JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

O. SCHLÖMILCH

Sur le changement de la variable indépendante dans les dérivées d'une fonction

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 3 (1858), p. 385-390.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1858_2_3__385_0>

SUR LE CHANGEMENT DE LA VARIABLE INDÉPENDANTE DANS LES DÉRIVÉES D'UNE FONCTION;

PAR M. O. SCHLÖMILCH.

On connaît suffisamment la méthode élémentaire à l'aide de laquelle on peut trouver les dérivées

$$\frac{du}{dz}, \quad \frac{d^2u}{dz^2}, \quad \frac{d^3u}{dz^3}, \ldots$$

de la fonction $u = \mathrm{F}(z)$, dans le cas où z cesse d'être la variable indépendante et devient fonction d'une autre variable x. En posant

$$(1) \qquad u = F(z), \quad z = \varphi(x), \quad F[\varphi(x)] = f(x),$$

on obtient les équations

$$\frac{du}{dz} = F'[\varphi(x)] = \frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

$$\frac{d^2u}{dz^2} = F''[\varphi(x)] = \frac{\varphi'(x)f''(x) - \varphi''(x)f'(x)}{\varphi'(x)^3},$$

$$\frac{d^3u}{dz^3} = F'''[\varphi(x)] = \frac{\varphi'(x)^2 f'''(x) - 3\varphi'(x)\varphi''(x)f''(x) + [3\varphi''(x)^2 - \varphi'(x)\varphi'''(x)]f'(x)}{\varphi'(x)^5},$$

. . . .

Comme ces formules deviennent très-compliquées, on se peut proposer le problème de les simplifier, en indiquant la loi de leur formation; nous ferons voir que cette loi se présente sous une forme assez élégante. Pour cela nous remarquons d'abord que l'expression $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ est ce que devient

$$\frac{\rho}{\varphi(x+\rho) - \varphi(x)} f'(x+\rho), \quad \text{pour } \rho = 0;$$

on a de plus

$$\frac{\varphi'(x)f''(x) - \varphi''(x)f'(x)}{\varphi'(x)^3} = D_\rho\left[\left(\frac{\rho}{\varphi(x+\rho) - \varphi(x)}\right)^2 f'(x+\rho)\right], \quad \text{pour } \rho = 0,$$

et on en conclura par induction que la formule générale sera

$$(2) \qquad \frac{d^n u}{dz^n} = F^{(n)}[\varphi(x)] = D_\rho^{n-1}\left[\left(\frac{\rho}{\varphi(x+\rho) - \varphi(x)}\right)^n f'(x+\rho)\right]_{(0)},$$

dans laquelle l'indice (o) veut dire que l'on doit prendre $\rho = 0$ après avoir achevé les différentiations par rapport à ρ.

La démonstration de notre formule repose sur une autre formule que nous allons développer. En posant, pour abréger,

$$\Omega = \frac{\rho}{\varphi(x+\rho) - \varphi(x)},$$

on a identiquement

$$\frac{\rho}{\Omega^2}\mathrm{D}_x\Omega - \frac{\rho}{\Omega^2}\mathrm{D}_\rho\Omega + \frac{1}{\Omega} = \varphi'(x).$$

Nous multiplions les deux membres de cette équation par Ω^{n+1}, et apres cela nous différentions k fois par rapport à ρ, en faisant usage de la formule

$$\mathrm{D}_\rho^k(\rho\varphi) = \rho\mathrm{D}_\rho^k\varphi + k\mathrm{D}_\rho^{k-1}\varphi;$$

de cette manière nous parvenons à l'équation

$$\begin{aligned}&\rho\mathrm{D}_\rho^k(\Omega^{n-1}\mathrm{D}_x\Omega) + k\mathrm{D}_\rho^{k-1}(\Omega^{n-1}\mathrm{D}_x\Omega)\\ &- \rho\mathrm{D}_\rho^k(\Omega^{n-1}\mathrm{D}_\rho\Omega) - k\mathrm{D}_\rho^{k-1}(\Omega^{n-1}\mathrm{D}_\rho\Omega) + \mathrm{D}_\rho^k\Omega^n = \varphi'(x)\mathrm{D}_\rho^k\Omega^{n+1}.\end{aligned}$$

