JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur quelques formules générales qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres; quatrième article

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 3 (1858), p. 241-250.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1858_2_3__241_0>

SUR

QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES QUI PEUVENT ÊTRE UTILES DANS LA THÉORIE DES NOMBRES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

QUATRIÈME ARTICLE.

Considérons à présent un nombre entier quelconque, pair ou impair. Un tel nombre pourra être représenté par

$$2^{\alpha} m,$$

m étant un entier impair, à la condition, bien entendu, que l'exposant α puisse être réduit à zéro. Décomposons $2^{\alpha} m$ en deux parties entières positives, que nous n'assujettirons du reste à aucune condition, et que nous pourrons représenter respectivement par

$$2^{\alpha'} m', \quad 2^{\alpha''} m'',$$

en admettant cette fois encore que l'exposant de 2 sera réduit à zéro quand il s'agira d'un nombre impair. En d'autres termes, posons

$$2^{\alpha} m = 2^{\alpha'} m' + 2^{\alpha''} m'',$$

et regardant comme donné le premier membre, où le facteur m est impair, et où l'exposant α est un des nombres de la série $0, 1, 2, 3, \ldots$, disposons des exposants α', α'' et des facteurs impairs m', m'' de manière à avoir successivement

$$2^{\alpha'} m' = 1, \quad 2^{\alpha'} m' = 2, \quad 2^{\alpha'} m' = 3, \ldots, \quad 2^{\alpha'} m' = 2^{\alpha} m - 1,$$

et, en même temps, terme à terme,

$$2^{\alpha''} m'' = 2^{\alpha} m - 1, \quad 2^{\alpha''} m'' = 2^{\alpha} m - 2, \ldots, \quad 2^{\alpha''} m'' = 1.$$

Désignons par d un quelconque des diviseurs de m, et par δ le diviseur complémentaire qui donne

$$m = d\delta.$$

Soit de même

$$m' = d'\delta', \quad m'' = d''\delta'',$$

d' étant un quelconque des diviseurs de m', et d'' un quelconque des diviseurs de m''. Et ces préliminaires admis, considérons la somme triple

$$\mathrm{S} = \sum \left\{ \sum\sum \left[f(2^{\alpha'} d' - 2^{\alpha''} d'') - f(2^{\alpha'} d' + 2^{\alpha''} d'') \right] \right\},$$

où les deux premières sommations concernent les diviseurs d', d'' qui se rapportent à un quelconque des groupes m', m'' dont nous venons de parler, et pour lesquels on a $2^\alpha m = 2^{\alpha'} m' + 2^{\alpha''} m''$, tandis que le troisième $\sum$ indique qu'on fait le total des sommes partielles relatives à ces groupes. Quant à la fonction $f(x)$, on suppose que

$$f(-x) = f(x)$$

pour toutes les valeurs de x qu'on devra employer; du reste, cette fonction f est à volonté.

La somme complète S s'exprimera très-simplement au moyen des diviseurs d de m. Je trouve, en effet, que

$$\mathrm{S} = \sum (\delta - 2^\alpha d) \left[f(2^\alpha d) - f(0) \right],$$

le signe $\sum$ portant sur les diviseurs d, dont chacun est accompagné du diviseur δ complémentaire.

Ainsi on a la formule

$$(\mathrm{G}) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum \left\{ \sum\sum \left[f(2^{\alpha'} d' - 2^{\alpha''} d'') - f(2^{\alpha'} d' + 2^{\alpha''} d'') \right] \right\} \\ & = \sum (\delta - 2^\alpha d) \left[f(2^\alpha d) - f(0) \right], \end{aligned} \right.$$

sur laquelle nous allons nous arrêter quelques instants.

Supposons d'abord que l'on ait $\alpha = 0$, de sorte que $2^\alpha m$ se réduise au nombre impair m. Il est clair que pour que l'on ait

$$m = 2^{\alpha'} m' + 2^{\alpha''} m'',$$

il faudra qu'un des exposants α', α'' soit zéro, et comme on peut échanger entre eux les deux termes du second membre, on aura le droit de supposer que c'est toujours le premier de ces exposants qui est nul, pourvu qu'on double le premier membre de la formule (G). Ainsi, désormais on fera

$$m = m' + 2^{\alpha''} m'',$$

et la formule (G) se changera en celle-ci :

$$\begin{aligned} &2\sum\left\{\sum\sum\left[f(d' - 2^{\alpha''} d'') - f(d' + 2^{\alpha''} d'')\right]\right\} \\ &= \sum(\delta - d)\left[f(d) - f(0)\right]. \end{aligned}$$

Mais le second membre peut être simplifié, car on peut le regarder comme composé de deux parties, savoir :

$$\sum(\delta - d) f(d)$$

et

$$f(0)\sum(\delta - d);$$

or cette dernière est nulle, car on a évidemment

$$\sum\delta = \sum d.$$

Nous sommes donc conduits à cette formule définitive

$$2\sum\left\{\sum\sum\left[f(d' - 2^{\alpha''} d'') - f(d' + 2^{\alpha''} d'')\right]\right\} = \sum(\delta - d) f(d),$$

qui n'est autre que la formule (F) de notre troisième article.

