JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur quelques formules générales qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres; sixième article

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 3 (1858), p. 325-336.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1858_2_3__325_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

SUR

QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES QUI PEUVENT ÊTRE UTILES DANS LA THÉORIE DES NOMBRES;

Par M. J. LIOUVILLE.

SIXIÈME ARTICLE.

Dans les formules que nous avons données jusqu'ici, on ne considère qu'un seul mode de partition du nombre auquel on rapporte les calculs. Ce mode de partition change, il est vrai, d'une formule à une autre; mais il est unique pour chacune d'elles. Voici maintenant une formule d'un genre nouveau, où l'on aura à s'occuper à la fois de deux modes de partition distincts.

Soit m un nombre impair quelconque. Décomposons d'abord son double en une somme de deux entiers impairs, de manière à avoir

$$2m = m' + m'',$$

m' et m'' étant impairs et positifs. Puis, décomposons le nombre m lui-même dans la somme d'un entier impair et d'un entier pair pour lequel nous mettrons en évidence la puissance de 2 qui le divise; en d'autres termes, faisons

$$m = m_1 + 2^{\alpha_2} m_2,$$

m_1 et m_2 étant deux entiers positifs impairs. Et ces deux modes de partition ainsi établis, décomposons de toutes les manières possibles m, m', m'', m_1, m_2 en deux facteurs, naturellement impairs, en prenant

$$m = d\delta, \quad m' = d'\delta', \quad m'' = d''\delta'', \quad m_1 = d_1\delta_1, \quad m_2 = d_2\delta_2.$$

C'est aux diviseurs ainsi obtenus que s'appliquera notre formule.

Désignons, en effet, par $F(x)$ une fonction de x impaire, ou plutôt telle, que l'on ait

$$F(0) = 0,$$

et, en outre,

$$F(-x) = -F(x),$$

pour toutes les valeurs de x dont on aura à faire usage. La somme triple

$$\sum \left\{ \sum\sum (-1)^{\frac{d''-1}{2}} [F(d'+d'') + F(d'-d'')] \right\},$$

étendue à tous les diviseurs d', d'' appartenant aux groupes successifs m', m'' fournis par l'équation

$$2m = m' + m'',$$

sera une des quantités que nous mettrons en œuvre. Il faudra y joindre la somme simple

$$\sum F(2d),$$

qui porte sur les diviseurs d du nombre fondamental m, et une somme double

$$\sum\sum \rho(m_2) F(2d_1),$$

que l'on pourrait écrire, avec plus de netteté peut-être,

$$\sum \left[\rho(m_2) \sum F(2d_1) \right]:$$

on désigne ici par $\rho(m_2)$ le nombre des décompositions de $2m_2$ en une somme de deux carrés impairs; ou, autrement dit, l'on fait

$$\rho(m_2) = \sum (-1)^{\frac{d_2-1}{2}};$$

j'ai déjà employé cette notation dans les articles précédents. Pour effectuer la somme double indiquée

$$\sum\sum \rho(m_2) F(2d_1),$$

il faut prendre successivement les divers groupes d'entiers impairs m_1, m_2, pour lesquels

$$m = m_1 + 2^{\alpha_2} m_2,$$

former pour chacun de ces groupes la somme

$$\sum F(2d_1),$$

relative aux diviseurs de m_1, et faire le total des produits

$$\rho(m_2) \sum F(2d_1).$$

Cela posé, je dis que la somme triple dont nous avons parlé d'abord est égale à la somme simple augmentée de quatre fois la somme double. En d'autres termes, je dis que l'on a

$$(\mathrm{L}) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum \left\{ \sum\sum (-1)^{\frac{d''-1}{2}} [F(d'+d'') + F(d'-d'')] \right\} \\ &= \sum F(2d) + 4 \sum\sum \rho(m_2) F(2d_1). \end{aligned} \right.$$

