

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

SAINT-GUILHEM

**Mémoire sur la poussée des terres avec ou sans surcharge**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 2<sup>e</sup> série*, tome 4 (1859), p. 57-71.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1859\\_2\\_4\\_57\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1859_2_4_57_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

---

MÉMOIRE  
SUR  
LA POUSSÉE DES TERRES  
AVEC OU SANS SURCHARGE;

PAR M. SAINT-GUILHEM,  
Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées.

---

1. Dans un travail important, sur la *stabilité des revêtements*, publié dans le n° 13 du *Mémorial du Génie*, M. Poncelet a fait connaître des formules graphiques d'une élégance très-remarquable, pour déterminer la poussée exercée contre une paroi plane par un remblai sans surcharge, ou avec une surcharge constante, uniformément répartie par rapport à un plan horizontal. Ses formules sont applicables à un remblai prismatique quelconque à arêtes horizontales parallèles à la paroi, mais à la condition que l'on connaisse d'avance, ou que l'on ait déterminé par un tâtonnement préalable la face du remblai, qui est rencontrée par le plan de rupture. Elles ne s'appliquent pas, par conséquent, au cas où le profil du remblai est une courbe donnée.

Depuis la publication du travail de M. Poncelet, la question est restée stationnaire [\*].

Nous nous proposons, dans ce qui va suivre, de déterminer directement le plan de rupture et la poussée d'un remblai dont le profil est un polygone ou une courbe quelconque, et qui est soumis à des pressions verticales variables dans son profil suivant une loi quelconque. Cette solution sera, comme on voit, beaucoup plus générale sous tous les rapports que celle de M. Poncelet.

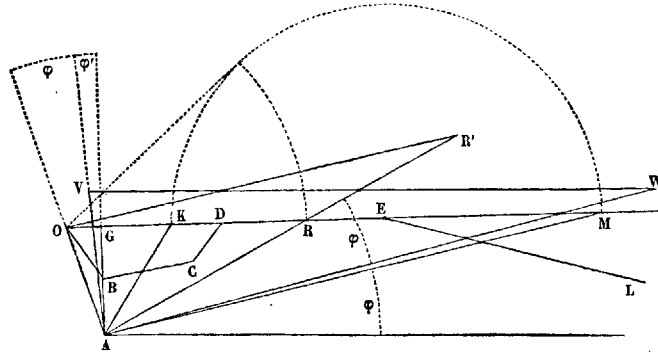
---

[\*] Le Mémoire de M. Poncelet a paru en 1840. Ceux qui se sont occupés depuis de la poussée des terres ont répété, en d'autres termes, ce qu'il a dit, ou sont restés en arrière.

Nous n'arriverons, il est vrai, à la solution que par des approximations successives; mais nous ferons voir que les calculs auxquels donnent lieu ces approximations, sont nécessaires pour trouver le centre de pression de la poussée.

Soit ABCDEL (*fig. 1*) un polygone représentant le profil du rem-

FIG. 1.



blai dont il s'agit, et AB le profil de la paroi. Nous supposons que la surcharge est en profil une suite de points matériels placés sans liaison sur le profil BCDEL, et dont le poids varie suivant une loi quelconque. Nous allons chercher quelle sera la poussée que reçoit la paroi AB et le centre de pression sur cette paroi.

Nous admettrons que les terres qui forment le remblai n'ont aucune cohésion entre elles ni aucune adhérence avec la paroi [\*]. Cette hypothèse tend à augmenter la poussée réelle, ce qui est sans inconvénient dans les applications.

Cela posé, considérons le massif de remblai comme tendant à se rompre et à s'ébouler suivant le plan AR, qui rencontre en R le côté DE du profil. Soient Q le poids du prisme d'éboulement, y compris celui de la surcharge correspondante à la portion BCDR du profil; R la résultante des réactions normales de la paroi et de celles dues au frottement qui tend à s'exercer contre ce plan; S la résultante des réactions normales du talus AR et de celles dues au frottement qui tend à s'exercer

[\*] Dans un Mémoire inséré en 1843 dans ce Recueil, nous avons tenu compte de ces forces, mais dans le cas seulement d'un remblai sans surcharge.

également contre ce plan. Il est évident que les trois forces Q, R, S seront en équilibre et par conséquent se rencontreront en un même point.

