JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur quelques formules générales qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres (septième article)

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 4 (1859), p. 1-8.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1859_2_4__1_0>

JOURNAL
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

SUR QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES QUI PEUVENT ÊTRE UTILES DANS LA THÉORIE DES NOMBRES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

SEPTIÈME ARTICLE.

Je continue dans ce volume la série d'articles que j'ai commencée sous le même titre dans le volume précédent. On a vu comment en partageant un nombre en deux ou en plusieurs parties entières, qu'on décompose ensuite elles-mêmes en un produit de deux facteurs, on arrive à des formules d'un genre singulier, dont l'utilité dans la théorie des nombres est manifeste. Ces formules trouveront aussi leur usage dans la théorie des suites infinies, qui n'est au fond qu'une dépendance de la théorie des fonctions numériques. Prenons, par exemple, la formule

$$(a)\sum\left\{\sum\sum[f(d'-d'')-f(d'+d'')]\right\}=2^{\alpha-1}\sum d[f(0)-f(2^\alpha d)],$$

de notre deuxième article (Cahier de mai 1858, p. 194), laquelle se rapporte à la décomposition d'un nombre pair $p = 2^\alpha m = 2^\alpha d\delta$ en deux entiers impairs m', m'', en sorte que

$$p = m' + m'' = d'\delta' + d''\delta''.$$

En multipliant par x^p les deux membres de l'équation (a) et faisant la somme pour $p = 2, 4, 6,\ldots$, à l'infini, on en conclura sans peine une équation concernant une classe très-étendue de séries doubles que l'on ramène à une série simple, à savoir on a

$$(\alpha)\qquad \sum\sum \frac{[f(s'-s'')-f(s'+s'')]x^{s'+s''}}{(1-x^{2s'})(1-x^{2s''})} = \sum \frac{s[f(0)-f(2s)]x^{2s}}{1-x^{4s}}.$$

L'équation (α) comprend comme cas particuliers plusieurs formules de la théorie des fonctions elliptiques. On suppose la fonction f telle, que $f(s''-s')=f(s'-s'')$. Quant à x, c'est une variable indépendante; mais il faut bien entendu que les séries convergent. La double sommation au premier membre porte sur s' et sur s'', qui sont des nombres impairs variant de 1 à ∞, tandis que la sommation au second membre porte sur s, qui varie aussi de 1 à ∞, mais qui est indifféremment un nombre pair ou un nombre impair. Si l'on admet la formule (a), dont la démonstration directe est très-facile et complétement élémentaire [*], on vérifiera tout de suite l'exactitude de l'équation (α) en développant les deux membres suivant les puissances de x. Et, réciproquement, si la formule (α) est établie (et l'on peut en effet y arriver à priori par une analyse assez simple) la formule (a) s'ensuivra. Toutes les formules de nos six premiers articles sont ainsi propres à un double usage, et il en sera de même de celles que nous voulons y ajouter. Mais le moment n'est pas venu d'entrer à ce sujet dans de plus longs détails. A présent encore, je me contente, comme dans mes anciens articles, de poser des formules générales, et je n'indique d'applications qu'autant qu'il en faut pour bien fixer le sens de nos équations. Les développements ordonnés, et même les démonstrations, viendront plus tard.

Dans la nouvelle formule dont je vais d'abord parler, on considère un nombre quelconque pair ou impair, mais on ne met pas en évidence la puissance de 2 qui peut le diviser : on le désigne donc par la simple lettre m. Puis, comparant ce nombre aux carrés de grandeur moindre, on écrit, de toutes les manières possibles,

$$m = m'^2 + m'',$$

[*] J'ai donné, dans mon cours au Collége de France, cette démonstration, qui s'étend à la formule générale (b) de l'article cité, et même, avec de légères modifications, aux formules des trois articles suivants. Elle a pour base le fait arithmétique ou algébrique si bien mis en évidence par M. Dirichlet dans le cahier de mai 1856, p. 210.

m' étant un nombre entier pair ou impair, positif ou négatif, ou même zéro, tandis que m'' (qui peut être aussi pair ou impair) est essentiellement positif. Enfin, on décompose m'' en facteurs et l'on pose

$$m'' = 2^{\alpha''} d'' \delta'',$$

d'où il suit que

$$m = m'^2 + 2^{\alpha''} d'' \delta'',$$

l'exposant α'' pouvant être nul, et d'', δ'' étant des entiers positifs impairs.

