JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur quelques formules générales qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres (huitième article)

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 4 (1859), p. 73-80.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1859_2_4__73_0>

SUR

QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES QUI PEUVENT ÊTRE UTILES DANS LA THÉORIE DES NOMBRES;

Par M. J. LIOUVILLE.

HUITIÈME ARTICLE.

Dans cet article, je conserve pour le nombre entier m dont je m'occupe, et qui peut être indifféremment pair ou impair, le mode de partition que nous avons mis en œuvre dans l'article précédent (cahier de janvier, page 1). Il faut considérer toutes les solutions de l'équation

$$m = m'^2 + m'',$$

où l'on prend pour m' un entier positif ou négatif, ou même zéro, tandis que m'' est essentiellement positif. Pour chaque groupe m', m'' ainsi obtenu, on décomposera m'' de toutes les manières possibles en un produit

$$2^{\alpha''} d'' \delta'',$$

où d'' et δ'' sont des entiers positifs impairs, et où l'exposant α'' se réduit à zéro quand m'' est impair. Nous prenons donc pour point de départ l'équation

$$m = m'^2 + m'' = m'^2 + 2^{\alpha''} d'' \delta''.$$

Cela posé, soit

$$\mathfrak{F}(x, y)$$

une fonction paire par rapport à y, mais impaire par rapport à x et s'évanouissant avec cette variable, ou plutôt, soit $\mathfrak{F}(x, y)$ une fonction telle, que l'on ait, pour les valeurs de x, y dont on fera usage,

$$\mathfrak{F}(x, -y) = \mathfrak{F}(x, y), \quad \mathfrak{F}(-x, y) = -\mathfrak{F}(x, y), \quad \mathfrak{F}(0, y) = 0.$$

Faisons la somme des expressions de la forme

$$(-1)^{m''-1}\,\mathcal{F}(2^{\alpha''}d''+m',\ \delta''-2m'),$$

pour toutes les valeurs de $2^{\alpha''}d''$ et δ'' dont le produit est m'', puis sommons de nouveau le résultat pour tous les groupes m', m'' dont il a été question plus haut, et qui donnent $m=m'^2+m''$. Cette somme double,

$$\sum\sum(-1)^{m''-1}\,\mathcal{F}(2^{\alpha''}d''+m',\ \delta''-2m'),$$

sera généralement égale à zéro. Mais il y a exception quand m est un carré, et alors la somme double est égale à

$$\mathcal{F}(\sqrt{m},1)+\mathcal{F}(\sqrt{m},3)+\mathcal{F}(\sqrt{m},5)+\ldots+\mathcal{F}(\sqrt{m},2\sqrt{m}-1).$$

En d'autres termes, on a

$$(\gamma)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum\sum(-1)^{m''-1}\,\mathcal{F}(2^{\alpha''}d''+m',\ \delta''-2m')=0,\quad \text{ou}\\ &=\mathcal{F}(\sqrt{m},1)+\mathcal{F}(\sqrt{m},3)+\mathcal{F}(\sqrt{m},5)+\ldots+\mathcal{F}(\sqrt{m},2\sqrt{m}-1),\end{aligned}\right.$$

suivant que m n'est pas ou est un carré.

Observons, en passant, que les valeurs de y qui figurent ici dans $\mathcal{F}(x,y)$ sont toujours impaires : quant aux valeurs de x, elles sont paires ou impaires, suivant que m est pair ou impair.

Prenons $m=3$. Les valeurs de m' et de m'' (ou $2^{\alpha''}d''\delta''$), pour lesquelles on a

$$m=m'^2+m'',$$

seront

$$m'=0,\quad m''=1.3=3.1;\quad m'=1,\quad m''=2.1;\quad m'=-1,\quad m''=2.1.$$

De là, pour notre somme double,

$$\mathcal{F}(1,3)+\mathcal{F}(3,1)-\mathcal{F}(3,-1)-\mathcal{F}(1,3);$$

et comme $\mathcal{F}(3,-1)=\mathcal{F}(3,1)$, on trouve bien zéro pour résultat.

Mais si $m = 1$, on n'a que cette décomposition $1 = 0^2 + 1$, et notre somme se réduit à un seul terme $\mathfrak{F}(1, 1)$. Cela s'accorde avec la formule (γ), parce que 1 est un carré.

Pour $m = 4$, on doit trouver

$$\mathfrak{F}(2, 1) + \mathfrak{F}(2, 3);$$

et cela résulte en effet des décompositions de m, qui répondent à

$$m' = 0,\quad m'' = 4.1;\quad m' = 1,\quad m'' = 3.1 = 1.3;\quad m' = -1,\quad m'' = 3.1 = 1.3.$$

Cela donne la somme

$$-\mathfrak{F}(4, 1) + \mathfrak{F}(4, -1) + \mathfrak{F}(2, 1) + \mathfrak{F}(2, 3) + \mathfrak{F}(0, 5);$$

il suffit à présent d'observer que $\mathfrak{F}(4, -1) = \mathfrak{F}(4, 1)$ et $\mathfrak{F}(0, 5) = 0$.