Appelons  $\varphi$  et  $\varphi'$  les angles du frottement des terres sur elles-mêmes et sur la paroi, c'est-à-dire les angles sous lesquels les terres glissent sur elles-mêmes ou sur la paroi; les forces S et R tendant toutes deux à faire remonter le massif, il est facile de voir que la première sera normale à une droite AW, située à droite de AR, et faisant avec celle-ci un angle égal à  $\varphi$ ; que la seconde sera normale à une droite AV, située à gauche de AB, et faisant avec celle-ci un angle égal à  $\varphi'$ ; donc, si l'on mène une horizontale quelconque VW qui rencontre les droites AV, AW en V et W, les trois forces Q, R, S seront perpendiculaires aux trois côtés du triangle AVW [\*], et par conséquent seront proportionnelles aux côtés auxquels elles sont perpendiculaires.

Si l'on fait tourner le triangle AVW dans son plan, de manière que AW vienne coïncider avec AR, le côté AV coïncidera avec une droite AO, qui fait avec AB un angle égal à  $\varphi_1 = \varphi + \varphi'$ ; la droite VW deviendra parallèle au talus naturel des terres, puisqu'elle s'est inclinée sur l'horizon d'un angle égal à  $\varphi$ ; donc, si l'on mène par le point O, où la droite OA vient rencontrer le côté DE prolongé, une droite OR', parallèle à une droite AM, qui représente le talus naturel des terres, le triangle AOR', formé par les trois droites AO, OR', AR', sera semblable au triangle AVW, et aura, par conséquent, ses côtés proportionnels aux trois forces R, Q, S; donc on aura

$$\frac{R}{Q} = \frac{AO}{OR'}$$

Or si l'on appelle P la poussée exercée perpendiculairement contre la paroi AB, on aura évidemment

$$P = R \cos \varphi';$$

donc

$$P = Q \cos \varphi' \cdot \frac{AO}{OR'} = Q \cos \varphi' \cdot \frac{AO}{AM} \cdot \frac{AM}{OR'}$$

[\*] La considération de ce triangle est due à M. Poncelet.

donc, à cause des triangles semblables ORR', ARM,

$$(1) \quad P = Q \cos \varphi' \frac{AO}{AM} \cdot \frac{RM}{OR}.$$

Désignons par  $a, b, c$  les trois côtés OA, AM, MO du triangle AOM; par  $h$  la perpendiculaire abaissée du point A sur OM; par  $r_0, r$  les deux rayons vecteurs OD, OR comptés à partir du point O sur la ligne OM; par  $\Sigma_0, \Sigma$  la somme des surcharges de B en D, de B en R; par  $n^2$  la surface du polygone ABCDOA; enfin, par  $\sigma$  la pression verticale au point R de la droite DE, rapportée à l'unité de longueur de cette droite, on aura, en considérant une longueur du remblai égale à l'unité, et en supposant la densité des terres égale à 1,

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q = \Sigma + \frac{1}{2}hr - n^2, \\ \Sigma = \Sigma_0 + \int_{r_0}^r \sigma dr, \\ RM = c - r. \end{array} \right.$$

Au moyen des notations admises et de ces relations, l'équation (1) devient

$$(3) \quad P = \cos \varphi' \cdot \frac{a}{b} \left( \Sigma + \frac{1}{2}hr - n^2 \right) \frac{c-r}{r}.$$

Cette poussée correspond à un plan de rupture quelconque; pour avoir la poussée maximum qui est, d'après Coulomb, celle qui se réalise dans la nature, il suffira d'égaliser à 0 la dérivée de l'expression (3) par rapport à  $r$ , et d'en tirer la valeur de  $r$ . Si nous effectuons ce calcul, en observant que la dérivée de  $\Sigma$  est  $\sigma$ , il vient

$$(4) \quad \left( \sigma + \frac{1}{2}h \right) (c-r)r - c \left( \Sigma + \frac{1}{2}hr - n^2 \right) = 0,$$

ou, en réduisant,

$$(5) \quad r^2 \left( \sigma + \frac{1}{2}h \right) - \sigma cr + c(\Sigma - n^2) = 0.$$

Telle est l'équation générale d'où l'on déduira, en mettant pour  $\sigma$  et  $\Sigma$

leurs valeurs, la position du plan de rupture correspondant à un point donné A de la paroi, lorsque l'on connaîtra le côté DE qui est rencontré par le plan de rupture.