Maintenant formons la somme double

$$S = \sum\sum (-1)^{m''-1} F(2^{\alpha''} d'' + m'),$$

que l'on pourrait écrire, avec plus de netteté peut-être,

$$\sum \left[(-1)^{m''-1} \sum F(2^{\alpha''} d'' + m') \right],$$

et où les deux $\sum$ se rapportent successivement à tous les diviseurs d'' de chaque nombre m'', puis à tous les groupes (m', m''). Si l'on suppose la fonction $F(x)$ impaire, je veux dire si l'on suppose

$$F(0) = 0,$$

et

$$F(-x) = -F(x),$$

pour toutes les valeurs de x que l'on aura à employer, on trouvera sans peine la valeur de S. On a, en effet,

$$S = 0$$

quand m n'est pas un carré, tandis que

$$S = \sqrt{m} \,.\, F(\sqrt{m})$$

quand m est un carré.

En d'autres termes, on a

$$(\beta) \qquad \sum\sum (-1)^{m''-1} F(2^{\alpha''} d'' + m') = \sqrt{m} \,.\, F(\sqrt{m}), \text{ ou } = 0,$$

suivant que m est ou n'est pas un carré.

Soit d'abord $m = 1$; on ne pourra faire que $m' = 0$, $m'' = 1$, $2^{\alpha''} d'' = 1$, et le premier membre donnera $F(1)$, comme le second, l'unité étant un carré.

Soit ensuite $m = 2$; on pourra faire $m' = 0$, $m'' = 2$, $2^{\alpha''} d'' = 2$, et aussi $m' = 1$, $m'' = 1$, $2^{\alpha''} d'' = 1$, enfin $m' = -1$, $m'' = 1$, $2^{\alpha''} d'' = 1$. Et la valeur du premier membre, qui doit ici être nulle, sera en effet

$$-F(2) + F(2) + F(0) = F(0) = 0.$$

Pour $m = 3$, on devra trouver de même zéro, et c'est ce qui arrive d'après les valeurs de m', m'' et $2^{\alpha''} d''$, qui sont

$$\begin{array}{llllll} m' = 0, & m'' = 3, & 2^{\alpha''} d'' = 3; & m' = 0, & m'' = 3, & 2^{\alpha''} d'' = 1; \\ m' = 1, & m'' = 2, & 2^{\alpha''} d'' = 2; & m' = -1, & m'' = 2, & 2^{\alpha''} d'' = 2; \end{array}$$

d'où

$$F(3) + F(1) - F(3) - F(1) = 0.$$

Mais pour $m = 4$, qui est un carré, on devra trouver

$$2\,F(2).$$

Or ici les valeurs de m', m'', $2^{\alpha''} d''$ sont

$$m' = 0, \quad m'' = 4, \quad 2^{\alpha''} d'' = 4;$$

$$\begin{array}{llllll} m' = 1, & m'' = 3, & 2^{\alpha''} d'' = 3; & m' = 1, & m'' = 3, & 2^{\alpha''} d'' = 1; \\ m' = -1, & m'' = 3, & 2^{\alpha''} d'' = 3; & m' = -1, & m'' = 3, & 2^{\alpha''} d'' = 1; \end{array}$$

ce qui donne bien

$$-F(4) + F(4) + F(2) + F(2) + F(0) = 2\,F(2).$$

Une des valeurs les plus simples qu'on puisse prendre pour $F(x)$ est

$$F(x) = x.$$

La formule (β) se réduit alors à

$$\sum\sum (-1)^{m''-1} \left(2^{\alpha''} d'' + m'\right) = m, \text{ ou } = 0,$$

suivant que m est ou n'est pas un carré. Mais comme les valeurs de m', autres que zéro, sont deux à deux égales et de signes contraires, en sorte que chaque groupe (m', m'') est accompagné du groupe opposé $(-m', m'')$, la formule peut être réduite à

$$\sum\sum(-1)^{m''-1}2^{\alpha''}d''=m, \quad \text{ou} \quad =0,$$

suivant que m est ou n'est pas un carré.

