JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. POPOFF

Solution d'un problème sur les ondes permanentes

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 3 (1858), p. 251-257.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1858_2_3__251_0>

SOLUTION

D'UN

PROBLÈME SUR LES ONDES PERMANENTES;

PAR M. A. POPOFF,

Professeur à l'Université de Kazan.

I.

Problème. Supposons qu'un courant invariable de liquide homogène dont la largeur et la profondeur sont indéterminées ou comme infinies, supporte à sa surface une pression appliquée à une bande transversale de cette surface et propre à produire un sillon uniforme à travers tout le courant : proposons-nous de déterminer la forme et les dimensions des ondes permanentes qui paraîtront à la surface de ce courant. Le liquide sera supposé incompressible et assujetti à la seule action de la pesanteur.

Solution. Il est évident que le mouvement du liquide sera identique dans tous les plans verticaux et parallèles à la direction générale du courant; par conséquent on peut se borner à considérer un filet du courant dans une section verticale, que l'on prendra pour plan des coordonnées. A proprement parler ce sera une couche de liquide comprise entre deux plans parallèles et infiniment rapprochés.

Soient x, y les deux coordonnées rectangulaires d'un point dans ce plan, où une molécule quelconque du liquide sera amenée par le mouvement au bout du temps t; p la pression qui a lieu au même point; $k+\varphi$ et v les vitesses de la molécule suivant les axes des coordonnées x, y (k étant la vitesse du courant); g l'intensité de la pesanteur qui est supposée agir dans le sens des y positives; soit enfin ρ la densité constante du fluide. En supposant que la masse du liquide reste continue pendant le mouvement, nous aurons

$$(1) \qquad \frac{d\varphi}{dx} + \frac{dv}{dy} = 0.$$

Les deux équations du mouvement d'un élément $dxdy$ se réduisent à une seule

$$g\rho y - p = \frac{1}{2}\rho\left[(k+\varphi)^2 + \nu^2\right] + C,$$

en désignant par C une constante arbitraire.

Supposons de plus que les quantités φ et ν ne dépassent jamais des valeurs très-petites. Il nous semble que cette hypothèse n'est qu'une conséquence naturelle de l'équation de continuité à la surface des ondes; mais comme cette notion demanderait quelques développements, nous la présentons comme une hypothèse. En négligeant donc les produits et les puissances supérieures à la première par rapport à ces quantités, on réduit l'équation précédente à celle-ci

$$g\rho y - p = \frac{1}{2}\rho\,(k^2 + 2k\varphi) + C,$$

et quand cette équation se rapporte à la surface des ondes, on doit faire $y = 0$ dans les fonctions φ et ν.

Si l'on différentie l'équation précédente par rapport à t et aux autres quantités qui varient avec t, en ayant égard aux conditions de notre approximation, on aura pour la surface des ondes

$$(2)\qquad g\nu = k^2\frac{d\varphi}{dx} + \frac{k}{\rho}\frac{dp}{dx},$$

où la valeur de p est donnée par l'équation

$$p = \rho f(x) + H;$$

et la fonction arbitraire $f(x)$ n'est différente de zéro que de $x > -l$ à $x < l$, la constante H représentant la pression extérieure sur tout le reste de la surface libre. Pour des valeurs de x très-grandes par rapport à l, on aura

$$p = H, \quad y = 0, \quad \varphi = 0, \quad \nu = 0,$$

et par conséquent

$$\frac{1}{2}\rho k^2 + H + C = 0,$$

ce qui réduit l'équation de la partie de la surface assujettie à la pression constante H à la suivante :

$$(3) \qquad gy = k\varphi,$$

en supposant toujours dans le second membre de cette équation $x > l$ ou $x < -l$, $y = 0$. Il est presque superflu d'ajouter que les fonctions φ et v s'évanouissent pour des valeurs très-grandes de y, quelle que soit la valeur de x.

