JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

POINSOT

Sur la quantité de mouvement qui est transmise à un corps par le choc d'un point massif qui vient le frapper dans une direction donnée

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 4 (1859), p. 161-170.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1859_2_4__161_0>

SUR LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT

QUI EST TRANSMISE A UN CORPS PAR LE CHOC D'UN POINT MASSIF QUI VIENT LE FRAPPER DANS UNE DIRECTION DONNÉE;

Par M. POINSOT.

---

1. Soient M la masse du corps, G son centre de gravité, et concevons mené par ce centre le plan perpendiculaire à l'un de ses trois axes principaux. On suppose qu'un point massif dont la masse est m, vienne dans ce plan, avec une vitesse donnée v, choquer le corps M au point C, suivant une direction perpendiculaire à la ligne CG; et l'on demande quelle est la quantité de mouvement qui passera dans le corps M en vertu de ce choc.

Il est clair d'abord que le point massif m, qui avant le choc a la vitesse v, n'aura plus après le choc qu'une certaine vitesse u telle, qu'il cessera d'agir sur M, parce que le point C de contact se dérobera devant lui avec la même vitesse. Donc, par le choc, m aura perdu la quantité de mouvement $m(v-u)$; par conséquent M l'aura gagnée, et $m(v-u)$ sera la quantité de mouvement transmise à M.

Il ne s'agit donc que de trouver la vitesse u qui reste à m après le choc. Or, tant que m agit sur M, ces deux corps sont nécessairement en contact; et puisqu'ils sont en contact, on peut supposer que durant cette action, quelque courte qu'elle soit, ils sont attachés l'un à l'autre. Donc la vitesse u que prend le point C du corps M est la même que prendrait le point C d'un système composé de M et m, et qui serait frappé en C par une force mv qui passerait tout entière dans ce système. Or il est bien facile de trouver cette vitesse.

Et en effet, soit g le centre de gravité du système de M et m, nommons x la distance CG, et faisons $\frac{m}{M} = n$; on aura pour l'expression des lignes gG et gC,

$$gG = \frac{nx}{n+1} \quad \text{et} \quad gC = \frac{x}{n+1}.$$

Désignons par MK^2 le moment d'inertie du corps M par rapport à l'axe principal que l'on considère en son centre G, et par $(M+m)K'^2$ celui du système relatif à son centre g; on aura, comme on sait,

$$(M+m)K'^2 = MK^2 + M\left(\frac{nx}{n+1}\right)^2 + m\left(\frac{x}{n+1}\right)^2,$$

d'où l'on tire

$$K'^2 = \frac{(n+1)K^2 + nx^2}{(n+1)^2}.$$

Or la force mv, appliquée au système $M+m$, à la distance $\frac{x}{n+1}$ de son centre de gravité g, donne d'abord à tous les points du système une commune vitesse $\frac{mv}{M+m}$ ou $\frac{nv}{n+1}$; et ensuite cette même force mv fait tourner le système autour de g avec une vitesse angulaire θ, qu'on trouve en faisant

$$mv \cdot \frac{x}{n+1} = (M+m)K'^2\theta:$$

ce qui donne $\theta = \frac{nvx}{(n+1)^2K'^2}$; et par conséquent $\frac{nvx^2}{(n+1)^3K'^2}$ pour la vitesse du point C en vertu de cette rotation θ.

En réunissant ces deux vitesses du point C, lesquelles ont lieu dans le même sens, on a donc, pour la vitesse totale u de ce point C,

$$u = \frac{nv}{n+1} + \frac{nvx^2}{(n+1)^3K'^2};$$

ou bien, en mettant pour K'^2 sa valeur précédente exprimée en K,

$$u = nv \cdot \frac{K^2 + x^2}{(n+1)K^2 + nx^2},$$

et par conséquent

$$v - u = \frac{vK^2}{(n+1)K^2 + nx^2};$$

d'où l'on tire enfin pour la quantité de mouvement $m(v-u)$ qui passe dans M par le choc du point massif m,

$$m(v-u) = mv \cdot \frac{K^2}{(n+1)K^2 + nx^2}.$$

2. On voit, par cette expression, que la quantité de mouvement transmise à M diminue quand x augmente, et qu'elle devient nulle si le choc a lieu à une distance infinie du centre de gravité. Si $x = 0$, c'est-à-dire si le choc se fait au centre de gravité G, la force transmise est $\frac{mv}{n+1}$ comme cela doit être : c'est la plus grande valeur de $m(v-u)$.

