JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

V.-A. LEBESGUE

Note sur la résolution de l'équation du quatrième degré par les fonctions elliptiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 3 (1858), p. 391-394.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1858_2_3__391_0>

NOTE

SUR

LA RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU QUATRIÈME DEGRÉ PAR LES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

Par M. V.-A. LEBESGUE,
Professeur honoraire de la Faculté des Sciences de Bordeaux.

Après avoir montré que l'équation du cinquième degré peut être résolue par les fonctions elliptiques, M. Hermite a donné des formules pour résoudre par les mêmes fonctions les équations du quatrième degré dont l'invariant quadratique est nul. Il se présentait donc un problème important, du moins théoriquement, celui qui consiste à trouver pour une équation du quatrième degré dont l'invariant quadratique n'est pas nul, une transformée pour laquelle cet invariant fût égal à zéro. M. Hermite a indiqué dans les *Comptes rendus* du 24 mai 1858 une solution savante et très-générale, mais qui paraît entraîner des calculs assez longs. L'objet de cette Note est d'indiquer une solution effective, fort courte comparativement. Mais néanmoins quand on voudra trouver en nombres les valeurs des racines, c'est toujours à la formule des éléments qu'il faudra recourir.

PROPOSITION I. — *Si dans une équation*

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} f(x) = a_0 x^m + m a_1 x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} a_2 x^{m-2} + \ldots \\ + m a_{m-1} x + a_m = 0, \end{aligned} \right.$$

on pose

$$x = y + h,$$

d'où

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} f(y) = b_0 y^m + m b_1 y^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} b_2 y^{m-2} + \ldots \\ + m b_{m-1} y + b_m = 0, \end{aligned} \right.$$

on aura

$$\begin{aligned}
b_0 &= a_0,\\
b_1 &= a_0 h + a_1,\\
b_2 &= a_0 h^2 + 2a_1 h + a_2,\\
b_3 &= a_0 h^3 + 3a_1 h^2 + 3a_2 h + a_3,\\
b_4 &= a_0 h^4 + 4a_1 h^3 + 6a_2 h^2 + 4a_3 h + a_4,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

C'est la conséquence immédiate de la substitution.

Proposition II. — *Si dans l'équation* (1) *on pose*

$$a_0 x + a_1 = \mathrm{X},$$

on aura

$$(3)\quad \mathrm{X}^m + \frac{m(m-1)}{1.2}\mathrm{A}_2 \mathrm{X}^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\mathrm{A}_3 \mathrm{X}^{m-3} + \ldots + \mathrm{A}_m = 0,$$

et les fonctions $\mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \ldots, \mathrm{A}_m$ *des coefficients* a_0, a_1, $a_2, \ldots, a_m$ *ne changeront pas quand on remplacera* a_0, a_1, a_2, etc., par b_0, b_1, b_2, etc.

Si l'on faisait disparaître le second terme de l'équation (2), l'inconnue $\mathrm{Y} = b_0 y + b_1$ serait

$$b_0 y + b_1 = a_0(x - h) + a_0 h + a_1 = a_0 x + a_1 = \mathrm{X},$$

on retrouve donc l'équation (3), d'où la propriété énoncée pour les fonctions A_2, A_3, etc.

Dans le quatrième degré, l'équation (3) devient

$$\mathrm{X}^4 + 6\mathrm{A}_2 \mathrm{X}^2 + 4\mathrm{A}_3 \mathrm{X} + \mathrm{A}_4 = 0,$$

et l'on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_2 &= a_0 a_2 - a_1^2,\\
\mathrm{A}_3 &= a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3,\\
\mathrm{A}_4 &= a_0^3 a_4 - 4a_0^2 a_1 a_3 + 6a_0 a_1^2 a_2 - 3a_1^4\\
&= a_0^2(a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2) - 3(a_0 a_2 - a_1^2)^2;
\end{aligned}$$

or

$$a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2 = \mathrm{I}$$

est ce qu'on nomme l'invariant quadratique. On a

$$a_0^2 \mathrm{I} = \mathrm{A}_4 + 3 \mathrm{A}_2^2.$$

Cet invariant reste donc le même pour l'équation en y.

Il en sera de même de l'invariant cubique

$$\mathrm{J} = a_0 a_2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_4 a_1^2 - a_2^3,$$

parce que l'on a

$$a_0^3 \mathrm{J} = \mathrm{A}_2 \mathrm{A}_4 - \mathrm{A}_3^2 - \mathrm{A}_2^3.$$

Proposition III. — *L'invariant quadratique de l'équation aux carrés des racines de l'équation*

$$a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 + 6 a_2 x^2 + 4 a_3 x + a_4 = 0,$$

ou, ce qui revient au même, en posant $x^2 = u$, de l'équation

$$\begin{gathered}(a_0 u^2 + 6 a_2 u + a_4)^2 - 16 u (a_1 u + a_3)^2 \\ = \mathrm{C}_0 u^4 + 4 \mathrm{C}_1 u^3 + 6 \mathrm{C}_2 u^2 + 4 \mathrm{C}_3 u + \mathrm{C}_4 = 0\end{gathered}$$

est égal à

$$\frac{4}{3}(12 \mathrm{I} a_2^2 - 36 \mathrm{J} a_2 + \mathrm{I}^2).$$

C'est le résultat du développement de l'invariant

$$\mathrm{C}_0 \mathrm{C}_4 - 4 \mathrm{C}_1 \mathrm{C}_3 + 3 \mathrm{C}_2^2.$$

Problème. — *Étant donnée l'équation*

$$a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 + 6 a_2 x^2 + 4 a_3 x + a_4 = 0$$

dont l'invariant quadratique n'est pas nul, trouver une transformée

$$b_0 y^4 + 4 b_1 y^3 + 6 b_2 y^2 + 4 b_3 y + b_4 = 0$$

dont l'invariant quadratique soit nul.

Solution. — Il faut poser d'après les propositions précédentes

$$12 I b_2^2 - 36 J b + I^2 = 0,$$

d'où

$$b_2 = a_0 h^2 + 2 a_1 h + a_2 = \frac{1}{2I}\left(3J \pm \frac{1}{\sqrt{-3}}\sqrt{I^3 - 27 J^2}\right).$$

On reconnaît ici la même fonction de I et de J qui se présente dans la solution de M. Hermite (*Comptes rendus*, p. 965).

Ayant h, on connaîtra les coefficients de l'équation en

$$u = y^2 = (x - h)^2,$$

et par suite y et x.

Dans la pratique il faudrait fixer le choix de la valeur de h, mais ce qu'il y a de plus court sera toujours l'emploi de la formule des éléments. Il est bien évident que c'est au point de vue théorique qu'il faut considérer la belle découverte de la résolution des équations des cinquième et quatrième degrés par les fonctions elliptiques.