On satisfait aux équations (1), (2) et aux autres conditions du problème en posant

$$(4) \qquad \varphi = \frac{d\Omega}{dx}, \quad v = \frac{d\Omega}{dy},$$

$$\Omega = \frac{k}{\pi} \int\int f(\alpha) e^{-\mu y} \sin\mu\,(x - \alpha) \frac{d\mu\, d\alpha}{g - k^2\mu},$$

et observant que la fonction $f(x)$ peut être représentée par l'intégrale définie

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int\int f(\alpha) \cos\mu\,(x - \alpha)\, d\mu\, d\alpha,$$

où l'intégration s'étend de $\mu = 0$ à $\mu = \infty$, et depuis $\alpha = -l$ jusqu'à $\alpha = l$; la lettre π désignant, à l'ordinaire, le rapport de la circonférence au diamètre.

II.

Pour la surface libre des ondes, où l'on devra faire $y = 0$, l'intégrale Ω se prête aux réductions nécessaires pour l'application au phénomène physique. Prenons pour cela l'équation identique

$$\int_0^\infty e^{-\mu y} \sin a\mu \frac{d\mu}{1-\mu}$$
$$= \int_0^1 e^{-\mu y} \sin a\mu \frac{d\mu}{1-\mu} - e^{-y} \int_0^\infty e^{-sy} \sin a(1+s) \frac{ds}{s},$$

a et y étant des constantes. En supposant $y = 0$ dans le second membre de l'équation, il deviendra

$$\int_0^1 \sin a\,(1 - s) \frac{ds}{s} - \int_0^\infty \sin a\,(1 + s) \frac{ds}{s},$$

ou, ce qui revient au même,

$$-2\cos a\int_0^\infty \sin as\,\frac{ds}{s}+\int_1^\infty \sin a(s-1)\frac{ds}{s},$$

et définitivement

$$-\pi\cos a+\int_0^\infty \frac{\sin au\,du}{1+u}.$$

La valeur de cette dernière intégrale s'exprime sous des formes très-différentes selon la valeur numérique de a. Pour des valeurs très-grandes de a, et par l'intégration par parties on aura

$$\int_0^\infty \frac{\sin au\,du}{1+u}=\frac{1}{a}-\frac{2}{a^3}+\frac{2.3.4}{a^5}-\frac{2.3.4.5.6}{a^7}+\ldots.$$

En s'arrêtant aux deux premiers termes de cette série, on trouve

$$\int_0^\infty \sin a\mu\,\frac{d\mu}{1-\mu}=-\pi\cos a+\frac{1}{a}-\frac{2}{a^3},$$

et si l'on substitue $\frac{k^2\mu}{g}$ à la place de μ, et qu'on suppose $a=\frac{g(x-\alpha)}{k^2}$, il en resultera

$$\int_0^\infty \sin\mu(x-\alpha)\frac{d\mu}{g-k^2\mu}=-\frac{\pi}{k^2}\cos\frac{g(x-\alpha)}{k^2}+\frac{1}{g(x-\alpha)}-\frac{2k^4}{g^3(x-\alpha)^3}+\ldots.$$

Le dernier terme de cette équation peut être aussi négligé, attendu que les valeurs de k ne doivent pas dépasser les limites assignées à cette constante, dans le cas de notre problème, par la condition de continuité à la surface du liquide. En mettant cette valeur dans l'expression de la fonction Ω, pour $y=0$, on aura

$$\Omega=-\frac{1}{k}\int f(\alpha)\cos\frac{g(x-\alpha)}{k^2}\,d\alpha+\frac{k}{\pi g}\int f(\alpha)\frac{d\alpha}{x-\alpha},$$

et l'équation (3) pour la surface des ondes deviendra

$$y=\frac{1}{k^2}\int f(\alpha)\sin\frac{g(x-\alpha)}{k^2}\,d\alpha-\frac{k^2}{\pi g^2}\int f(\alpha)\frac{d\alpha}{(x-\alpha)^2}.$$

