JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A.-H. CURTIS

Sur la surface lieu des centres de courbure principaux d'une surface courbe

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 3 (1858), p. 79-83.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1858_2_3__79_0>

SUR

LA SURFACE LIEU DES CENTRES DE COURBURE PRINCIPAUX D'UNE SURFACE COURBE;

PAR M. A.-H. CURTIS.

Il a été démontré par Monge que toutes les normales à une surface le long de chacune de ses lignes de courbure engendrent une surface développable, dont l'arête de rebroussement est une géodésique sur celle des deux nappes de la surface des centres qui contient les centres de courbure principaux correspondants, et que cette surface développable touche la seconde nappe de la surface des centres le long d'une courbe continue.

Il est évident, à priori, que toutes les géodésiques sur l'une ou l'autre nappe de la surface des centres qui sont engendrées de cette manière doivent posséder quelque propriété en commun, et qu'il en est de même des courbes de contact de chacune des nappes avec les développables engendrées par les normales le long des lignes de courbure du système non correspondant.

Avant de rechercher comment ces propriétés peuvent être obtenues en général, j'examinerai quelle est leur nature dans le cas particulier où la surface des centres consiste en un ellipsoïde et en un hyperboloïde confocal. Que deux surfaces de cette nature puissent devenir les deux nappes d'une surface des centres, c'est ce qui est bien connu et est évident par le fait que, si par une ligne tangente quelconque aux deux surfaces on tire les deux plans tangents, ils seront à angle droit, et cela, comme le démontre Monge, est la seule condition demandée.

La condition existante parmi les géodésiques dont nous nous occupons dans le cas actuel, est celle-ci. Si leurs équations sont écrites sous la forme connue

$$\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = \mathrm{K}^2,$$

la constante du second membre est la même pour le système tout entier. La même remarque s'applique à leurs équations, si elles sont écrites sous la forme

$$PD = K'^2,$$

car les constantes K, K' sont dans un tel rapport, que l'une étant donnée, l'autre peut être déterminée.

Afin de prouver ce théorème, je ferai usage de l'équation du cône qui est circonscrit à une surface donnée du second degré, et dont le sommet est à un point donné. Cette équation a été obtenue pour la première fois par M. Mac-Cullagh, et peut être établie par des méthodes diverses.

La surface à laquelle le cône est circonscrit étant l'hyperboloïde, l'équation dont nous venons de parler est la suivante :

$$\frac{\cos^2 i_1}{\rho^2 - \mu_0^2} + \frac{\cos^2 i_2}{\mu^2 - \mu_0^2} + \frac{\cos^2 i_3}{\nu^2 - \mu_0^2} = 0,$$

où ρ, μ, ν sont les coordonnées elliptiques du sommet du cône; i_1, i_2, i_3 sont les angles qu'une arête quelconque du cône fait avec les normales aux trois confocales dont les demi grands axes sont ρ, μ, ν; et μ_0 est le demi grand axe de l'hyperboloïde. Pour trouver les arêtes de ce cône, arêtes qui sont des lignes tangentes à l'ellipsoïde (ρ) ainsi qu'à l'hyperboloïde (μ_0), il faut substituer 90 degrés à i_1, et l'on obtiendra comme équation du système de géodésiques

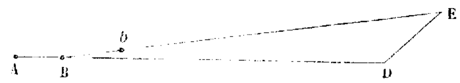
$$\mu^2 \cos^2 i_3 + \nu^2 \cos^2 i_2 = \mu_0^2,$$

ou

$$\mu^2 \cos^2 i_3 + \nu^2 \sin^2 i_3 = \mu_0^2,$$

ce qui, non-seulement établit le théorème énoncé plus haut, mais montre aussi que la signification géométrique de la constante K dans l'équation de la classe des géodésiques sur l'une ou l'autre nappe de la surface des centres est la moitié du grand axe de l'autre nappe.