Supposons maintenant qu'on regarde m et v comme variables, mais de manière que le produit mv reste toujours le même. On peut demander comment m et v doivent varier avec la distance x, pour que la quantité de mouvement transmise à M soit toujours la même. Or, dans l'expression de cette quantité, le numérateur $mv\mathrm{K}^2$ étant constant, il faut que le dénominateur $(n+1)\mathrm{K}^2 + nx^2$ le soit aussi ; et par conséquent, en effaçant la quantité K^2 qui est constante, il faut qu'on ait

$$n(\mathrm{K}^2 + x^2) = \text{const.} = \mathrm{B}^2,$$

ce qui donne $m = \frac{\mathrm{MB}^2}{\mathrm{K}^2 + x^2}$, et par conséquent

$$v = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{K}^2 + x^2)}{\mathrm{MB}^2},$$

en désignant simplement par P le produit constant mv.

Ainsi m et v doivent varier comme ces deux fonctions réciproques de x, si l'on veut que le point massif m animé de la vitesse v fasse passer dans le corps M la même quantité de mouvement, quelle que soit la distance x du point C où il choque le corps M.

Si, au lieu des constantes B^2 et P on en veut prendre deux autres relatives aux données de la question, soient m_0 et v_0 la masse et la vitesse de m pour le point C qui répond à $x = 0$, on aura

$$m_0 = \frac{\mathrm{MB}^2}{\mathrm{K}^2} \quad \text{et} \quad v_0 = \frac{\mathrm{PK}^2}{\mathrm{MB}^2},$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{B}^2 = \frac{m_0\mathrm{K}^2}{\mathrm{M}} \quad \text{et} \quad \mathrm{P} = m_0 v_0,$$

et par conséquent,

$$m = m_0 \frac{\mathrm{K}^2}{\mathrm{K}^2 + x^2} \quad \text{et} \quad v = v_0 \cdot \frac{\mathrm{K}^2 + x^2}{\mathrm{K}^2}$$

pour les expressions des deux variables m et v.

Ainsi à la distance x du centre de gravité G, il faut donner à la masse m du marteau la valeur $m_0 \cdot \frac{K^2}{K^2+x^2}$, et à la vitesse v de ce marteau la valeur $v_0 . \frac{K^2+x^2}{K^2}$, si l'on veut que le choc du marteau fasse toujours passer dans M la même quantité de mouvement

$$m_0 v_0 \cdot \frac{M}{M+m_0},$$

c'est-à-dire communique au centre de gravité G de M la même vitesse constante

$$v_0 \cdot \frac{m_0}{m_0+M}.$$

3. Mais si l'on transmet ainsi à ce centre G la même vitesse à quelque distance x que l'on frappe, on ne communique point au corps la même vitesse de rotation autour de ce centre ; car cette vitesse θ dépend de x, comme on peut le voir par l'expression précédente de θ, qui est

$$\theta = \frac{m}{M} \cdot \frac{vx}{(n+1)K^2+nx^2}$$

et qui, en mettant pour m, v et n leurs valeurs précédentes, devient

$$\theta = m_0 v_0 \cdot \frac{x}{K^2(M+m_0)},$$

et par conséquent est proportionnelle à la distance x du centre G où le coup est appliqué ; comme il est clair que cela doit être.

4. Supposons que la masse du point m soit infiniment petite, et la vitesse v infiniment grande, de manière que mv soit une quantité finie $= P$: on trouvera que la force $m(v-u)$ qui est transmise à M devient, à cause de $n = 0$,

$$m(v-u) = P,$$

c'est-à-dire égale à la force mv elle-même qui se transmet ainsi tout entière au corps M.

C'est par cette hypothèse qu'on peut se faire une idée naturelle de ce qu'on appelle une force imprimée à un corps. On peut la considérer comme la percussion d'un corpuscule infiniment petit qui vient choquer le corps avec une vitesse infinie. Comme ce corpuscule ajouté au corps n'en augmenterait point la masse finie M, on peut supposer qu'après le choc il lui reste attaché, et qu'ainsi toute la force a passé dans le corps M.

On conçoit par là cette loi de la force proportionnelle à la vitesse. Car si l'on regarde cette force comme provenant de plusieurs corpuscules égaux qui viennent successivement frapper le corps avec des vitesses égales et infinies, on voit que le premier ne donnant au corps m en repos qu'une vitesse finie, le second corpuscule qui arrive avec une vitesse infinie a encore la même action sur M que si ce corps était en repos, et que par conséquent il y fait passer une nouvelle vitesse finie égale à la première, et ainsi de suite.

5. Supposons maintenant que le corps M soit posé sur un appui fixe placé en F à la distance h du centre de gravité G. Si ce corps était frappé avec une certaine force Q tombant en F à angle droit sur l'appui, il est évident que cette percussion directe sur l'obstacle aurait pour mesure la force Q elle-même.

Mais si, avec cette même force et dans une direction parallèle, on frappe le corps en un autre point C pris sur GF à la distance x du centre G, la percussion sur l'obstacle ne sera plus la même; elle dépendra de la distance x, et en sera une certaine fonction qu'il s'agit de déterminer.