Cherchons l'expression de la poussée pour un plan de rupture donné; à cet effet, mettons dans l'expression

$$(3) \quad P = \cos \varphi' \cdot \frac{a}{b} \left( \Sigma + \frac{1}{2} hr - n^2 \right) \frac{c-r}{r},$$

à la place de  $\Sigma + \frac{1}{2} hr - n^2$ , sa valeur tirée de l'équation (4), on aura

$$(6) \quad P = \cos \varphi' \frac{a}{bc} \left( \sigma + \frac{1}{2} h \right) (c-r)^2,$$

qui est l'expression cherchée.

**2.** Avant d'aller plus loin, considérons quelques cas particuliers qui ont dans les applications une grande importance.

1°. S'il n'y a point de surcharge, on a

$$\sigma = 0, \quad \Sigma = 0,$$

et la formule (5) devient

$$(7) \quad r = \sqrt{\frac{n^2}{\frac{1}{2}h} \cdot c};$$

or si l'on prend, à partir du point O, sur la ligne OE, une longueur OK, telle que le triangle OAK soit équivalent au polygone OABCDO, on aura  $OK = \frac{n^2}{\frac{1}{2}h}$ , et, par conséquent,  $r = \sqrt{OK \cdot c}$ ; donc r ou OR est

moyen proportionnel entre OK et OM; donc il est très-facile, au moyen d'une construction géométrique très-simple indiquée sur la figure, d'obtenir dans ce cas le plan de rupture. Cette construction a été donnée par M. Poncelet.

2°. Si la surcharge est constante et uniformément répartie par rapport à l'horizontale, en désignant par  $\varpi$  la pression sur l'unité de lon-

gueur horizontale; par  $p$  la projection horizontale de la droite BO; par  $\epsilon$  l'angle que la ligne DE fait avec l'horizontale dirigée du côté des terres, on aura évidemment

$$\sigma = \varpi \cos \epsilon, \quad \Sigma = \varpi (r \cos \epsilon - p).$$

Au moyen de ces valeurs, l'équation (5) devient

$$r^2 \left( \varpi \cos \epsilon + \frac{1}{2} h \right) - c (n^2 + \varpi p) = 0,$$

d'où

$$(8) \quad r = \sqrt{\frac{n^2 + \varpi p}{\varpi \cos \epsilon + \frac{1}{2} h} \cdot c}.$$

Dans le cas où le remblai est terminé par un plan qui aboutit au sommet de la paroi, si l'on désigne par  $u$  la distance OG, on aura  $p = u \cos \epsilon$  et  $n^2 = u \frac{1}{2} h$ ; alors l'équation (8) devient

$$(9) \quad r = \sqrt{u \cdot c}.$$

D'où l'on voit que le plan de rupture est le même que si la surcharge n'existait pas. L'équation (6) montre, d'ailleurs, que dans ce cas la poussée est augmentée dans le rapport de  $\sigma + \frac{1}{2} h$  à  $\frac{1}{2} h$ .

3°. Si les surcharges sont distribuées d'une manière quelconque, depuis le point B jusqu'au point D, dont le rayon vecteur est  $r_0$ , mais d'une manière uniforme sur la droite DE, à partir du point D, on aura

$$\Sigma = \Sigma_0 + \sigma (r - r_0);$$

en substituant cette valeur dans l'équation (5), on a

$$r^2 \left( \sigma + \frac{1}{2} h \right) - c (n^2 + \sigma r_0 - \Sigma_0) = 0,$$

d'où

$$(10) \quad r = \sqrt{\frac{n^2 + \sigma r_0 - \Sigma_0}{\sigma + \frac{1}{2} h} \cdot c}.$$

Les formules (6) et (10) feront connaître, sans difficulté, la position du plan de rupture et la poussée.

3. *Méthode générale.* — Pour qu'on puisse appliquer directement l'équation (5) à la recherche du plan de rupture, il faut, 1° que le remblai ait un profil polygonal; 2° que l'on connaisse d'avance le côté du profil qui est rencontré par le plan de rupture; 3° qu'après avoir substitué pour  $\Sigma$  et  $\sigma$  leurs valeurs en  $r$ , l'équation puisse se résoudre. Une considération bien simple, et qui néanmoins n'a pas été remarquée, permet d'éviter toutes ces difficultés.

