JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

O. SCHLÖMILCH

Extrait d'une lettre de M. O. Schlömilch

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 3 (1858), p. 384-385.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1858_2_3__384_0>

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. O. SCHLÖMILCH A M. LIOUVILLE.

La Note de M. E. Roche, insérée dans un des derniers cahiers de votre Journal (juillet 1858), me donne l'occasion de remarquer que la formule de M. Roche n'est qu'un cas spécial d'une formule très-générale que j'ai publiée il y a dix ans dans mon *Handbuch der Differentialrechnung*, etc., Greisswald, 1847-1848. Ce livre pouvant ne pas être connu en France, je me permets d'en donner un extrait relatif à l'objet mentionné.

En faisant usage de la méthode employée par M. Cauchy pour démontrer la formule

$$\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}=\varphi'[a+\varepsilon(b-a)], \quad 1>\varepsilon>0,$$

on parvient aisément à la formule plus générale

$$(1) \qquad \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{\psi(b)-\psi(a)}=\frac{\varphi'[a+\varepsilon(b-a)]}{\psi'[a+\varepsilon(b-a)]};$$

elle exige, 1° que les fonctions $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\psi(x)$, $\psi'(x)$ soient finies et continues entre les limites $x=a$ et $x=b$, et 2° que la dérivée $\psi'(x)$ ne change pas de signe entre ces limites. En prenant $a=0$ et $b=h$, l'équation (1) devient

$$(2) \qquad \varphi(h)=\varphi(0)+\frac{\psi(h)-\psi(0)}{\psi'(\varepsilon h)}\varphi'(\varepsilon h).$$

Admettant donc $\varphi(h)$ comme somme de la série

$$f(a-h)+\frac{h}{1}f'(a-h)+\frac{h^2}{1.2}f''(a-h)+\ldots$$
$$+\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a-h),$$

on aura

$$\varphi(0) = f(a), \quad \frac{d\varphi(h)}{dh} = \varphi'(h) = -\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n)}(a-h),$$

et, en vertu de la formule (2),

$$\varphi(h) = f(a) - \frac{\psi(h)-\psi(0)}{\psi'(\varepsilon h)} \frac{(\varepsilon h)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n)}(a-\varepsilon h).$$

Enfin, à l'aide des substitutions $a = x + h$ et $\varepsilon = 1 - \theta$, on parvient à l'équation

$$f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(x)$$
$$= f(x+h) - \frac{\psi(h)-\psi(0)}{\psi'[(1-\theta)h]} \cdot \frac{(1-\theta)^{n-1} h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n)}(x+\theta h),$$

dans laquelle la fonction ψ est arbitraire, pourvu qu'elle satisfasse aux conditions énoncées. Le cas spécial $\psi(h) = h^p$ est celui que M. Roche a traité.

Je profite de cette occasion pour vous envoyer en outre la Note ci-jointe, qui aura peut-être quelque intérêt, vu la simplicité des résultats obtenus.