Pour cela, regardant le point F comme un *centre de percussion*, je cherche sur-le-champ le point O qui lui répond comme *centre spontané* de rotation; et j'ai pour déterminer sa distance $OG = a$, l'équation $ah = K^2$, ce qui donne $a = \frac{K^2}{h}$.

Cela posé, j'imagine que la force Q qui frappe en C à la distance x du centre G, soit décomposée en deux autres parallèles, l'une P qui frappe en F, l'autre R qui frappe en O. Il est clair que cette dernière composante qui tombe en O ne peut produire aucune percussion sur l'appui qui est en F; car le point F est un centre spontané de rotation par rapport au point O regardé comme un centre de percussion. Il ne reste donc pour frapper l'appui fixe que la composante P qui tombe directement sur cet appui F.

Or, par la composition des forces, on a

$$Q : P :: a + h : a + x,$$

ce qui donne, en mettant pour a sa valeur $\frac{K^2}{h}$,

$$P = Q \cdot \frac{K^2 + hx}{K^2 + h^2}.$$

Telle est, sur un appui fixe placé à la distance h du centre de gravité d'un corps, la percussion exercée par une force donnée Q qui frappe à la distance x du même centre.

6. On voit, par cette expression, qu'avec une même force Q, appliquée à une distance convenable, on peut produire sur un obstacle fixe une percussion de telle grandeur et de tel sens qu'on voudra; ce qui paraît un théorème assez digne de remarque.

Si l'on suppose $x = h$, on a $P = Q$, comme il est clair que cela doit être, puisqu'alors la force Q frappe directement sur l'appui même.

Si l'on suppose $x = -a = -\frac{K^2}{h}$, on a $P = 0$, c'est-à-dire qu'au point O la force appliquée ne ferait sentir au point d'appui F aucune percussion, ce qui est aussi évident.

En faisant $a + x = y$, et désignant par l la ligne $a + h$, l'expression précédente de P devient simplement

$$P = Q \cdot \frac{y}{l}.$$

D'où l'on voit qu'à partir du point O comme origine des distances y où le corps M est frappé par la force Q, la percussion P exercée en F augmente uniformément comme l'ordonnée d'une ligne droite, et qu'elle a les mêmes valeurs à droite et à gauche de cette origine, mais avec des signes contraires.

7. Il est sans doute très-remarquable qu'à l'aide d'un corps libre M posé sur un appui on puisse, en n'employant qu'une même force Q, produire sur cet appui une percussion non-seulement plus grande que la force Q elle-même, mais plus grande que toute percussion donnée. Mais ce théorème suppose que la force Q est transmise tout entière au corps M à quelque distance qu'elle soit appliquée. Il ne faudrait donc pas conclure qu'avec un même coup de marteau de masse m et de même vitesse v, on puisse produire sur un obstacle telle percussion qu'on voudra, à l'aide d'un corps interposé M : car la force mv de ce marteau ne se transmet qu'en partie au corps M, et cette partie diminue quand la distance où l'on frappe augmente.

Mais si à chaque distance x on change de marteau, en prenant la masse m réciproque à $K^2 + x^2$, et la vitesse v proportionnelle à la même fonction, la quantité de mouvement transmise à M sera toujours la même, comme nous l'avons dit plus haut (**2**). En désignant donc par q cette quantité constante de mouvement qu'on imprime ainsi à M, on aurait pour la percussion P exercée contre l'appui F,

$$P = q \cdot \frac{K^2 + hx}{K^2 + h^2}.$$

D'où l'on voit que par le choc d'un point massif d'une masse et d'une vitesse convenables et pourtant toujours telles, que leur produit mv reste le même (ce qu'on peut regarder comme un même coup de marteau), on peut, au moyen d'un corps interposé M, produire sur un obstacle fixe une percussion donnée aussi grande qu'on voudra.

8. Si l'on fait $x = h$, on trouve $P = q$, et pourtant, comme alors le choc est direct, on devrait avoir $P = mv = Q$. Mais il faut remarquer que, dans toute cette analyse, on suppose qu'après le choc du point m contre le corps M, la force mu qui reste au marteau n'est plus employée, en sorte que l'on ne compte sur le point F que la seule percussion qui proviendrait du mouvement q transmis à m.

9. Si l'on suppose que m s'attache à M, et qu'on demande la percussion produite en f à la distance h du centre G de M, on trouvera par un calcul facile

$$P = mv \cdot \frac{K^2 + hx}{K^2 + h^2 + n(x - h)^2}.$$

Cette formule est facile à vérifier d'ailleurs en cherchant la force P avec laquelle un corps composé de M et du point massif m, animé par une force mv appliquée à la distance x du centre G de M, et par conséquent à la distance $\frac{x}{n+1}$ du centre g de $m+M$, frapperait un point f situé à la distance h du centre G, et par conséquent à la distance $h-\frac{nx}{n+1}$ du centre g de $M+m$.

