JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉDOUARD ROCHE

Note sur la formule de Taylor

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 3 (1858), p. 271-272.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1858_2_3__271_0>

NOTE SUR LA FORMULE DE TAYLOR;

PAR M. ÉDOUARD ROCHE.

Le terme complémentaire de la série de Taylor est donné par les auteurs sous deux formes différentes dont l'une, due à Cauchy, se déduit assez facilement de l'autre. Mais ces deux formes peuvent être considérées comme des cas particuliers d'une expression plus générale du reste. Si l'on arrête le développement de $f(x+h)$ au terme en h^n, le terme complémentaire est égal à

$$(1) \qquad R = \frac{h^{n+1}(1-\theta)^{n-p}}{1.2\ldots n.(p+1)} f^{n+1}(x+\theta h),$$

p étant un nombre pris arbitrairement entre 0 et n, et θ un nombre convenablement choisi entre 0 et 1.

En y faisant $p=n$, on reproduit la première forme du reste. Si au contraire on fait $p=0$, on a la seconde forme, celle de Cauchy. Quand $n=0$, ces diverses expressions du reste se réduisent à une seule qui est $hf'(x+\theta h)$.

Pour obtenir la formule (1), la méthode la plus simple consiste dans l'emploi du calcul intégral. On observe que

$$f(x+h)-f(x)=\int_0^h f'(x+h-t)\,dt;$$

et par une suite d'intégrations par parties, on est amené à représenter le terme complémentaire par

$$\frac{1}{1.2\ldots n}\int_0^h t^n f^{n+1}(x+h-t)\,dt.$$

Cela suppose que la fonction $f(x)$ et ses $n+1$ dérivées restent finies et continues entre les limites x et $x+h$, c'est-à-dire pour les valeurs de t comprises entre 0 et h.

Décomposons maintenant la différentielle en

$$t^p\,dt.t^{n-p} f^{n+1}(x+h-t),$$

et remplaçons le second facteur par une quantité constante intermédiaire entre la plus grande et la plus petite des valeurs qu'il prend lorsque t passe de o à h. Cette fonction est continue dans l'intervalle, puisque la dérivée a été supposée finie et continue, et que t^{n-p} l'est également si l'on attribue à p une valeur au plus égale à n. La moyenne dont nous parlons s'obtiendra donc en donnant à t une certaine valeur comprise entre o et h que nous appellerons $h(1-\theta)$. Cette valeur moyenne sera par conséquent

$$h^{n-p}(1-\theta)^{n-p} f^{n+1}(x+\theta h).$$

Quant à l'autre facteur, il ne devient pas infini si p est positif, et l'on a

$$\int_0^h t^p\,dt = \frac{h^{p+1}}{p+1}.$$

Donc enfin

$$R = \frac{1}{1.2\ldots n}\frac{h^{p+1}}{p+1}(1-\theta)^{n-p} f^{n+1}(x+\theta h),$$

comme il fallait l'établir.

Il ne serait pas difficile de démontrer la formule (1) par les méthodes qui servent ordinairement à calculer le terme complémentaire, et qui reviennent toujours à une intégration par parties déguisée : car c'est du calcul intégral que dépend essentiellement la formule de Taylor. Si, par exemple, on veut suivre la démonstration donnée dans le *Cours d'Analyse* de Sturm, il suffira d'y remplacer l'identité (p. 88), que l'auteur retranche de son équation (3), par l'identité suivante

$$\frac{d.}{dx}\frac{(z-x)^{p+1}}{1.2\ldots n(p+1)}C = -\frac{(z-x)^p}{1.2\ldots n}C,$$

p étant un nombre positif au plus égal à n. On arrivera, sans autre changement, à la formule (1).

L'emploi de cette expression du terme complémentaire peut être quelquefois avantageux, parce qu'il dispense de considérer successivement les deux formes ordinaires du reste, comme on le fait pour établir le développement de $(1+x)^m$ ou de $\log(1+x)$.