; nous voyons donc que dans le cas de la développante de cercle la courbe V se confond avec le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du centre c_1 sur les tangentes de A.

Quelle que soit la génération de V, il est facile de voir que cette courbe est une spirale d'Archimède. Du point c_1 élevons sur $c_1 b$ la perpendiculaire $c_1 g$, nous avons l'angle $gc_1 h$ égal à l'angle $bc_1 c$: ce dernier est proportionnel à l'arc bhc qui est égal à ca, nous voyons ainsi que les rayons vecteurs tels que $c_1 e$ qui est égal à ca, sont proportionnels aux angles tels que $gc_1 h$ comptés à partir de $c_1 g$, par suite le lieu décrit par le point e est une spirale d'Archimède. En considérant le point e comme le pied de la perpendiculaire $c_1 e$ abaissée sur D, on voit qu'il est toujours le sommet d'un angle droit dont l'un des côtés passe par c_1, et dont l'autre côté est tangent à la courbe A, la normale au lieu décrit par le point e dans ce cas passe en c, et la sous-normale $c_1 c$ étant constante, le point e décrit une spirale d'Archimède [*].

D'après le n° **3**, nous voyons que la rectification de l'arc d'une spirale d'Archimède dépend de celle de la parabole.

D'après le n° **4**, nous avons

$$\text{aire } bpachb \, \frac{\text{aire } b'acqb'}{2},$$

nous avons donc

$$\frac{b'a \times ac}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{bpa \times bhc}{3} \text{ pour l'aire } bpachb.$$

---

[*] La distance ca étant constante, on peut supposer le point e lié à la droite ca pendant le roulement de celle-ci sur la circonférence A_1, et appliquer la construction de Savary pour déterminer le centre de courbure de la spirale d'Archimède. Voici la construction du centre de courbure de cette courbe correspondant au point e; en c, et perpendiculairement à ce, on mène la droite cf qui coupe D en f, la ligne qui joint le point c_1 au point f coupe la normale ce au centre de courbure cherché.

Ainsi, *l'aire comprise entre un arc de cercle bhc et l'arc correspondant bpa de sa développante est égale au tiers du produit de ces arcs.*

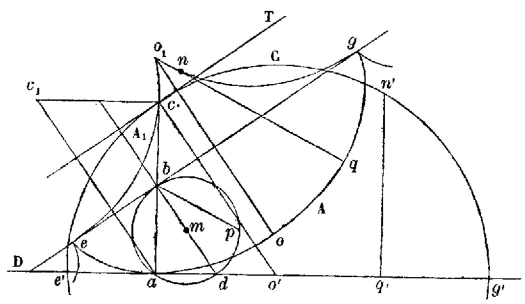
D'après le n° 5, en appelant r le rayon de A_1, l'équation de cette circonférence est $y^2 = 2rx$, les abscisses étant des arcs de sa développante A, et les ordonnées les rayons de courbure de cette courbe. L'ordonnée étant égale à bhc, nous voyons que $\frac{\overline{bhc}^2}{bpa}$ est constant.

L'arc de la développante correspondant à la circonférence A_1 est égal à $2\pi^2 r$, l'on peut remarquer que le rapport de la longueur de cet arc à celui de la circonférence A_1 est égal à π.

Dans le cas du roulement de la développante A, le lieu des positions successives des centres de courbure de sa développée n'est autre que celui du point c_1, il est évident que ce point décrit une parabole. En appliquant la construction de Savary, on retrouve une construction connue du centre de courbure de la parabole.

Cycloïde. (*Fig.* 4.) — Comme dans le cas précédent, nous allons

Fig. 4.



chercher T pour déterminer la nature de C. Au point de contact a de la cycloïde A et de la droite D, élevons à cette dernière la perpendiculaire ab, cette droite coupe la base de la cycloïde au point b, et l'on obtient le centre de courbure c de la cycloïde en prolongeant ab d'une longueur égale à elle-même. Au point c élevons sur ac la perpendiculaire cc_1, et du point a abaissons sur la base de la cycloïde la perpendiculaire ac_1, ces deux perpendiculaires se coupent en c_1, centre de courbure de la développée de la cycloïde.