Pour appliquer la formule (γ) à un exemple étendu et important, posons

$$\mathfrak{F}(x, y) = \sin(xt)\cos(yz),$$

t et z désignant des constantes quelconques. Nous aurons

$$\sum\sum(-1)^{m''-1}\sin(2^{\alpha''}d'' + m')\,t\cos(\delta'' - 2m')\,z = 0$$

quand m n'est pas un carré, cette même somme étant au contraire égale à

$$[\cos z + \cos 3z + \cos 5z + \ldots + \cos(2\sqrt{m} - 1)\,z]\sin(t\sqrt{m}),$$

quand m est un carré.

Dans le cas très-particulier de

$$z = 0,\quad t = \frac{\pi}{2},$$

il vient

$$\sum(-1)^{m''-1}\sin(2^{\alpha''}d'' + m')\frac{\pi}{2} = 0,\ \text{ou} = \sqrt{m}\sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{m}\right),$$

suivant que m n'est pas ou est un carré, ce qui ne donne pour un nombre pair qu'une identité insignifiante, mais au contraire une équation assez curieuse quand m est impair et de la forme $8\nu + 1$. Supposons donc désormais m impair. On a

$$\sin(2^{\alpha''}d''+m')\frac{\pi}{2}=\sin\left(2^{\alpha''}d''\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(m'\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(2^{\alpha''}d''\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(m'\frac{\pi}{2}\right);$$

et le dernier terme ne produit rien dans notre somme double, où les valeurs de m' qui ne sont pas nulles sont deux à deux égales et de signes contraires. Quant au premier terme, il est nul quand m' est impair, à cause du facteur $\cos\left(m'\frac{\pi}{2}\right)$: nous devrons donc nous borner à prendre

$$m'=0,\quad m'=\pm 2,\quad m'=\pm 4,\ldots,\quad m'=\pm 2\mu,$$

2μ étant la racine du plus grand carré pair inférieur à m. L'équation

$$m=m'^2+m''=m'^2+2^{\alpha''}d''\delta''$$

nous montre que pour ces valeurs de m', m'' est impair, comme m, en sorte que l'on a

$$\alpha''=0,\quad m''=d''\delta'',\quad \sin\left(2^{\alpha''}d''\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^{\frac{d''-1}{2}}.$$

Si donc nous posons, d'après une notation qui nous est familière,

$$\sum(-1)^{\frac{d''-1}{2}}=\rho(m'')=\rho(m-m'^2),$$

et si nous observons que l'on a toujours ici

$$(-1)^{m''-1}=1$$

tandis que

$$\cos\left(m'\frac{\pi}{2}\right)=\pm 1$$

alternativement, nous obtiendrons ce résultat final :

$$\rho(m)-2\rho(m-4)+2\rho(m-16)-\ldots\pm\rho(m-4\mu^2)=0,\ \text{ou}\ =(-1)^{\frac{\sqrt{m}-1}{2}}.\sqrt{m},$$

suivant que m n'est pas ou est un carré. Ceci peut conduire à des résultats intéressants sur la décomposition d'un nombre impair $8\nu+1$ en trois carrés.

Revenons à la formule générale (γ). Comme la fonction $\mathfrak{F}(x, y)$ est impaire par rapport à x et doit s'évanouir avec x, tandis qu'elle est paire par rapport à y, il nous est permis de prendre

$$\mathfrak{F}(x, y) = x f(x, y),$$

la fonction $f(x, y)$ étant paire par rapport aux deux variables. Nous aurons ainsi cette formule nouvelle

$$(\delta)\left\{\begin{array}{l} \sum\sum(-1)^{m''-1}(2^{\alpha''}d''' + m') f(2^{\alpha''}d'' + m', \delta'' - 2m') = 0, \text{ ou} \\ = \sqrt{m}(f(\sqrt{m}, 1) + f(\sqrt{m}, 3) + f(\sqrt{m}, 5) + \ldots + f(\sqrt{m}, 2\sqrt{m} - 1), \end{array}\right.$$

suivant que m n'est pas ou est un carré.