Soit, par exemple, $m = 3$. On aura trois décompositions de $2m$ sous la forme $m' + m''$, savoir

$$6 = 1 + 5, \quad 6 = 3 + 3, \quad 6 = 5 + 1,$$

ce qui donne pour d', d'' les valeurs conjuguées suivantes :

$$d' = 1, \quad d'' = 1; \quad d' = 1, \quad d'' = 5;$$

$$d' = 1, \quad d'' = 1; \quad d' = 1, \quad d'' = 3; \quad d' = 3, \quad d'' = 1; \quad d' = 3, \quad d'' = 3;$$

$$d' = 1, \quad d'' = 1; \quad d' = 5, \quad d'' = 1.$$

Comme, par la nature de la fonction F, on a

$$F(0) = 0, \quad F(-2) = -F(2), \quad F(-4) = -F(4),$$

la valeur de la somme triple est ici

$$F(6) + 5F(2).$$

Or c'est bien ce que nous donne le second membre de la formule (L); car, d'une part, on a

$$\sum \mathrm{F}(2d) = \mathrm{F}(6) + \mathrm{F}(2);$$

et, d'autre part, 3 n'étant susceptible que d'une seule décomposition de la forme

$$m = m_1 + 2^{\alpha_1} m_2,$$

savoir

$$3 = 1 + 2.1,$$

on ne peut faire que $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, d'où

$$4 \sum\sum \rho(m_2)\,\mathrm{F}(2d_1) = 4\rho(1)\,\mathrm{F}(2) = 4\,\mathrm{F}(2);$$

la somme est $\mathrm{F}(6) + 5\,\mathrm{F}(2)$, comme il le fallait.

En prenant

$$\mathrm{F}(x) = x,$$

la formule (L) nous donne

$$\sum \left\{ \sum\sum (-1)^{\frac{d''-1}{2}} \sum d' \right\} = \sum d + 4 \sum \left[\rho(m_2) \sum d_1 \right],$$

ce que l'on peut écrire

$$\sum \zeta_1(m')\,\rho(m'') = \zeta_1(m) + 4 \sum \zeta_1(m_1)\,\rho(m_2),$$

en observant que

$$\sum (-1)^{\frac{d''-1}{2}} = \rho(m''),$$

d'après une convention faite plus haut, et en représentant, suivant notre coutume, par $\zeta_1(m)$ la somme des diviseurs de tout entier m.

La formule

$$\sum \zeta_1(m')\,\rho(m'') = \zeta_1(m) + 4 \sum \zeta_1(m_1)\,\rho(m_2)$$

exprime le théorème que voici :

« Soit A le nombre des décompositions de l'octuple d'un nombre
» impair m sous la forme

$$8m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2),$$

» x, y, z, t, u, v étant des entiers impairs positifs. Dans la même hy-
» pothèse sur x, y, z, t, u, v, soit B le nombre des décompositions du
» quadruple du même nombre sous la forme

$$4m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2^\alpha (u^2 + v^2),$$

» où l'exposant α est à volonté. On aura

$$\mathrm{A} = 4\mathrm{B} + \zeta_1(m). \text{ »}$$

Souvenons-nous, en effet, que $\zeta_1(m)$ est le nombre des décompositions de $4m$ en une somme de quatre carrés impairs, comme $\rho(m)$ est le nombre des décompositions de $2m$ en une somme de deux carrés impairs. Alors nous conclurons sans peine de l'équation

$$8m = 4m' + 2.2m'',$$

que

$$\mathrm{A} = \sum \zeta_1(m')\,\rho(m''):$$

de même, à l'aide de l'équation

$$4m = 4m_1 + 4.2^{\alpha_1} m_2 = 4m_1 + 2^\alpha.2m_2,$$

nous obtiendrons

$$\mathrm{B} = \sum \zeta_1(m_1)\,\rho(m_2).$$

De là resulte immédiatement le théorème que nous venons d'énoncer.

On pourrait arriver encore à d'autres résultats curieux en prenant

$$\mathrm{F}(x) = x^{2\mu+1},$$

et surtout en posant

$$\mathrm{F}(x) = \sin xt,$$

où t désigne une constante arbitraire. Mais je me contente de transcrire l'équation

$$2\sum\left\{\sum \sin d't \sum (-1)^{\frac{d''-1}{2}} \cos d''t\right\}$$
$$= \sum \sin(2dt) + 4\sum\left[\rho(m_2)\sum \sin(2d_1 t)\right]$$

à laquelle cette dernière hypothèse conduit. Nous reviendrons un jour sur ces détails : passons à une autre formule.