La tangente T est la perpendiculaire abaissée du point c sur ac_1, on peut remarquer que T est parallèle à la base de la cycloïde; en menant co' parallèlement à la droite ac_1, nous avons la normale à la courbe C.

La droite co' est égale au double du diamètre bd du cercle m générateur de la cycloïde, donc co' a une longueur constante, et par suite *la courbe* C *est une circonférence ayant un rayon quadruple de celui de la circonférence m.*

Le point o' est fixe, il correspond au point milieu de l'arc eag de A, nous avons l'arc ao égal à ao', c'est-à-dire double de ad; nous retrouvons ainsi la rectification connue. Nous pouvons dire aussi que l'arc ao de la cycloïde est égal à la portion de tangente ao' comprise entre le point de contact a et le point o' où cette tangente est coupée par la perpendiculaire abaissée, sur la base de la cycloïde, du centre de courbure c correspondant au point a. Nous verrons plus loin que cette rectification n'est qu'un cas particulier.

La courbe V, comme il est facile de le voir, est dans ce cas une double de m.

D'après le nº 4 nous avons aire $aoqno_1ca$ égale à la moitié de l'aire $aq'n'o'_1ca$, et puisque la circonférence m est la moitié de V, en menant bp parallèlement à nq, nous avons aussi aire $aoqno_1ca$ égale à quatre fois $adpba$.

En désignant par r le rayon md, par y les arcs de A comptés à partir de o, par x les rayons de courbure de A, nous avons pour équation de la cycloïde A_1

$$y^2 + x^2 = 16r^2.$$

En prenant le point e pour origine des arcs, nous avons

$$y^2 + x^2 - 8rx = 0,$$

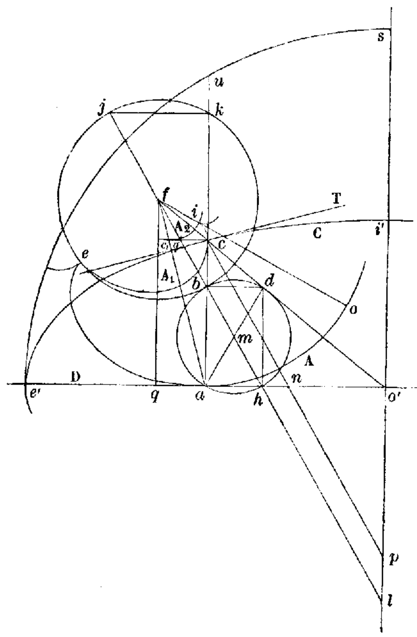
qui exprime la relation qui existe entre un arc moindre que eo et l'arc correspondant de sa développée.

Pendant le roulement de A, le lieu des positions successives des centres de courbure de sa développée est une ellipse dont le grand axe est double du petit.

Epicycloïde. — La développante de cercle et la cycloïde que nous avons déjà examinées ne sont que des cas particuliers de l'épicycloïde dont nous allons maintenant nous occuper.

L'épicycloïde A (*fig.* 5) a été engendrée par le point a de la circonfé-

Fig. 5.



rence m qui a roulé sur la circonférence f. Pour obtenir le centre de courbure c correspondant au point a, on applique la construction de Savary : on joint le point a au centre m, cette ligne rencontre la circonférence m au point d, la ligne qui joint le point f au point d coupe la normale ab au centre de courbure c. On sait que la développée A_1 de A est une courbe semblable à celle-ci, et que la développée A_2 de A_1 est une épicycloïde semblable et semblablement placée à A ; on obtiendra donc le centre de courbure de A_1 correspondant au point c en joignant le point f au point a et cherchant le point c_1 où cette droite coupe la normale cc_1.

Soit o le milieu de l'épicycloïde A ; en joignant le point f au point o on obtient sur A_2 le milieu i de cette épicycloïde ; mais l'arc $c_1\,i$ est égal à $c_1\,c$; donc en prolongeant fd jusqu'à sa rencontre en o' avec D, on obtiendra ao' égal à l'arc ao [*]. D'après cela, le point o' est le point

[*] Nous pouvons donc dire que l'arc d'épicycloïde compris entre un point a et le milieu o de cette courbe est égal à la portion de tangente ao' comprise entre a et le point

où o, pendant le roulement de A, vient toucher D, ce point o' est donc un point fixe.