Mais on a une formule plus intéressante encore, en observant que $\delta'' - 2m'$ ou y étant un nombre essentiellement impair, on remplira les conditions imposées à $\mathfrak{F}(x, y)$ en prenant

$$\mathfrak{F}(x, y) = (-1)^{\frac{y}{2}} F(x, y),$$

pourvu que l'on suppose

$$F(-x, y) = F(x, -y) = -F(x, y),$$
$$F(0, y) = 0, \quad F(x, 0) = 0,$$

en sorte que $F(x, y)$ soit une fonction impaire, et par rapport à x et par rapport à y. Alors le facteur

$$(-1)^{m''-1}$$

qu'on avait déjà devra être groupé avec

$$(-1)^{\frac{\delta''-2m'}{2}},$$

ce qui donne pour produit

$$(-1)^{\frac{\delta''-1}{2} + m'' - m' - \frac{1}{2}}.$$

D'après l'équation

$$m = m'^2 + m'',$$

on a évidemment

$$(-1)^{m''-m'} = (-1)^m.$$

Si donc on multiplie les deux membres de l'équation (γ) par

$$(-1)^{m+\frac{1}{2}},$$

on voit que, par cette multiplication et notre transformation réunies, le premier membre de l'équation (γ) devient

$$\sum\sum(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}} F(2^{\alpha''}d'' + m', \delta'' - 2m').$$

Quant au second membre, il est généralement égal à zéro : il n'y a exception que quand m est un carré, et alors on en trouve aisément la valeur, savoir

$$(-1)^{m+1}\left[F(\sqrt{m}, 1) - F(\sqrt{m}, 3) + F(\sqrt{m}, 5) - \ldots \pm F(\sqrt{m}, 2\sqrt{m}-1)\right],$$

où les signes sont successivement + et −, sous la parenthèse.

Ainsi on a la formule

$$(\varepsilon)\left\{\begin{array}{l} \sum\sum(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}} F(2^{\alpha''}d'' + m', \delta'' - 2m') = 0, \text{ ou} \\ = (-1)^{m+1}\left[F(\sqrt{m}, 1) - F(\sqrt{m}, 3) + F(\sqrt{m}, 5) - \ldots \pm F(\sqrt{m}, 2\sqrt{m}-1)\right], \end{array}\right.$$

suivant que m n'est pas ou est un carré. Nous la faisons résulter de la formule (γ), mais à son tour elle pourrait donner celle-là ; ou plutôt les formules (γ), (δ) et (ε) sont toutes les trois fournies à la fois par un même calcul reposant sur les considérations les plus simples.

Nous aurons à faire plus tard un grand usage de la formule (ε). En y prenant

$$F(x, y) = xy,$$

on est conduit à une équation curieuse, qui pourrait servir à trouver, si déjà on ne le connaissait par d'autres moyens, le nombre des décompositions d'un entier m en une somme de deux carrés. Mais cela mérite d'être développé à part et longuement, sinon pour le théorème dont nous parlons pris en lui-même, du moins au point de vue de la méthode qui semble devoir être très-féconde.

En désignant par t et z deux constantes quelconques, on peut prendre encore

$$F(x, y) = \sin(xt)\sin(yz).$$

On obtiendra ainsi la valeur de la somme double

$$\sum\sum(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}} \sin(2^{\alpha''}d'' + m')\, t \sin(\delta'' - 2m')\, z.$$

En développant les sinus, on trouve pour leur produit quatre termes, dont deux, savoir

$$\cos(2^{\alpha''}d''t)\sin(m't)\sin(\delta''z)\cos(2m'z)$$

et

$$\sin(2^{\alpha''}d''t)\cos(m't)\cos(\delta''z)\sin(2m'z),$$

qui changent de signe sans changer de valeur en même temps que m', peuvent être omis. En tenant donc compte seulement des deux autres, on substituera à la somme double indiquée la différence de ces deux autres sommes

$$\sum\sum(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}} \sin(2^{\alpha''}d''t)\sin(\delta''z)\cos(m't)\cos(2m'z)$$

et

$$\sum\sum(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}} \cos(2^{\alpha''}d''t)\cos(\delta''z)\sin(m't)\sin(2m'z).$$

Cette différence est nulle quand m n'est pas un carré; et, dans le cas contraire, elle est égale à

$$(-1)^{m+1}\left[\sin z - \sin 3z + \sin 5z = \ldots \pm \sin(2\sqrt{m}-1)z\right]\sin(t\sqrt{m}).$$

Nous devons, en terminant, faire observer que la formule (β) de notre septième article est comprise comme cas particulier dans la formule (γ) de l'article actuel. On remplira en effet les conditions imposées à la fonction $\mathfrak{F}(x, y)$, que la formule (γ) contient, en la réduisant à une fonction $F(x)$ de x seulement, pourvu que l'on ait

$$F(o) = o$$

et

$$F(-x) = -F(x).$$

Cela étant, la formule (γ) nous donne

$$\sum\sum(-1)^{m''-1}F(2^{\alpha''}d''+m') = \sqrt{m}\,F(\sqrt{m}),\ \text{ou} = o,$$

suivant que m est ou n'est pas un carré : c'est précisément notre ancienne formule (β).