Au lieu de chercher le plan de rupture qui correspond à un point A de la paroi, nous allons chercher quel est le point A de la paroi auquel correspond un plan de rupture qui passe par un point donné R du profil du remblai.

G étant le point où le côté DE prolongé vient rencontrer le prolongement de la paroi, faisons

$$\begin{aligned} OG = u, \quad GM = v, \quad GR = w, \quad GA = z, \quad AGM = \theta, \quad GAM = \lambda, \\ GAO = \varphi_1, \quad \text{surface BGDC} = m^2. \end{aligned}$$

On aura d'abord

$$(11) \quad r = u + w, \quad c = u + v, \quad n^2 = \frac{1}{2}uz \sin \theta + m^2, \quad h = z \sin \theta.$$

Au moyen de ces valeurs, l'équation (5) devient

$$(12) \quad \begin{cases} -\frac{1}{2}uvz \sin \theta - \sigma uv + uzv \sin \theta + \sigma uv - \sigma vw \\ + \frac{1}{2}zw^2 \sin \theta + (u + v)(\Sigma - m^2) + \sigma w^2 = 0. \end{cases}$$

Pour éliminer  $u$  et  $v$ , remarquons que dans les triangles OAG, GAM on a les relations

$$(13) \quad u = \frac{\sin \varphi_1}{\sin (\theta - \varphi_1)} \cdot z, \quad v = \frac{\sin \lambda}{\sin (\lambda + \theta)} \cdot z,$$



que nous écrivons sous la forme abrégée

$$(14) \quad u = kz, \quad v = lz.$$

Au moyen de ces valeurs, l'équation (12) devient

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} klz^3 \sin \theta + (\sigma l - w \sin \theta) kz^2 \\ - \left[ \sigma w (k - l) + \frac{1}{2} w^2 \sin \theta + (k + l) (\Sigma - m^2) \right] z - \sigma w^2 = 0, \end{array} \right.$$

qui est la relation cherchée; cette équation donnera directement la valeur de  $z$ , quand on connaîtra le point R, quels que soient le profil du remblai et la loi de variation de la surcharge, car connaissant le point R, on connaît  $\theta$ ,  $w$ ,  $\sigma$  et  $\Sigma$ : ainsi, par la résolution d'une équation du troisième degré, on pourra déterminer rigoureusement, sans aucun tâtonnement, le plan de rupture correspondant à tel point du profil que l'on voudra.

Connaissant  $z$ , pour calculer la valeur de P, on observera qu'on a

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin(\lambda + \theta)}{\sin(\theta - \varphi_1)}, \quad c = u + v = \frac{\sin \theta \sin(\lambda + \varphi_1)}{\sin(\lambda + \theta) \sin(\theta - \varphi_1)} z, \quad v = lz,$$

on en déduira

$$(16) \quad P = \cos \varphi' \frac{\sin^2(\lambda + \theta)}{\sin \theta \sin(\lambda + \varphi_1)} \cdot \frac{\left( \sigma + \frac{1}{2} z \sin \theta \right) (lz - w)^2}{z}.$$

Telle est l'expression la plus générale de la poussée pour un profil polygonal quelconque du remblai, et pour une surcharge soumise à une loi de variation quelconque.

*Remarque I.* — Les côtés du polygone peuvent être aussi petits que l'on voudra, par conséquent le profil du remblai peut être une courbe quelconque;  $w$  est alors la portion de la tangente à cette courbe, comprise entre le point donné sur le profil et la paroi.

*Remarque II.* — Si la surcharge est nulle, on aura  $\Sigma = 0$ ,  $\sigma = 0$ ,

et l'équation (15) se réduira à l'équation du second degré

$$(17) \quad z^2 - \frac{2w}{l}z + \frac{2(k+l)m^2 - w^2 \sin \theta}{kl \sin \theta} = 0; \quad [*]$$

d'où l'on déduira

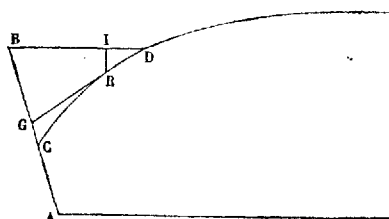
$$(18) \quad z = \frac{w}{l} + \sqrt{\frac{k+l}{kl} \left( \frac{w^2}{l} - \frac{2m^2}{\sin \theta} \right)}.$$