Maintenant prenons $\alpha > 0$ et appliquons la formule (G) à quelques exemples.

Soit, en premier lieu,

$$f(x) = x^2;$$

il nous viendra

$$\sum\left(2^{\alpha'}2^{\alpha''}\sum\sum d'd''\right) = 2^{2\alpha-2}\sum(2^{\alpha}d - \delta)\,d^2.$$

Désignons, à notre ordinaire, par $\zeta_\mu(m)$ la somme des puissances de degré μ des diviseurs de m. Nous aurons

$$\sum\sum d'd'' = \zeta_1(m')\,\zeta_1(m''),$$

en sorte que le premier membre de l'équation précédente s'écrira :

$$\sum\left[2^{\alpha'+\alpha''}\zeta_1(m')\,\zeta_1(m'')\right].$$

Quant au second membre, il est aisé de le mettre sous la forme

$$2^{3\alpha-2}\zeta_3(m) - 2^{2\alpha-2}m\,\zeta_1(m).$$

Ainsi, on a

$$\sum\left[2^{\alpha'+\alpha''}\zeta_1(m')\,\zeta_1(m'')\right] = 2^{3\alpha-2}\zeta_3(m) - 2^{2\alpha-2}m\,\zeta_1(m).$$

Soit, en second lieu,

$$f(x) = x^4.$$

Nous obtiendrons

$$\sum\left[2^{3\alpha'+\alpha''}\zeta_3(m')\,\zeta_1(m'')\right] = 2^{5\alpha-4}\zeta_5(m) - 2^{4\alpha-4}m\,\zeta_3(m)$$

Soit, enfin,

$$f(x) = \cos xt,$$

t étant une constante arbitraire; il nous viendra

$$\sum\left[\sum\sin(2^{\alpha'}d't)\sum\sin(2^{\alpha''}d''t)\right] = \sum(2^{\alpha}d - \delta)\sin^2(2^{\alpha-1}dt).$$

Il est assez curieux de rapprocher ces résultats, et en général tous les résultats que donne la formule (G) en y prenant $\alpha > 0$, des résultats analogues que nous avons obtenus dans notre second article en considérant un nombre pair $2^\alpha m$, mais en le décomposant alors en une somme $m'+m''$ de deux entiers impairs, tandis qu'ici nous posons

$$2^\alpha m = 2^{\alpha'} m' + 2^{\alpha''} m'',$$

ajoutant ainsi les décompositions en deux nombres pairs (zéro exclu) aux décompositions en deux nombres impairs, qui d'abord avaient été seules admises.

Nous allons maintenant donner une autre formule applicable aussi à un nombre quelconque, décomposé comme ci-dessus en deux parties entières positives; mais dans cette nouvelle formule, essentiellement différente de la formule (G), nous ne ferons aucune attention aux facteurs exprimés par des puissances de 2 qui tout à l'heure étaient mis en évidence. Ainsi nous désignerons par m un nombre entier donné quelconque, pair ou impair, mais > 1, et par m', m'' deux entiers positifs dont la somme fasse m. Nous aurons ainsi

$$m = m' + m'',$$

m' prenant successivement les valeurs

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ m-2,\ m-1,$$

tandis que m'' prend les valeurs complémentaires

$$m-1,\ m-2\ \ldots,\ 2,\ 1.$$

Soit d'ailleurs d un diviseur quelconque de m, et δ le diviseur complémentaire qui donne

$$m = d\delta;$$

et faisons de même

$$m' = d'\delta',\quad m'' = d''\delta''.$$

Cela posé, je considère la somme triple

$$S = \sum\left\{\sum\sum[f(d'-d'') - f(d'+d'')]\right\},$$

où les deux premières sommations portent sur les diviseurs d', d'' de deux quelconques des nombres entiers positifs m', m'' qui forment un groupe vérifiant la condition $m = m' + m''$ indiquée plus haut. Le troisième $\sum$ nous apprend qu'on doit faire le total de ces sommes partielles pour tous les groupes. La fonction $f(x)$ est arbitraire, mais telle, pourtant, que

$$f(-x) = f(x).$$

Il s'agit d'exprimer, au moyen des seuls diviseurs d du nombre m, la somme complète S obtenue comme nous venons de l'expliquer.