Puisque la fonction $f(x)$ est supposée positive pour toutes les valeurs de la variable x, on peut admettre

$$\int f(\alpha)\cos\tfrac{g\alpha}{k^2}\,d\alpha = \cos\theta \int f(\alpha)\,d\alpha,$$

$$\int f(\alpha)\sin\tfrac{g\alpha}{k^2}\,d\alpha = \sin\theta \int f(\alpha)\,d\alpha,$$

θ étant une constante dont la valeur se déterminera d'après la valeur donnée de $f(\alpha)$. En même temps on peut faire par approximation pour des valeurs de x qui surpassent beaucoup celle de l,

$$\int f(\alpha)\frac{d\alpha}{(x-\alpha)^2} = \frac{1}{x^2}\int\left(1+\frac{2\alpha}{x}\right)f(\alpha)\,d\alpha,$$

et si l'on prend l'origine des coordonnées de manière à avoir

$$\int f(\alpha)\,\alpha\,d\alpha = 0,$$

on trouvera

$$(5)\qquad y = \left[\frac{1}{k^2}\sin\left(\frac{gx}{k^2}-\theta\right) - \frac{k^2}{\pi g^2 x^2}\right]\int f(\alpha d\alpha).$$

Enfin si l'on veut déterminer les sommets des ondes, on égalera à zéro la différentielle de y, prise par rapport à x, ce qui donnera

$$(6)\qquad \cos\left(\frac{gx}{k^2}-\theta\right) + \frac{2k^6}{\pi g^3 x^3} = 0.$$

L'équation (5) montre que pour des valeurs très-grandes de x la fonction y devient périodique : elle reprend la même valeur quand on attribue à la variable x un accroissement Δ qui est déterminé par l'équation

$$g\Delta = 2\pi.k^2.$$

On voit donc que la ligne Δ représente la largeur d'une onde. Avec la même approximation, on tire de l'équation (6)

$$\frac{gx}{k^2} = \theta \pm (2i+1)\frac{\pi}{2},$$

i étant un nombre entier quelconque, pourvu qu'il soit très-grand ; le signe *plus* se rapporte à des ondes qui se trouvent au-devant de la bande soumise à la pression $f(x)$, et le signe *moins* à celles qui sont en arrière d'elle. L'intervalle Δ compris entre deux sommets consécutifs, savoir la largeur d'une onde, sera déterminée par l'équation

$$g\Delta = 2\pi . k^2.$$

En supposant encore

$$gx = k^2\left[\theta + (2i+1)\frac{\pi}{2} + \delta\right],$$

on aura d'après l'équation (6), et pour une seconde approximation,

$$\delta = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^i}{\left[\theta + (2i+1)\frac{\pi}{2}\right]^3}.$$

La valeur de θ se déterminera pour toute fonction donnée f. Soit pris, par exemple,

$$f(x) = h(l^2 - x^2),$$

l et h étant des constantes. Nous aurons

$$\int_{-l}^{+l}(l^2-\alpha^2)\,\alpha\,d\alpha = 0,$$

$$\int_{-l}^{+l}(l^2-\alpha^2)\cos\frac{g\alpha}{k^2}\,d\alpha = 4\left(\frac{k^2}{g}\right)^3\left(\sin\frac{gl}{k^2} - \frac{gl}{k^2}\cos\frac{gl}{k^2}\right),$$

$$\int_{-l}^{+l}(l^2-\alpha^2)\sin\frac{g\alpha}{k^2}\,d\alpha = -4\left(\frac{k^2}{g}\right)^3\left(\cos\frac{gl}{k^2} + \frac{gl}{k^2}\sin\frac{gl}{k^2}\right),$$

d'où l'on tire

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{gl\sin\frac{gl}{k^2} + k^2\cos\frac{gl}{k^2}}{gl\cos\frac{gl}{k^2} - k^2\sin\frac{gl}{k^2}},$$

ou plus simplement

$$\tang \theta = \tang\left(\frac{gl}{k^2} + n\right),$$

en faisant

$$\tang n = \frac{k^2}{gl}.$$

Il est à peine nécessaire d'observer que dans les applications on devra supposer $k^2 < gl$.