On a pris le radical avec le signe +, parce qu'on a toujours

$$v > w \quad \text{ou} \quad lz > w, \quad \text{d'où} \quad z > \frac{w}{l}.$$

*Remarque III.* — Si la surcharge est un liquide homogène dont la densité est  $\rho$ , en désignant par  $y$  l'ordonnée du point R (*fig. 2*) par

FIG. 2.



rapport à la surface du liquide, par  $\epsilon$  l'angle que la tangente GR au même point fait avec l'horizontale, on aura

$$\epsilon = \lambda + \varphi + \theta - 180^\circ, \quad \sigma = \rho y \cos \epsilon;$$

si la paroi est verticale, on aura

$$\lambda + \varphi = 90^\circ, \quad \sigma = \rho y \sin \theta.$$

[\*] Cette équation se déduit facilement de l'équation (7), en faisant dans celle-ci

$$r = u + w, \quad n^2 = m^2 + \frac{1}{2}uh, \quad h = z \sin \theta, \quad c = u + v.$$

Si l'on pose  $\frac{2m^2}{h} = t$ , l'équation (7) se met sous la forme

$$(u + w)^2 = (u + t)(u + v).$$

Cette formule résout tous les problèmes de la poussée des terres sans surcharges.

On trouvera d'ailleurs aisément, si  $\varphi' = 0$ , les relations suivantes :

$$l = \frac{\cos \varphi}{\cos(\theta - \varphi)}, \quad \frac{1}{kl} = \frac{\sin 2(\theta - \varphi)}{\sin 2\varphi},$$

$$\frac{k-l}{kl} = -\frac{2 \sin(\theta - 2\varphi)}{\sin 2\varphi}, \quad \frac{k+l}{kl \sin \theta} = \frac{2}{\sin 2\varphi}.$$

*Détermination du centre de pression de la poussée.* — La distance du centre de pression sur le parement AB au point B (*fig. 1*) est égale au moment de la poussée par rapport à ce point, divisé par l'intensité de la poussée; on sait trouver la poussée: il reste à trouver son moment par rapport au point B.

Or, la poussée sur le parement BA étant P, la poussée sur un petit élément du parement BA au point A sera  $dP$ , et son moment par rapport au point B sera  $zdP$ . Donc le moment de la poussée sur une portion quelconque du parement comptée à partir du point B, par rapport au point B, sera  $\int_0^P zdP$ . Donc ce moment sera représenté géométriquement par l'aire d'une courbe dont l'abscisse est P et l'ordonnée z.

Pour calculer cette aire, lorsque P est une fonction compliquée de z, on devra, dans la pratique, calculer les poussées correspondantes à divers points du parement ou à divers points du profil suffisamment rapprochés; construire, d'après ces données, la courbe dont P est l'abscisse et z l'ordonnée, et déduire de cette construction par les méthodes connues l'aire de la courbe.

On voit par là que, pour calculer le centre de pression, il est nécessaire de connaître les poussées correspondantes à divers points du parement ou du profil peu éloignés les uns des autres; que, par suite, les calculs par lesquels on passe pour arriver à la poussée que supporte la paroi, servent tous pour la détermination du centre de pression, ainsi que nous l'avons dit au commencement de ce Mémoire.

*Remarque.* — Dans le cas particulier où la surface du remblai est un plan aboutissant à l'arête supérieure de la paroi et où la surcharge est uniformément répartie sur ce plan, les quantités  $u$  et  $c$  sont proportionnelles à z; il en est de même en vertu de la formule (9) de  $r$  ou

$u + w$ , et, par conséquent, de  $w$ ; donc la formule (16) peut se mettre sous la forme

$$P = A \left( \sigma + \frac{1}{2} z \sin \theta \right) z,$$

$A$  étant une constante; le moment de la poussée par rapport au point  $B$  sera, conséquemment,

$$\int_0^z A (\sigma + z \sin \theta) z dz = A z^2 \left( \frac{\sigma}{2} + \frac{z \sin \theta}{3} \right),$$

et la distance du centre de pression au point  $B$  sera

$$\frac{z \left( \frac{\sigma}{2} + \frac{z \sin \theta}{3} \right)}{\sigma + \frac{1}{2} z \sin \theta} = \frac{3\sigma + 2z \sin \theta}{6\sigma + 3z \sin \theta} \cdot z,$$

laquelle, lorsque  $\sigma = 0$ , devient  $\frac{2}{3} z$ , expression connue.