Cette fois encore nous opérerons sur un nombre impair m, et après avoir posé, comme tout à l'heure, de toutes les manières possibles

$$m = m_1 + 2^{\alpha_2} m_2, \quad m_1 = d_1\delta_1, \quad m_2 = d_2\delta_2,$$

$d_1, \delta_1, d_2, \delta_2$ étant des entiers positifs impairs, nous ferons

$$m = m' + m'' + m''',$$

m', m'', m''' étant aussi impairs et positifs, de sorte que le nombre m se trouvera décomposé en trois parties, et non plus en deux parties seulement. Nous introduirons d'ailleurs les diviseurs de m, m', m'', m''' en posant

$$m = d\delta, \quad m' = d'\delta', \quad m'' = d''\delta'', \quad m''' = d'''\delta''';$$

et c'est dans une fonction $F(x)$ semblable à celle de la formule (L), c'est-à-dire remplissant les conditions

$$F(0) = 0, \quad F(-x) = -F(x),$$

que nous allons les faire entrer.

Il faut se représenter d'un côté la somme quadruple

$$\sum\left\{\sum\sum\sum\left[F(d'+d''+d''') + F(d'-d''-d''') - F(d'+d''-d''') - F(d'-d''+d''')\right]\right\}$$

relative aux diviseurs d', d'', d''' des nombres impairs conjugués m', m'', m''' dont la somme est égale à m ; d'un autre côté, il faut prendre la somme double

$$\sum\sum \zeta_1(m_2) F(d_1)$$

où $\zeta_1(m_2)$ désigne la somme des diviseurs de m_2, et qui concerne le mode de partition marqué par l'équation

$$m = m_1 + 2^{\alpha_2} m_2.$$

Je dis qu'en ajoutant huit fois la somme quadruple, à vingt-quatre fois la somme double, on obtiendra un total équivalent à la somme simple

$$\sum (d^2 - 1) F(d),$$

qui ne porte que sur les diviseurs du nombre m.

En d'autres termes, on a

$$(\mathrm{M}) \quad \left\{ \begin{aligned} & 8 \sum \left\{ \sum\sum\sum \left[\begin{aligned} & F(d' + d'' + d''') + F(d' - d'' - d''') \\ - & F(d' + d'' - d''') - F(d' - d'' + d''') \end{aligned} \right] \right\} \\ & = \sum (d^2 - 1) F(d) - 24 \sum\sum \zeta_1(m_2) F(d_1). \end{aligned} \right.$$

Ainsi, par exemple, en prenant

$$F(x) = x^3,$$

on arrive à la formule

$$192 \sum \zeta_1(m') \zeta_1(m'') \zeta_1(m''') + 24 \sum \zeta_3(m_1) \zeta_1(m_2) = \zeta_5(m) - \zeta_3(m),$$

d'où l'on peut tirer un théorème sur la décomposition des nombres en douze carrés, savoir : « Soient m un entier impair, G le nombre des » décompositions de $4m$ en une somme de douze carrés impairs, et H » le nombre des décompositions de $8m$ en une somme de huit carrés » impairs, formant un total dont le quotient par 8 soit impair, plus le » produit d'une somme de quatre carrés impairs par une puissance » de 2. On aura

$$8G + H = \frac{1}{24} [\zeta_5(m) - \zeta_3(m)]. \text{ »}$$

En prenant

$$F(x) = \sin xt,$$

où t désigne une constante arbitraire, et en posant pour tout nombre impair $m = d\delta$,

$$\sum \sin dt = \psi(m),$$

on trouverait

$$32 \sum \psi(m')\psi(m'')\psi(m''') = \sum (1 - d^2) \sin dx + 24 \sum \psi(m_1)\zeta_1(m_2).$$

Et ainsi de suite.