Pour trouver quel rapport unit les courbes de contact des développables dont on a déjà parlé, supposez que AB, B*b* soient deux éléments consécutifs d'une des géodésiques que nous avons examinées ci-dessus et qui sont situées par hypothèse sur l'ellipsoïde : soient D



et E les points où ces éléments prolongés touchent l'hyperboloïde. Comme il a déjà été dit, on a

$$P_1 D_1 = K_1^2,$$

où P_1 est la perpendiculaire abaissée du centre du système confocal sur le plan BDE, qui est un plan tangent à l'hyperboloïde; D_1 est le demi-diamètre de l'hyperboloïde parallèle à AB; et K_1 est une constante. Or, comme DE est la tangente conjuguée à AD, si δ est le diamètre de l'hyperboloïde parallèle à DE, et si l'angle BDE est désigné par θ, nous aurons

$$K_1 \delta \sin\theta = P_1 D_1 \delta \sin\theta = \text{une constante},$$

cette constante étant le volume du parallélipipède formé avec les demi-axes de l'hyperboloïde. Mais K_1 est invariable aussi longtemps que D_1 est parallèle à quelque ligne tangente à l'ellipsoïde et à l'hyperboloïde, et par conséquent l'équation de cette seconde classe de courbes est

$$\delta \sin\theta = h,$$

h étant une constante qui est la même pour le système tout entier.

Ce résultat peut être réduit à une forme géométrique comme il suit. Si γ est le rayon de courbure de la section normale passant par un élément d'une quelconque des courbes de cette classe, nous avons

$$\gamma P_1 = \delta^2,$$

et par suite

$$\gamma P_1 \sin^2\theta = h^2.$$

Mais $\gamma \sin^2\theta$ est la distance du point D au point de la normale en D qui est le plus rapproché de la normale en E, et conséquemment, en désignant cette distance par Δ, nous obtenons

$$P\Delta = h^2;$$

Δ varie donc en raison inverse de P.

Ou bien, comme P varie en raison inverse de la portion de la normale interceptée entre D et un quelconque des plans principaux, si cette dernière ligne est représentée par N, nous apprenons que, pour toute cette classe de courbes, le rapport de Δ à N est invariable.

La méthode précédente peut être aisément étendue de manière à devenir applicable à la détermination de la propriété générale qui appartient à chacune des classes de courbes déjà mentionnées dans tous les cas où la surface des centres consiste en deux superficies distinctes.

Afin de déterminer l'équation commune du système géodésique, supposez que les équations des deux superficies soient

$$L = 0, \tag{1}$$

$$L' = 0; \tag{2}$$

alors, en désignant par x', y', z' les coordonnées d'un point quelconque de la surface représentée par l'équation (2), formez l'équation du cône dont le sommet est en ce point et qui est circonscrit à la surface (1). Cela peut se faire par la méthode donnée par M. Salmon [*], laquelle est une extension de la méthode de M. Joachimstal pour obtenir l'équation des lignes tangentes menées d'un point à une courbe plane quelconque. L'équation de ce cône sera de la forme

$$F(x', y', z', x - x' : y - y', y - y' : z - z') = 0,$$

et comme $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$ sont proportionnels aux cosinus des angles qu'un élément des géodésiques du système dont nous parlons fait avec les axes de coordonnées, nous en concluons l'équation

$$F(x', y', z', dx' : dy', dy' : dz') = 0.$$

Cette équation, combinée avec l'équation (2), déterminera complétement le système des géodésiques sur la surface représentée par l'équation (2), tandis que les mêmes résultats, *mutatis mutandis*, sont applicables à la classe semblable de géodésiques tracées sur la surface représentée par l'équation (1).

---

[*] Dans les *Transactions de l'Académie Royale irlandaise*, vol. XXIII.

L'équation commune au système conjugué peut être obtenue avec la même facilité. Supposez que AB, Bb soient deux éléments d'une des géodésiques dont nous venons de parler, sur la surface représentée par l'équation (1), et que D et E soient les points de contact de ces éléments prolongés avec la surface représentée par l'équation (2). Que les coordonnées de A et de D soient x, y, z, x', y', z'; les coordonnées doivent alors remplir les deux conditions suivantes :

$$\frac{dL}{dx}(x - x') + \frac{dL}{dy}(y - y') + \frac{dL}{dz}(z - z') = 0, \tag{3}$$

$$\frac{dL'}{dx'}(x - x') + \frac{dL'}{dy'}(y - y') + \frac{dL'}{dz'}(z - z') = 0. \tag{4}$$

Mais, tandis que x, y, z décrit l'élément AB, x', y', z' décrit DE, qui est un élément d'une courbe de la classe dont nous cherchons l'équation; il faut donc différentier les équations (3) et (4) d'après la supposition que x, y, z, x', y', z' sont variables, et alors, ayant substitué $\lambda(x - x')$, $\lambda(y - y')$, $\lambda(z - z')$ à dx, dy, dz, éliminer λ, x, y, z entre les équations ainsi obtenues, et les équations (1), (3), (4). Le résultat sera l'équation requise, laquelle, avec l'équation (2), définit la seconde classe des courbes qui forment le sujet de ce Mémoire.