Dans le cas de $\rho = 0$, cette équation se réduit à

$$\begin{aligned}&k\left[\mathrm{D}_\rho^{k-1}(\Omega^{n-1}\mathrm{D}_x\Omega)\right]_{(0)}\\ &- k\left[\mathrm{D}_\rho^{k-1}(\Omega^{n-1}\mathrm{D}_\rho\Omega)\right]_{(0)} + \left[\mathrm{D}_\rho^k\Omega^n\right]_{(0)} = \varphi'(x)\left[\mathrm{D}_\rho^k\Omega^{n+1}\right]_{(0)},\end{aligned}$$

ou bien

$$\frac{k}{n}\left[\mathrm{D}_\rho^{k-1}\mathrm{D}_x\Omega^n\right]_{(0)} + \frac{n-k}{n}\left[\mathrm{D}_\rho^k\Omega^n\right]_{(0)} = \varphi'(x)\left[\mathrm{D}_\rho^k\Omega^{n+1}\right]_{(0)}.$$

En introduisant le facteur

$$(n)_k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k},$$

nous aurons enfin

$$(4)\quad (n-1)_{k-1}\left[\mathrm{D}_\rho^{k-1}\mathrm{D}_x\Omega^n\right] + (n-1)_k\left[\mathrm{D}_\rho^k\Omega^n\right]_{(0)} = (n)_k\varphi'(x)\left[\mathrm{D}_\rho^k\Omega^{n+1}\right]_{(0)}.$$

Maintenant la formule (2) qu'on sait être exacte pour $n = 1$ peut être aisément démontrée pour n quelconque par le raisonnement si connu où l'on passe d'une valeur de n à la valeur suivante $n+1$. On a d'abord

$$\begin{aligned}\mathrm{F}^{(n)}[\varphi(x)] &= \{\mathrm{D}_\rho^{n-1}[\Omega^n f'(x+\rho)]\}_{(0)}\\ &= [\Omega^n]_{(0)}f^{(n)}(x) + (n-1)_1[\mathrm{D}_\rho\Omega^n]_{(0)}f^{(n-1)}(x)\\ &\qquad + (n-1)_2\left[\mathrm{D}_\rho^2\Omega^n\right]_{(0)}f^{(n-2)}(x) + \ldots;\end{aligned}$$

la dérivée de cette équation, prise par rapport à x, est

$$\begin{aligned}
&\mathrm{F}^{(n+1)}[\varphi(x)].\varphi'(x)\\
&= [\Omega^n]_{(0)} f^{(n+1)}(x) + \{[\mathrm{D}_x \Omega^n]_{(0)} + (n-1)_1 [\mathrm{D}_\rho \Omega^n]_{(0)}\} f^{(n)}(x)\\
&\quad + \{(n-1)_1 [\mathrm{D}_\rho \mathrm{D}_x \Omega^n]_{(0)} + (n-1)_2 [\mathrm{D}_\rho^2 \Omega^n]_{(0)}\} f^{(n-1)}(x)\\
&\quad + \{(n-1)_2 [\mathrm{D}_\rho^2 \mathrm{D}_x \Omega^n]_{(0)} + (n-1)_3 [\mathrm{D}_\rho^3 \Omega^n]_{(0)}\} f^{(n-2)}(x)\\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

En remplaçant $[\Omega^n]_{(0)}$ par $\varphi'(x)[\Omega^{n+1}]_{(0)}$ et en faisant usage de la formule (4), on trouve l'équation

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}^{(n+1)}[\varphi(x)] &= [\Omega^{n+1}]_{(0)} f^{(n+1)}(x) + (n)_1 [\mathrm{D}_\rho \Omega^{n+1}]_{(0)} f^{(n)}(x)\\
&\quad + (n)_2 [\mathrm{D}_\rho^2 \Omega^{n+1}]_{(0)} f^{(n-1)}(x) + \ldots\\
&= \{\mathrm{D}_\rho^n [\Omega^{n+1} f'(x+\rho)]\}_{(0)},
\end{aligned}$$

qui est la même que si l'on avait écrit $n+1$ au lieu de n dans la formule primitive. Nous remarquerons encore que l'on peut la présenter sous la forme

$$(5)\quad \mathrm{F}[\varphi(x)] = f(x),\quad \mathrm{F}^{(n)}[\varphi(x)] = \mathrm{D}_\xi^{n-1}\left\{\left[\frac{\xi - x}{\varphi(\xi) - \varphi(x)}\right]^n f'(\xi)\right\}_{(\xi = x)}.$$

Nous ferons quelques applications de ce théorème.