Au point o' élevons une perpendiculaire sur D, et du point c menons cp parallèlement à fm, nous allons faire voir que les distances cn et cp sont constantes, et par suite que *la courbe* C *est une ellipse ayant pour centre* o'. La distance cn est égale à gh; pour déterminer celle-ci nous avons

$$\left(\frac{1}{cb} + \frac{1}{ba}\right) \cos abh = \frac{1}{fb} + \frac{1}{bm},$$

ou en désignant fb par R, bm par r,

$$\frac{\cos cbg}{cb} + \frac{\cos abh}{ba} = \frac{1}{\mathrm{R}} + \frac{1}{r},$$

$$\frac{1}{gb} + \frac{1}{2r} = \frac{1}{\mathrm{R}} + \frac{1}{r},$$

d'où gb et par suite

$$cn = \frac{2\mathrm{R}r}{\mathrm{R}+2r}.$$

La distance cp est égale à bl ou à $2r + hl$; pour déterminer hl nous avons

$$\frac{hl}{bh} = \frac{do'}{cd} = \frac{bh}{gb},$$

d'où

$$hl = \frac{2r(\mathrm{R}+2r)}{\mathrm{R}},$$

et par suite

$$cp = \frac{4r(\mathrm{R}+r)}{\mathrm{R}}.$$

La courbe C est donc une ellipse ayant pour grand axe $\frac{8r(\mathrm{R}+r)}{\mathrm{R}}$ et pour petit axe $\frac{4\mathrm{R}r}{\mathrm{R}+2r}$; il est du reste évident que le grand axe est

---

où cette tangente est coupée par la ligne qui joint le point f au centre de courbure c correspondant au point a. Cette rectification comprend, comme cas particulier, celle que nous avons déjà donnée de la cycloïde.

égal à la longueur de l'épicycloïde A et que le petit axe est égal à la longueur de la développée A_1.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante : *Lorsqu'une épicycloïde roule sur une droite, le lieu des positions successives de ses centres de courbure est une ellipse ayant pour grand axe la longueur de cette épicycloïde et pour petit axe la longueur de la développée de cette courbe* [*].

Pour construire la courbe V, prenons pour point fixe le centre f. Du point f menons une parallèle à ca, soit q le point où cette droite coupe D, on a

$$\frac{fq}{ca} = \frac{fh}{cn} = \text{const.}$$

Le rapport $\frac{fq}{ca}$ étant constant, la courbe V est semblable au lieu des projections du centre fixe f sur les tangentes à l'épicycloïde. D'après cela, la rectification de cette dernière courbe dépend de celle de l'ellipse. Ce résultat est aussi la conséquence d'un théorème connu (journal *l'Institut*, 24 février 1858).

Du point o' comme centre avec $o'e'$ pour rayon, décrivons une circonférence ; soient u et s les points où elle est coupée par les lignes ac, $o'i'$; on a

$$\text{aire } aci'o' = \text{aire } auso' \times \frac{cn}{cp},$$

nous avonc donc

$$\text{aire } acioa = \frac{cn}{cp} \times \frac{\text{aire } auso'}{2}.$$

Cette dernière valeur est aussi l'aire du secteur de V compris dans l'angle $qf\grave{o}$.

L'équation de l'épicycloïde A_1 rapportée à sa développante A, est celle de l'ellipse C. L'équation de cette ellipse, en prenant le som-

---

[*] On peut remarquer que les points b, g, k, j, f décrivent aussi des ellipses.