Pour développer les conséquences curieuses que renferme cette équation, j'observerai d'abord que pour tout nombre *pair*, $m=2^\alpha n=2^\alpha d\delta$ (n, d et δ impairs), on a

$$\sum 2^\alpha d=2^\alpha\sum d=2^\alpha\zeta_1(n),$$

en désignant à l'ordinaire par $\zeta_1(n)$ la somme des diviseurs de n. D'un autre côté

$$\zeta_1(m)=(2^{\alpha+1}-1)\zeta_1(n)$$

et

$$\zeta_1\left(\frac{m}{2}\right)=(2^\alpha-1)\zeta_1(n);$$

d'où

$$\zeta_1(m)-\zeta_1\left(\frac{m}{2}\right)=2^\alpha\zeta_1(n).$$

Donc

$$\sum 2^\alpha d=\zeta_1(m)-\zeta_1\left(\frac{m}{2}\right).$$

Ceci, je le répète, suppose m pair. Pour m impair, c'est-à-dire pour $\alpha=0$, on aurait naturellement

$$\sum d=\zeta_1(m).$$

Cela posé, revenons à notre équation

$$\sum\sum(-1)^{m''-1}2^{\alpha''}d''=m, \quad \text{ou} \quad =0,$$

et donnons à m' les valeurs successives que m' peut prendre, savoir

$$m'=0, \quad m'=\pm 1, \quad m'=\pm 2,\ldots, \quad m'=\pm\mu,$$

μ^2 étant le plus grand carré au-dessous de m, car on ne pourrait pas prendre $\mu^2 = m$, même quand m est un carré, les valeurs de m'', savoir

$$m'' = m, \quad m'' = m - 1, \quad m'' = m - 4, \ldots, \quad m'' = m - \mu^2,$$

devant être essentiellement positives.

Soit d'abord m pair. La somme

$$\sum\sum (-1)^{m''-1} 2^{\alpha''} d''$$

commencera par un terme négatif répondant à $m' = 0$, $m'' = m$, lequel est égal à

$$-\sum 2^{\alpha} d,$$

c'est-à-dire à

$$-\left[\zeta_1(m) - \zeta_1\left(\frac{m}{2}\right)\right],$$

puisque m est pair.

Les deux termes qui correspondent à $m' = \pm 1$, $m'' = m - 1$, pour lesquels m'' est impair, fourniront ce total,

$$2\zeta_1(m-1).$$

Mais les suivants pour lesquels on a $m' = \pm 2$, $m'' = m - 4$, de sorte que m'' y est pair, donneront

$$-2\left[\zeta_1(m-4) - \zeta_1\left(\frac{m-4}{2}\right)\right];$$

ensuite viendra

$$2\zeta_1(m-9),$$

puis

$$-2\left[\zeta_1(m-16) - \zeta_1\left(\frac{m-16}{2}\right)\right],$$

et ainsi jusqu'à la valeur $m' = \pm \mu$ définie plus haut.

En changeant les signes, nous voyons donc que quand m est pair, la somme

$$\begin{array}{l} \zeta_1(m) - 2\zeta_1(m-1) + 2\zeta_1(m-4) - 2\zeta_1(m-9) + \ldots \\ -\zeta_1\left(\frac{m}{2}\right) \qquad\qquad\qquad - 2\zeta_1\left(\frac{m-4}{2}\right) \end{array}$$

prolongée tant que le nombre placé sous ζ_1 reste positif, est égale à $-m$ ou à o, suivant que m est ou n'est pas un carré.