Au reste il est aisé de ramener la formule (M) à une autre qui ne dépendra plus que d'un seul mode de partition du nombre m, savoir du mode indiqué par l'équation

$$m = m_1 + 2^{\alpha_2} m_2,$$

et en même temps de réduire à une somme triple la somme quadruple que cette formule contient. Rien ne nous empêche en effet de prendre

$$m''' = m_1, \quad d''' = d_1, \quad \delta''' = \delta_1,$$

pourvu que nous prenions aussi

$$2^{\alpha_2} m_2 = m' + m''.$$

Cela admis, faisons pour chaque valeur de m_1, considérée comme fixe,

$$F(x + d_1) - F(x - d_1) = f(x),$$

et à cause de

$$F(-x) = -F(x),$$

nous aurons

$$f(-x) = f(x),$$

de sorte que la formule (a) de notre second article sera applicable à la fonction $f(x)$. D'après cela, il est aisé de voir que le résultat des sommations relatives à d' et d'' effectuées sur l'expression

$$F(d' + d'' + d''') + F(d' - d'' - d''') - F(d' + d'' - d''') - F(d' - d'' + d'''),$$

ou plutôt sur l'expression équivalente

$$f(d' + d'') - f(d' - d''),$$

est

$$2^{\alpha_2-1}d_2[F(d_1+2^{\alpha_2}d_2)+F(d_1-2^{\alpha_2}d_2)-2F(d_1)],$$

de sorte que la somme quadruple de la formule (M) peut être remplacée par la somme triple

$$\sum\left\{\sum\sum 2^{\alpha_2-1}d_2[F(d_1+2^{\alpha_2}d_2)+F(d_1-2^{\alpha_2}d_2)-2F(d_1)]\right\},$$

que l'on peut diviser en deux parties

$$\sum\left\{\sum\sum 2^{\alpha_2-1}d_2[F(d_1+2^{\alpha_2}d_2)+F(d_1-2^{\alpha_2}d_2)]\right\}$$

et

$$\sum\left\{\sum\sum 2^{\alpha_2}d_2F(d_1)\right\},$$

dont la seconde doit être retranchée de la première : cette seconde partie peut à son tour s'écrire plus simplement, et sous forme de somme double, comme il suit

$$\sum\sum 2^{\alpha_2}\zeta_1(m_2)F(d_1).$$

En résumé, la formule (M) peut être changée en celle-ci :

$$\text{(N)}\quad \begin{cases} 4\sum\left\{\sum\sum 2^{\alpha_2}d_2[F(d_1+2^{\alpha_2}d_2)+F(d_1-2^{\alpha_2}d_2)]\right. \\ =\sum(d^2-1)F(d)+8\sum\sum(2^{\alpha_2}-3)\zeta_1(m_2)F(d_1), \end{cases}$$

qui n'est plus relative qu'au seul mode de partition

$$m=m_1+2^{\alpha_2}m_2.$$

C'est à un mode de partition tout semblable que se rapportent les formules de notre troisième article : seulement, au lieu d'indices, on a employé là des accents et l'on a posé

$$m=m'+2^{\alpha''}m''.$$

Ainsi, en appliquant notre notation actuelle à la formule (F) de l'article cité, on devra l'écrire

$$(\mathrm{F})\qquad 2\sum\left\{\sum\sum f(d_1-2^{\alpha_2}d_2)-f(d_1+2^{\alpha_2}d_2)]\right\}=\sum(\delta-d)f(d).$$

Comme la fonction $f(x)$ est paire, on peut prendre

$$f(x)=x\mathrm{F}(x),$$

$\mathrm{F}(x)$ étant la même fonction que ci-dessus. La formule (F) nous donne alors

$$\begin{gathered}
2\sum\left\{\sum\sum d_1[\mathrm{F}(d_1-2^{\alpha_2}d_2)-\mathrm{F}(d_1+2^{\alpha_2}d_2)]\right\}\\
-2\sum\left\{\sum\sum 2^{\alpha_2}d_2[\mathrm{F}(d_1+2^{\alpha_2}d_2)+\mathrm{F}(d_1-2^{\alpha_2}d_2)]\right\}\\
=\sum(d\delta-d^2)\mathrm{F}(d),
\end{gathered}$$

ou bien

$$\begin{gathered}
4\sum\left\{\sum\sum d_1[\mathrm{F}(d_1-2^{\alpha_2}d_2)-\mathrm{F}(d_1+2^{\alpha_2}d_2)]\right\}\\
-4\sum\left\{\sum\sum 2^{\alpha_2}d_2[\mathrm{F}(d_1+2^{\alpha_2}d_2)+\mathrm{F}(d_1-2^{\alpha_2}d_2)]\right\}\\
=2\sum(m-d^2)\mathrm{F}(d),
\end{gathered}$$

en multipliant par 2 et en remplaçant $d\delta$ par m.