On peut dire que : *Lorsqu'une épicycloïde roule sur une droite, le centre de sa base décrit une ellipse.*

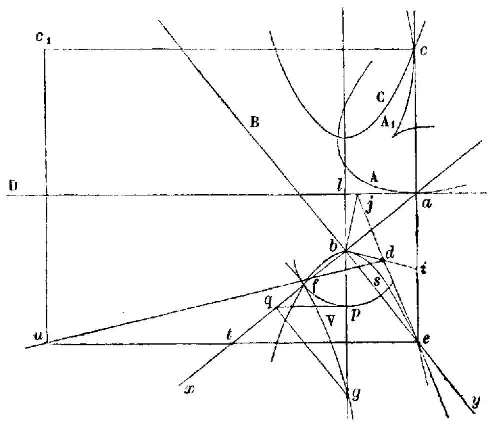
On sait qu'une droite de longueur constante qui se meut dans un angle droit enveloppe une épicycloïde dont l'équation est $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Lorque cette courbe roule sur une droite son centre décrit une ellipse dont le grand axe est double du petit.

met e' pour origine des coordonnées, exprime aussi la relation qui existe entre un arc de A moindre que eo et l'arc correspondant de sa développée.

Il est facile de voir que les points tels que c_1 sont sur une ellipse, on peut donc dire : *Lorsqu'une épicycloïde* A *roule sur une droite, le lieu des positions successives des centres de courbure de sa développée* A_1 *est une ellipse.* On peut remarquer, en outre, que *cette ellipse a pour petit axe la longueur de la développée* A_1, *et pour grand axe une droite égale à la somme des longueurs des courbes* A *et* A_2.

Chaînette. — Soient D (*fig.* 6) la droite sur laquelle roule la chaî-

Fig. 6.



nette A et B la base de cette chaînette; au point a, où la courbe A touche D, élevons la perpendiculaire ac sur D, cette droite coupe B au point e, en prenant ac egale à ae, on a le centre de courbure c correspondant au point a. D'après cela, le lieu des points tels que c ou la courbe C est symétrique, par rapport à D, de la courbe décrite par le point e. Pour avoir ce lieu, considérons le point i milieu de ae, on a

$$bi = ai;$$

donc le point i décrit une parabole [*] : il en est de même du point c, par suite *la courbe* C *est une parabole.*

[*] Le point b est fixe; on sait en effet que : *lorsqu'une chaînette roule sur une droite, sa base passe par un point fixe.*

D'après cela, on trouvera facilement la relation qui existe entre un arc de la chaînette et l'arc correspondant de sa développée, ainsi que l'aire comprise entre ces deux courbes.

Prolongeons ab d'une longueur bq égale à elle-même, du point b menons bg parallèlement à ae, et du point q, qg parallèlement à be, ces deux droites se coupent en g : si l'on suppose fixe la chaînette A, le point g construit comme nous venons de le faire décrit la courbe V. Pour obtenir l'équation de cette courbe, nous remarquerons, en abaissant la perpendiculaire qp sur bg, que bp est constant; en désignant cette droite par m, on a

$$qb^2 = m\sqrt{qg^2 + qb^2};$$

en prenant pour axes les lignes fixes be, bq, on peut donc écrire

$$x^2 = m\sqrt{x^2 + y^2}$$

pour l'équation de la courbe V.

Il est facile de construire cette courbe en décrivant du point b comme centre avec m pour rayon une circonférence; au point p on élève à bg la perpendiculaire pq, au point q on élève à bf la perpendiculaire qg, et l'on obtient le point g de la courbe V.

D'après le n° 3 les arcs de cette courbe dépendent de ceux de la parabole, et d'après le n° 4 le secteur fbg est équivalent à la moitié de l'aire $lbsea$, qu'il est très-simple d'évaluer.

Du point e menons une parallèle à D, soit t le point où elle coupe bq, prolongeons et d'une longueur égale à elle-même jusqu'en u; le point u ainsi obtenu est le symétrique, par rapport à D, du centre de courbure c_1 de la développée A_1; d'après la construction de ce point u, on trouvera facilement l'équation du lieu des positions successives des centres de courbure de la développée d'une chaînette pendant le roulement de celle-ci sur une droite. Pour construire la tangente au point u de ce lieu, on élève à bi la perpendiculaire bj, on joint le point j au point e, la droite je, tangente à la parabole, coupe la droite bi au point d; en joignant le point d au point u, on a la tangente cherchée. Nous ne ferons pas la démonstration de cette construction, qui sort de l'objet principal de nos recherches.