L'équation

$$x = \varphi(y),$$

résolue par rapport à y, donnerait une valeur de la forme

$$y = \psi(x),$$

et toute fonction de y serait aussi une fonction de x; donc si l'on considère la fonction

$$f(y) = \mathrm{F}(x),$$

on a

$$\frac{d^n f(y)}{dx^n} = \frac{d^n \mathrm{F}(x)}{dx^n} = \mathrm{F}^{(n)}(x) = \mathrm{F}^{(n)}[\varphi(y)].$$

On voit qu'il suffit d'écrire y au lieu de x dans la formule (5), ce qui donne

$$\frac{d^n f(y)}{dx^n} = \mathrm{D}_\xi^{n-1} \left\{ \left[\frac{\xi - y}{\varphi(\xi) - \varphi(y)} \right]^n f'(\xi) \right\}_{(\xi = y)}. \tag{6}$$

Le cas le plus simple est $f(y) = y$; la différentiation de la fonction inverse, déterminée par l'équation

$$x = \varphi(y),$$

se fait donc à l'aide de la formule

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \mathrm{D}_\xi^{n-1} \left[\frac{\xi - y}{\varphi(\xi) - \varphi(y)} \right]^n_{(\xi = y)}. \tag{7}$$

La formule (5) peut aussi servir pour trouver immédiatement les théorèmes de Burmann et de Lagrange; en effet cette déduction n'est qu'une simple transformation du théorème de Maclaurin que nous présentons sous la forme

$$\mathrm{F}(z) = \mathrm{F}(0) + \frac{\mathrm{F}'(0)}{1} z + \frac{\mathrm{F}''(0)}{1.2} z^2 + \ldots + \frac{\mathrm{F}^{(n)}(0)}{1.2\ldots n} z^n + \mathrm{R}_n,$$

$$\mathrm{R}_n = \frac{1}{1.2\ldots n} \int_0^z (z - t)^n \mathrm{F}^{(n+1)}(t)\, dt.$$

En prenant

$$z = \varphi(x), \quad \mathrm{F}(z) = \mathrm{F}[\varphi(x)] = f(x),$$

on a d'abord

$$\mathrm{F}^{(m)}(z) = \mathrm{D}_\xi^{m-1} \left\{ \left[\frac{\xi - x}{\varphi(\xi) - \varphi(x)} \right]^m f'(\xi) \right\}_{(\xi = x)};$$

on en déduit $\mathrm{F}^{(m)}(0)$ en prenant pour x une racine de l'équation

$$\varphi(x) = 0.$$

Soit a une de ces racines, alors on trouve

$$\mathrm{F}^{(m)}(0) = \mathrm{D}_\xi^{m-1} \left\{ \left[\frac{\xi - a}{\varphi(\xi)} \right]^m f'(\xi) \right\}_{(\xi = a)},$$

et, par conséquent,

$$(8)\quad f(x)=f(a)+\frac{A_1}{1}\varphi(x)+\frac{A_2}{1.2}\varphi^2(x)+\ldots+\frac{A_n}{1.2\ldots n}\varphi^n(x)+R_n,$$

$$(9)\qquad A_m=D_x^{m-1}\left\{\left[\frac{x-a}{\varphi(x)}\right]^m f'(x)\right\}_{(x=a)}.$$

C'est la formule de Burmann présentée à l'Institut l'an 1796. Quant au reste R_n, il est

$$R_n=\frac{1}{1.2\ldots n}\int_0^{\varphi(x)}[\varphi(x)-t]^n F^{(n+1)}(t)\,dt,$$

ou bien, si l'on fait la substitution $t=\varphi(u)$,

$$R_n=\frac{1}{1.2\ldots n}\int_a^x[\varphi(x)-\varphi(u)]^n F^{(n+1)}[\varphi(u)]\varphi'(u)\,du;$$

mais il faut remarquer que les limites $u=a$ et $u=x$ ne sont justes que sous la condition que $\varphi'(u)$ ne change pas de signe entre $u=a$ et $u=x$, parce que t est une quantité qui croît ou qui décroît de $t=0$ à $t=\varphi(x)$. Enfin la formule (2) donne

$$(10)\quad R_n=\frac{1}{1.2\ldots n}\int_a^x[\varphi(x)-\varphi(u)]^n\varphi'(u)\,du\,D_\rho^n\left\{\left[\frac{\rho}{\varphi(u+\rho)-\varphi(u)}\right]^{n+1}f'(u+\rho)\right\}_{(0)}.$$

Remplaçons maintenant x par y et $\varphi(x)$ par $\frac{y-a}{\psi(y)}$; nous aurons alors, en vertu des formules (8) et (9),

$$(11)\qquad f(y)=f(a)+\frac{A_1}{1}\frac{y-a}{\psi(y)}+\ldots+\frac{A_n}{1.2\ldots n}\left(\frac{y-a}{\psi(y)}\right)^n+R_n,$$

$$(12)\qquad A_m=D_y^{m-1}\{\psi(y)^m f'(y)\}_{(y=a)};$$

à l'aide de la substitution $\frac{y-a}{\psi(y)}=x$, on en déduit immédiatement le théorème de Lagrange.