10. Si l'on fait $x=h$, c'est-à-dire si l'on suppose que le choc a lieu au point f lui-même, on trouve $P=mv$, comme cela doit être.

Si x augmente depuis $x=0$ jusqu'à $x=h$, le numérateur de la fraction augmente et le dénominateur diminue, et par cette double raison la percussion P augmente depuis $P=\frac{K^2.mv}{K^2+(n+1)h^2}$ jusqu'à $P=mv$.

Si l'on fait $x=-\frac{K^2}{h}$, on a $P=0$, comme cela doit être; car alors le point m frappe en un point ou centre de percussion O dont le point f est le centre spontané; d'où il résulte que le point f ne peut ressentir aucune percussion du coup qui frappe en O.

Si $x=\infty$, P est encore nulle. Il y a donc un point qui répond au maximum de P.

11. Si l'on cherche la distance x qui répond au maximum de P, on trouve

$$x^2+\frac{2K^2}{h}x-\left[K^2+(K^2+h^2)\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]=0,$$

ou, en mettant pour n sa valeur $\frac{m}{M}$,

$$x^2+\frac{2K^2}{h}x-\left[2K^2+h^2+\frac{M}{m}(K^2+h^2)\right]=0,$$

ou bien, en faisant $ah=K^2$ et $a+h=l$,

$$x^2+2ax-\left(hl.\frac{m+M}{m}+ah\right)=0,$$

ce qui donne pour x deux valeurs qui répondent à des points situés à droite et à gauche à égales distances du point O qui répond à $x=-a$.

12. Prenons pour exemple le cas de $n=1$, ou de $m=M$, et de $h=K$, ce qui met l'appui f sous le centre de la plus grande percussion que le corps libre M pourrait produire en tournant autour de son centre de gravité G.

On aura, pour déterminer la valeur de x qui répond au maximum du choc exercé sur le point f en vertu du coup de marteau mv, l'équation

$$x^2 + 2Kx - 5K^2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$x = -K \pm K\sqrt{6}.$$

Si l'on met cette valeur de x dans l'expression de la percussion P, on aura

$$P = mv.\frac{\pm\sqrt{6}}{12 \mp 4\sqrt{6}}.$$

Or $\sqrt{6}$ est $> 12 - 4\sqrt{6}$; donc pour la première valeur de x, on a $P > mv$: cette valeur de x répond au maximum de P. Pour l'autre valeur de x, P est négative et moindre que mv: cette valeur de x répond au maximum *négatif* de P.

En regardant P comme l'ordonnée d'une courbe dont x est l'abscisse, cette courbe est une ligne du troisième ordre dont l'équation est dans l'exemple ci-dessus :

$$P = mv.\frac{K^2 + Kx}{2K^2 + (x-K)^2},$$

cette courbe coupe l'axe des x, au point qui répond à $x = -K$, de sorte que P est nulle en ce point.

Quand $x = K$, on a $P = mv$. Quand $x = \pm\infty$, $P = \pm 0$, et l'axe des x est asymptote de la courbe, à droite et à gauche.

Si l'on met l'origine des distances au point qui répond à $x = -K$, on aura en faisant $x + K = y$,

$$P = \frac{Ky}{y^2 - 4Ky + 6K^2},$$

et pour les valeurs de y qui répondent aux deux maxima de P,

$$y = \pm K\sqrt{6}.$$

La première distance $y = K\sqrt{6}$ répond à une percussion P plus grande que mv, et par conséquent plus grande que si l'on eût frappé directement l'appui f avec la même force mv. La seconde $y = -K\sqrt{6}$ répond à une percussion P négative et qui par conséquent supposerait que l'appui f résiste alors dans le sens contraire; et cette percussion négative est $< mv$. Ainsi, pour causer avec un même coup de marteau mv de masse $m = M$ la plus grande percussion possible sur l'appui f au moyen d'un corps intermédiaire libre M, posé sur le point f, le centre de gravité G étant à une distance K de ce point, il faut frapper non au point f lui-même, mais au delà de ce point f, à une distance $K\sqrt{6} - 2K$.

Si dans l'expression générale de P qui est

$$P = mv. \frac{K^2 + hx}{H^2 + h^2 + n(x - h)^2},$$

on suppose m infiniment petit et v infini, de sorte que mv soit égale à la quantité finie Q, on a (à cause de $n = 0$)

$$P = Q. \frac{K^2 + hx}{K^2 + h^2},$$

ce qui s'accorde en entier avec ce que nous avons trouvé précédemment.