NOTE I.

*Des formules les plus usuelles.*

Les formules les plus usuelles sont relatives à une surcharge constante; dans cette hypothèse, nous considérerons deux cas particuliers: 1° celui où le remblai est arasé au niveau de la paroi; 2° celui où la surface supérieure du remblai est un plan aboutissant à l'arête supérieure de la paroi: nous avons vu que, dans ces deux cas, le plan de rupture est le même que s'il n'y avait pas de surcharge.

Nous admettrons que le frottement sur le parement du mur est négligeable, c'est-à-dire qu'on a  $\varphi' = 0$  [\*].

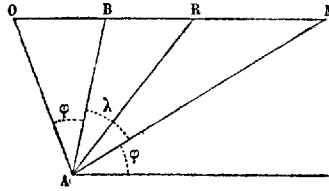
[\*] M. Audé, lieutenant-colonel du Génie, a fait sur la poussée des terres une suite d'expériences très-remarquables, qui ont été publiées au n° 15 du *Mémorial du Génie*.

Nous avons comparé, dans les *Annales des Ponts et Chaussées*, les résultats de ces expériences avec ceux que donne la théorie en faisant toujours  $\varphi' = 0$ ; nous avons trouvé entre les uns et les autres un accord des plus satisfaisants.

PREMIER CAS. — Où le remblai est arasé au niveau de l'arête supérieure de la paroi.

Soient AB (fig. 3) la paroi dont il s'agit; BM la surface horizontale du

FIG. 3.



remblai arasée au niveau du point B; AM le talus naturel des terres faisant un angle égal à  $\varphi$  avec l'horizon et un angle égal à  $\lambda$  avec AB; AO une droite faisant avec AB, du côté opposé aux terres, un angle égal à  $\varphi$ ; AR le plan de rupture, en sorte qu'on a  $OR = \sqrt{OB \cdot OM}$ .

Si l'on fait passer un cercle par les trois points A, B, M, la droite OA sera tangente à ce cercle en A, puisque l'on a  $AMB = OAB$ ; donc on aura  $OA = \sqrt{OB \cdot OM} = OR$ ; donc le triangle OAR est isocèle, et, pour déterminer le point R, il suffira tout simplement de prendre  $OR = OA$ .

On peut le déterminer autrement : on a

$$OAR + ARO = OAM + AMO = \lambda + 2\varphi;$$

donc

$$OAR = \frac{\lambda}{2} + \varphi, \text{ donc } BAR = \frac{\lambda}{2};$$

donc la droite AR divise l'angle BAM en deux parties égales. De là ce théorème dû à Français : *Le plan de rupture divise l'angle que forme la paroi avec le talus naturel des terres en deux parties égales.*

Cela posé, faisons, comme dans notre Mémoire,

$$AB = z, \quad BM = \nu, \quad BR = \omega.$$

Les triangles BAR, MAR (fig. 3) donnent les relations

$$\frac{AR}{z} = \frac{\sin(\lambda + \varphi)}{\sin\left(\frac{\lambda}{2} + \varphi\right)}, \quad \frac{\nu - \omega}{AR} = \frac{\sin\frac{\lambda}{2}}{\sin\varphi}.$$

Multipliant ces deux égalités membre à membre, il vient

$$v - w = z \frac{\sin \frac{\lambda}{2}}{\sin \varphi} \cdot \frac{\sin \lambda + \varphi}{\sin \left( \frac{\lambda}{2} + \varphi \right)}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (16) à la place de  $lz - w$ , et observant que l'on a  $\varphi' = 0$ ,  $\sin(\lambda + \theta) = \sin \varphi$ ,  $\sin \theta = \sin(\lambda + \varphi)$ , il vient

$$P = \left[ \frac{\sin \frac{\lambda}{2}}{\sin \left( \frac{\lambda}{2} + \varphi \right)} \right]^2 \left[ \sigma + \frac{1}{2} z \sin(\lambda + \varphi) \right] z.$$

Telle est l'expression de la poussée.

SECOND CAS. — Où la surface supérieure du remblai est un plan incliné aboutissant à l'arête supérieure de la paroi.

