JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Note sur une question de théorie des nombres

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 3 (1858), p. 357-360.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1858_2_3__357_0>

NOTE

SUR

UNE QUESTION DE THÉORIE DES NOMBRES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Soit n un nombre pair, en sorte que l'on ait

$$n = 2^{\alpha} m,$$

m étant un entier impair et l'exposant α étant au moins égal à l'unité. Représentons n de toutes les manières possibles par une somme de quatre carrés, c'est-à-dire considérons toutes les solutions entières de l'équation

$$n = s^2 + s'^2 + s''^2 + s'''^2,$$

où le premier membre est donné, et où chacun des nombres s, s', s'', s''' peut être indifféremment positif ou négatif, ou zéro, deux solutions étant regardées comme distinctes quand s, s', s'', s''' n'y ont pas identiquement les mêmes valeurs. Jacobi a trouvé que le nombre N des solutions dont il s'agit est égal à vingt-quatre fois la somme des diviseurs de m. Ainsi l'on a

$$\mathrm{N} = 24 \int m,$$

en employant la notation d'Euler pour désigner la somme des diviseurs de m.

Attachons-nous exclusivement, dans l'équation

$$n = s^2 + s'^2 + s''^2 + s'''^2,$$

au premier carré s^2. Nous pourrons nous proposer de chercher une expression simple de la somme

$$\sum s^{\mu}$$

des puissances de degré μ des valeurs que s prend dans les représentations successives de n, dont le nombre N vient d'être fixé. Et déjà l'on peut dire que N répond au cas de $\mu = 0$, puisque $s^0 = 1$ donne naturellement

$$\sum s^0 = \mathrm{N}.$$

On peut voir aussi, à cause des signes opposés avec lesquels chaque valeur de s peut être prise quand elle n'est pas nulle, que

$$\sum s^\mu = 0,$$

toutes les fois que l'exposant μ est impair. Enfin le cas de $\mu = 2$ est facile à traiter; car en prenant l'ensemble des équations

$$n = s^2 + s'^2 + s''^2 + s'''^2$$

pour en faire la somme, on obtient

$$n\mathrm{N} = \sum s^2 + \sum s'^2 + \sum s''^2 + \sum s'''^2,$$

d'où l'on tire

$$\sum s^2 = \frac{n}{4}\mathrm{N},$$

parce que les quatre sommes

$$\sum s^2, \quad \sum s'^2, \quad \sum s''^2, \quad \sum s'''^2$$

ne peuvent manquer d'être égales. Mais pour les valeurs paires de μ qui surpassent 2, la question subsiste et paraît digne d'attention : je ne sache pas du moins que personne l'ait résolue.

Je ferai dans cette Note un premier pas en donnant la valeur de $\sum s^4$. Je me suis en effet assuré (par une démonstration en règle) que

$$\sum s^4 = \frac{n^2}{8}\mathrm{N}.$$

Vérifions cette formule sur quelques exemples.

Soit d'abord

$$n = 2,$$

et, par suite,

$$m = 1, \quad \int m = 1, \quad \mathrm{N} = 24.$$

On aura vingt-quatre solutions de l'équation

$$2 = s^2 + s'^2 + s''^2 + s'''^2,$$

qui se déduiront de ce fait que $2 = 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2$, en permutant les carrés et en observant que $1^2 = (\pm 1)^2$. Dans douze de ces solutions on aura $s = \pm 1$, tandis que $s = 0$ pour les douze autres. On a donc bien

$$\sum s^4 = 12 = \frac{2^2}{8} \times 24,$$

comme l'indiquait notre formule.

Soit, en second lieu,

$$n = 4,$$

ce qui suppose encore

$$m = 1, \quad \int m = 1, \quad N = 24.$$

Les vingt-quatre solutions seront ici formées de six solutions pour lesquelles $s = 0$, de seize solutions pour lesquelles $s = \pm 1$, enfin de deux solutions pour lesquelles $s = \pm 2$. De là

$$\sum s^4 = 16 + 2.16 = \frac{4^2}{8} \times 24.$$

Notre formule est encore vérifiée.

Soit à présent

$$n = 6,$$

d'où

$$m = 3, \quad \int m = 4, \quad N = 24.4 = 96.$$

Nos quatre-vingt-seize solutions se diviseront ici en vingt-quatre solutions pour lesquelles $s = 0$, en quarant-huit solutions pour lesquelles $s = \pm 1$, et en vingt-quatre solutions pour lesquelles $s = \pm 2$. Donc

$$\sum s^4 = 48 + 24.16 = 18.24 = \frac{36}{8} \times 96,$$

comme le disait encore notre formule.

Soit, comme dernier exemple,

$$n = 10,$$

par conséquent,

$$m = 5, \quad \int m = 6, \quad N = 24.6 = 144.$$

Des cent quarante-quatre solutions qu'on a cette fois, vingt-quatre répondent à $s = 0$, soixante à $s = \pm 1$, quarante-huit à $s = \pm 2$ et douze à $s = \pm 3$. De là résulte

$$\sum s^4 = 60 + 48.16 + 12.81 = 12.150,$$

ce qui peut aisément s'écrire

$$\sum s^4 = \frac{10^2}{8} \times 24.6,$$

conformément à notre formule.

Observons, en terminant, que si, au lieu de ne considérer que le premier terme s^2 dans l'équation

$$n = s^2 + s'^2 + s''^2 + s'''^2,$$

on considérait les deux premiers termes s^2, s'^2, il serait facile de trouver la somme,

$$\sum (s^2 s'^2),$$

des valeurs du produit $s^2 s'^2$ pour toutes les représentations de n. En élevant en effet au carré les deux membres de l'équation

$$n = s^2 + s'^2 + s''^2 + s'''^2,$$

on a l'équation nouvelle

$$n^2 = s^4 + s'^4 + s''^4 + s'''^4 + 2(s^2 s'^2 + s^2 s''^2 + s^2 s'''^2 + s'^2 s''^2 + s'^2 s'''^2 + s''^2 s'''^2).$$

Ajoutons membre à membre toutes les équations de ce genre pour l'ensemble des représentations de n, et observons que les quatre sommes

$$\sum s^4, \quad \sum s'^4, \quad \sum s''^4, \quad \sum s'''^4,$$

ont pour valeur commune $\frac{n^2}{8}$ N, et que d'un autre côté les sommes

$$\sum (s^2 s''^2), \quad \sum (s^2 s'''^2), \quad \sum (s'^2 s''^2), \quad \sum (s'^2 s'''^2), \quad \sum (s''^2 s'''^2)$$

sont toutes égales à

$$\sum (s^2 s'^2):$$

il s'ensuivra que

$$n^2 \mathrm{N} = \frac{n^2}{2} \mathrm{N} + 12 \sum (s^2 s'^2),$$

d'où

$$\sum (s^2 s'^2) = \frac{n^2}{24} \mathrm{N}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sum (s^2 s'^2) = n^2 \int m.$$