Or, je trouve pour S une valeur que j'écris de cette manière :

$$S = [\zeta_1(m) - \zeta(m)] f(0) - \sum f(d)[2\zeta(\delta) + d - 2\delta - 1]$$
$$- 2\sum{}' [f(2) + f(3) + f(4) \ldots + f(d-1)];$$

mais il faut expliquer le sens précis des notations que j'introduis dans cette circonstance.

Dans le premier terme

$$[\zeta_1(m) - \zeta(m)] f(0),$$

on ne trouve que nos signes habituels : $\zeta_1(m)$ est la somme des diviseurs de m, $\zeta(m)$ le nombre de ces diviseurs.

De même, au second terme, $\zeta(\delta)$ est le nombre des diviseurs de δ, et la somme

$$\sum f(d)[2\zeta(\delta) + d - 2\delta - 1]$$

est relative à tous les groupes d, δ de diviseurs conjugués du nombre $m = d\delta$.

Mais dans le troisième terme le signe $\sum$ est marqué d'un accent qui en modifie la signification. Cet accent indique pour nous que dans la somme

$$f(2) + f(3) + f(4) + \ldots + f(d-1),$$

prise pour chaque diviseur d, on doit omettre les termes où le nombre placé sous le signe f serait un diviseur de d. Ainsi cette somme est nulle pour $d = 1$ et pour $d = 2$, puisque l'on n'a alors aucun terme à prendre. Pour $d = 3$ elle est égale à $f(2)$; pour $d = 4$ à $f(3)$, puisque 2 divise 4; pour $d=5$ à $f(2)+f(3)+f(4)$; pour $d=6$ elle se réduit à $f(4)+f(5)$, parce que 2 et 3 divisant 6 on doit omettre $f(2)$ et $f(3)$; et ainsi de suite.

Ceci bien compris, nous avons donc l'équation singulière

$$
(\mathrm{H})\quad\left\{\begin{aligned}
&\sum\left\{\sum\sum[f(d'-d'')-f(d'+d'')]\right\}\\
&=[\zeta_1(m)-\zeta(m)]f(0)-\sum f(d)[2\zeta(\delta)+d-2\delta-1]\\
&-2\sum{}'[f(2)+f(3)+f(4)+\ldots+f(d-1)].
\end{aligned}\right.
$$

On pourrait, et cette remarque s'applique aussi aux formules qui précèdent, on pourrait, dis-je, en restant dans les mêmes conditions pour m, m' et m'', donner une formule plus générale; mais la formule (H) est déjà assez curieuse. Nos premiers articles suffiront pour faire deviner au lecteur intelligent que l'on peut y introduire une fonction arbitraire de deux variables. Nous opérerons plus tard cette extension. Tenons-nous-en, pour le moment, à la formule (H), et faisons-en l'application à des exemples simples.

Admettons que m soit un nombre premier. Alors d et δ n'auront que ces deux valeurs conjuguées $d=1$, $\delta=m$ et $d=m$, $\delta=1$. On aura

$$\zeta_1(m)=m+1,\quad \zeta(m)=2;$$

la somme

$$\sum{}'[f(2)+f(3)+f(4)+\ldots+f(d-1)]$$

se réduira d'ailleurs à

$$f(2)+f(3)+f(4)+\ldots+f(m-1).$$

La formule (H) nous donnera donc pour ce cas:

$$
\begin{aligned}
&\sum\left\{\sum\sum[f(d'-d'')-f(d'+d'')]\right\}\\
&=(m-1)[f(0)-f(m)]+(2m-4)f(1)\\
&-2[f(2)+f(3)+f(4)+\ldots+f(m-1)].
\end{aligned}
$$

Particularisons en outre la fonction f et prenons

$$f(x) = x^2;$$

il nous viendra, en changeant les signes,

$$4\sum\left(\sum\sum d'd''\right)$$
$$= (m-1)m^2 - 2m + 4 + 2[2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + (m-1)^2].$$