Faisons (fig. 3)

$AB = z$ ,  $OB = u$ ,  $BM = v$ ,  $BR = w$ ,  $OAB = \varphi$ ,  $BAM = \lambda$ ,  $ABM = \theta$ .

On a toujours, en vertu de la formule (9),

$$(u + w)^2 = u(u + v),$$

d'où

$$\frac{u + w}{u} = \sqrt{\frac{u + v}{u}}.$$

Or on a

$$\frac{u + v}{OA} = \frac{\sin(\lambda + \varphi)}{\sin(\lambda + \theta)}, \quad \frac{OA}{u} = \frac{\sin \theta}{\sin \varphi}.$$

Donc, en multipliant ces équations terme à terme,

$$\frac{u + v}{u} = \frac{\sin(\lambda + \varphi) \cdot \sin \theta}{\sin \varphi \cdot \sin(\lambda + \theta)}.$$

On a d'ailleurs

$$u = \frac{\sin \varphi}{\sin(\theta - \varphi)} z \bar{r}$$

donc

$$u + w = z \sqrt{\frac{\sin(\lambda + \varphi) \sin \theta \sin \varphi}{\sin^2(\theta - \varphi) \sin(\lambda + \theta)}}$$

$$u + v = z \frac{\sin \theta \cdot \sin(\lambda + \varphi)}{\sin(\lambda + \theta) \sin(\theta - \varphi)}$$

Si l'on pose

$$R = \sqrt{\frac{\sin(\lambda + \theta) \sin \varphi}{\sin(\lambda + \varphi) \sin \theta}},$$

on aura

$$v - w = z \frac{\sin \theta \sin(\lambda + \varphi)}{\sin(\lambda + \theta) \sin(\theta - \varphi)} \cdot (1 - R);$$

la formule (16) deviendra, au moyen de celle-ci,

$$P = \frac{\sin \theta \sin(\lambda + \varphi)}{\sin^2(\theta - \varphi)} (1 - R)^2 \left( \sigma + \frac{1}{2} z \sin \theta \right) z.$$

Telle est la formule la plus générale pour le cas que nous considérons.

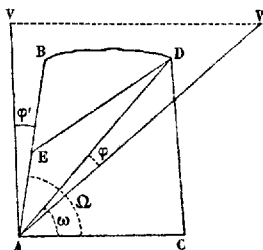
Dans les deux cas que nous venons d'examiner, le centre de pression est au tiers de la longueur de la paroi, à partir du bas.

#### NOTE II.

*Détermination de la poussée d'un remblai prismatique compris entre deux parois planes.*

Soient AB, CD (fig. 4) les deux parois entre lesquelles est compris

FIG. 4.



un remblai de terre; on demande la poussée de ce remblai sur la paroi AB, par exemple.

On déterminera le point E où le plan de rupture correspondant au point D vient rencontrer BA.

Il pourra arriver que le point E soit au-dessous ou au-dessus du point A.

S'il est au-dessous, la poussée sera celle qui correspond à un remblai d'une largeur indéfinie.

S'il est au-dessus, le maximum de la poussée sur BA correspondra au plan de rupture DA. Si l'on appelle alors  $\omega$  et  $\Omega$  les angles que les plans AD et AB font avec le plan horizontal AC, Q la surface BAD,  $\varphi$  le frottement des terres sur elles-mêmes,  $\varphi'$  le frottement des terres sur BA, on aura, en raisonnant comme dans l'article 1<sup>er</sup> du Mémoire,

$$\frac{P}{\cos \varphi'} = \frac{Q \cdot AV}{VW} = \frac{Q \cdot \sin(\omega - \varphi)}{\sin(\Omega - \omega + \varphi + \varphi')},$$

ou

$$P = Q \frac{\sin(\omega - \varphi) \cos \varphi'}{\sin(\Omega - \omega + \varphi + \varphi')}.$$

Telle est la poussée que supporte le plan AB.

Pour déterminer le centre de pression, on déterminera la poussée correspondante à un nombre de points suffisant du parement AB, ou plutôt de la surface BD.

Puis on opérera comme il a été dit dans le Mémoire.

*Observation.* — Rien ne démontre que les plans de rupture correspondants aux divers points du parement situés au-dessous du point E, passent tous par le point D; mais cette hypothèse s'accorde d'une manière remarquable avec les expériences de M. Audé, et elle a l'avantage de donner lieu à des calculs très-simples.