C'est ainsi que l'on a

$$\zeta_1(2)-\zeta_1(1)-2\zeta_1(1)=3-1-2=0,$$

et

$$\zeta_1(4)-\zeta_1(2)-2\zeta_1(3)=7-3-2.4=-4.$$

Soit ensuite m impair. Le premier terme de la somme

$$\sum\sum(-1)^{m''-1}2^{\alpha''}d''$$

répondant à $m'=0$, $m''=m$, sera

$$\sum d,$$

ou $\zeta_1(m)$. Les deux suivants, qui répondent à $m'=\pm 1$, $m''=m-1$, et qui sont négatifs, donneront, puisque $m-1$ est pair, ce total,

$$-2\left[\zeta_1(m-1)-\zeta_1\left(\frac{m-1}{2}\right)\right].$$

Pour $m'=\pm 2$, $m''=m-4$, on obtiendra, $m-4$ étant impair,

$$2\zeta_1(m-4);$$

mais pour $m'=\pm 3$, $m''=m-9$, m'' pair, il viendra

$$-2\left[\zeta_1(m-9)-\zeta_1\left(\frac{m-9}{2}\right)\right];$$

et ainsi de suite.

On voit donc que, pour tout nombre impair m, la somme

$$\begin{aligned}\zeta_1(m)-2\zeta_1(m-1)&+2\zeta_1(m-4)-2\zeta_1(m-9)&&+2\zeta_1(m-16)-\ldots\\ &+2\zeta_1\left(\frac{m-1}{2}\right)&&+2\zeta_1\left(\frac{m-9}{2}\right)\end{aligned}$$

qui ne doit être prolongée que jusqu'au moment où les nombres sous ζ_1 restent encore >0, est égale à zéro quand m n'est pas un carré, tandis qu'elle est égale à m quand m est un carré.

Le nombre impair m ne peut être un carré qu'autant qu'il est de la forme $8\nu + 1$. Si donc nous le prenons de la forme $8\nu + 5$, ou bien encore de l'une des deux formes $8\nu + 3$, $8\nu + 7$, la somme citée sera toujours nulle. Dans le premier cas, savoir pour $m = 8\nu + 5$, en désignant par s un nombre impair, le quart de $m - s^2$ sera aussi un entier impair, d'où l'on conclura facilement qu'alors

$$\zeta_1(m - s^2) - \zeta_1\left(\frac{m - s^2}{2}\right) = 4\zeta_1\left(\frac{m - s^2}{4}\right),$$

tandis que dans les deux autres cas ($m = 8\nu + 3$ ou $8\nu + 7$), $m - s^2$ étant seulement le double d'un entier impair, on a

$$\zeta_1(m - s^2) - \zeta_1\left(\frac{m - s^2}{2}\right) = 2\zeta_1\left(\frac{m - s^2}{2}\right).$$

Il s'ensuit que pour $m = 8\nu + 5$, on a cette équation

$$\begin{aligned} &\zeta_1(m) + 2\zeta_1(m - 4) + 2\zeta_1(m - 16) + \ldots \\ &\qquad = 8\left[\zeta_1\left(\frac{m - 1}{4}\right) + \zeta_1\left(\frac{m - 9}{4}\right) + \ldots\right], \end{aligned}$$

tandis que pour $m = 8\nu + 3$ ou $8\nu + 7$, on a celle-ci :

$$\begin{aligned} &\zeta_1(m) + 2\zeta_1(m - 4) + 2\zeta_1(m - 16) + \ldots \\ &\qquad = 4\left[\zeta_1\left(\frac{m - 1}{2}\right) + \zeta_1\left(\frac{m - 9}{2}\right) + \ldots\right]. \end{aligned}$$

Ceci conduit à des conséquences curieuses relativement à la décomposition des nombres en cinq carrés : j'en ferai l'objet d'une Note spéciale.

En voilà assez pour que le lecteur soit fixé sur le sens et la portée de la formule (β). Je me bornerai donc ici à dire que l'on obtient d'autres résultats importants en posant par exemple $F(x) = \sin xt$, où t désigne une constante à volonté.