On a

$$2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + (m-1)^2 = \frac{m(m-1)(2m-1)}{6} - 1,$$

en sorte que le second membre est égal à

$$\frac{(m^2-1)(5m-6)}{3}.$$

Quant au premier membre, il peut s'écrire

$$4\sum \zeta_1(m')\zeta_1(m''),$$

m', m'' étant les couples de nombres entiers positifs dont le nombre premier m est la somme. J'en conclus que

$$\sum \zeta_1(m')\zeta_1(m'') = \frac{(m^2-1)(5m-6)}{12}.$$

Par exemple, le nombre premier 5 est susceptible des quatre décompositions

$$1+4, \quad 2+3, \quad 3+2, \quad 4+1,$$

de façon que pour lui

$$\sum \zeta_1(m')\zeta_1(m'') = 2[\zeta_1(1)\zeta_1(4) + \zeta_1(2)\zeta_1(3)] = 38,$$

et l'on peut s'assurer qu'en effet

$$\frac{(5^2-1)(5.5-6)}{12} = 38.$$

Observons, en passant, que l'équation

$$\sum \zeta_1(m')\zeta_1(m'') = \frac{(m^2-1)(5m-6)}{12}$$

est une de celles qui, appliquées à un nombre premier $16k+7$, peuvent servir à démontrer un théorème de M. Bouniakowsky dont nous avons parlé plusieurs fois déjà, à savoir que tout nombre premier m de l'espèce indiquée peut se décomposer (un nombre impair de fois) sous la forme

$$2x^2 + p^{4l+1}.y^2,$$

p étant un nombre premier $8\mu+5$, qui ne divise pas y.

En effet, si dans la somme

$$\sum \zeta_1(m')\zeta_1(m''),$$

on groupe entre eux les termes à égale distance des extrêmes, on aura

$$\zeta_1(1)\zeta_1(m-1) + \zeta_1(2)\zeta_1(m-2) + \ldots + \zeta_1\left(\frac{m-1}{2}\right)\zeta_1\left(\frac{m+1}{2}\right) = \frac{(m^2-1)(5m-6)}{24}.$$

Il est aisé de voir que m étant de la forme $16k+7$, le second membre de l'équation que je viens d'écrire est de la forme $4s+2$. Cela posé, appliquons au premier membre le lemme concernant la fonction ζ_1 sur lequel M. Bouniakowsky s'appuie, et dont nous avons rappelé l'énoncé et la démonstration à la page 84 du présent volume. Nous en conclurons d'abord que les termes qui composent ce premier membre sont tous pairs, car si quelque produit

$$\zeta_1(m')\zeta_1(m'')$$

était impair, chacun des nombres correspondants m', m'' (dont m est la somme) devrait être un carré ou le double d'un carré, et cela est évidemment impossible, m étant de la forme $16k+7$. D'un autre côté, ces produits

$$\zeta_1(m')\zeta_1(m'')$$

ne peuvent pas être tous divisibles par 4, puisque le second membre $4s + 2$ n'est pas divisible par 4. Il y a donc, dans la suite

$$\zeta_1(1)\zeta_1(m-1),\quad \zeta_1(2)\zeta_1(m-2),\ldots,\quad \zeta_1\left(\frac{m-1}{2}\right)\zeta_1\left(\frac{m+1}{2}\right),$$

au moins un nombre simplement pair, et si l'on en rencontre plusieurs de cette espèce, ce sera un nombre impair de fois. De là, par un nouvel emploi du lemme, on conclut que m est une fois, ou un nombre impair de fois, de l'une des deux formes

$$2x^2 + p^{4l+1}.y^2,\quad x^2 + 2p^{4l+1}.y^2,$$

p désignant un nombre premier $4\lambda + 1$ qui ne divise pas y. Or, si nous ajoutons que la seconde de ces deux formes ne peut jamais fournir le nombre $16k + 7$, et que la première ne peut le produire qu'en prenant $\lambda = 2\mu + 1$, c'est-à-dire $p = 8\mu + 5$, ainsi qu'on s'en assurera en cherchant l'expression des restes pour le module 8, il ne restera plus que la forme citée dans l'énoncé du théorème de M. Bouniakowsky : ce théorème est donc démontré.

La formule

$$\begin{aligned}\sum\Big\{\sum\sum[f(d'-d'')-f(d'+d'')]\Big\}\\ =(m-1)[f(0)-f(m)]+(2m-4)f(1)\\ -2[f(2)+f(3)+f(4)+\ldots+f(m-1)]\end{aligned}$$

donne encore un résultat assez intéressant quand on y pose

$$f(x) = \cos xt,$$

t étant une constante arbitraire. Mais nous ne voulons pas pousser ici plus loin ces détails.