Ajoutons maintenant à l'équation (N) celle que nous venons d'écrire, et il nous viendra cette formule nouvelle qu'il était bon d'indiquer :

$$(\mathrm{O})\qquad \left\{\begin{aligned}
&4\sum\left\{\sum\sum d_1[\mathrm{F}(d_1-2^{\alpha_2}d_2)-\mathrm{F}(d_1+2^{\alpha_2}d_2)]\right\}\\
&=\sum(2m-1-d^2)\mathrm{F}(d)+8\sum\sum(2^{\alpha_2}-3)\zeta_1(m_2)\mathrm{F}(d_1).
\end{aligned}\right.$$

Les deux équations (N) et (O) forment un groupe assez curieux.

Puisqu'il a été question tout à l'heure du mode de partition marqué par l'équation

$$m=m'+m''+m''',$$

où m est un nombre impair donné qu'on décompose de toutes les manières possibles dans la somme de trois nombres impairs, je terminerai cet article en donnant encore une formule qui se rapporte à ce mode de partition.

Je continue à poser

$$m = d\delta,\quad m' = d'\delta',\quad m'' = d''\delta'',\quad m''' = d'''\delta''',$$

et je désigne par $F(x, y)$ une fonction telle, que l'on ait

$$F(o, y) = o,\ F(x, o) = o,\ F(-x, y) = -F(x, y) = F(x, -y),$$

en un mot une fonction impaire. Cela étant, je dis qu'on a entre deux sommes quadruples l'égalité suivante

$$(\mathrm{P})\left\{\begin{aligned} &\sum\left\{\sum\sum\sum d'''\left[\begin{array}{l} F(d'+d''',\ d'+d'') + F(d'-d''',\ d'+d'') \\ -F(d'+d''',\ d'-d'') - F(d'-d''',\ d'-d'') \end{array}\right]\right\} \\ =&\sum\left\{\sum\sum\sum d'''\left[\begin{array}{l} F(d'+d'',\ d'+d''') + F(d'+d'',\ d'-d''') \\ -F(d'-d'',\ d'+d''') - F(d'-d'',\ d'-d''') \end{array}\right]\right\}, \end{aligned}\right.$$

où les sommes sont prises pour tous les diviseurs d', d'', d''' appartenant aux groupes conjugués successifs m', m'', m'''.

Pour bien comprendre la formule (P), il faut observer qu'en permutant d', d'', d''', à volonté, dans un quelconque des deux membres qui la composent, on n'en altère pas la valeur, parce que d', d'' et d''' jouent le même rôle dans l'équation fondamentale

$$m = d'\delta' + d''\delta'' + d'''\delta'''.$$

Aussi n'est-ce point par une telle permutation (qui ne pourrait fournir qu'une identité insignifiante) que l'on passe du premier membre au second, mais par le changement des valeurs de x en celles de y, et des valeurs de y en celles de x, dans la fonction $F(x, y)$.

Si donc on posait

$$F(x, y) - F(y, x) = \psi(x, y),$$

la formule (P) pourrait s'écrire plus simplement

$$(\mathrm{Q})\left\{\begin{aligned} &\sum\left\{\sum\sum\sum d'''[\psi(d'+d''',\ d'+d'') + \psi(d'-d''',\ d'+d'')]\right\} \\ =&\sum\left\{\sum\sum\sum d'''[\psi(d'+d''',\ d'-d'') + \psi(d'-d''',\ d'-d'')]\right\}; \end{aligned}\right.$$

mais alors la fonction $\psi(x, y)$ remplirait les conditions suivantes :

$$\psi(0, y) = 0, \quad \psi(x, 0) = 0,$$

$$\psi(-x, y) = -\psi(x, y) = \psi(x, -y), \quad \psi(y, x) = -\psi(x, y).$$

Prenons, dans la formule (P),

$$F(x, y) = \sin xt \sin yz,$$

t et z étant des constantes arbitraires. Il nous viendra

$$\sum \left\{ \sum\sum\sum d''' \sin d' t \cos d' z \sin d'' z \cos d''' t \right\}$$
$$= \sum \left\{ \sum\sum\sum d''' \sin d' z \cos d' t \sin d'' t \cos d''' z \right\}.$$

Cet exemple suffira pour faire comprendre le parti qu'on peut tirer de la formule (P).