JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

V.-A. LEBESGUE

Sur la réduction des formes quadratiques définies positives à coefficients réels quelconques. Démonstration du théorème de Seeber sur les réduites des formes ternaires

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 1 (1856), p. 401-410.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1856_2_1__401_0>

SUR

LA RÉDUCTION DES FORMES QUADRATIQUES DÉFINIES POSITIVES A COEFFICIENTS RÉELS QUELCONQUES. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE SEEBER SUR LES RÉDUITES DES FORMES TERNAIRES;

PAR M. V.-A. LEBESGUE,

Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

Dans une forme

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathrm{F},$$

à coefficients réels quelconques, on peut nommer *valeurs principales de* F celles qui résultent de valeurs entières données à $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Si l'on met la fonction homogène du second degré $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sous la forme

$$\mathrm{A}_1 \varphi_1^2 + \mathrm{A}_2 \varphi_2^2 + \ldots + \mathrm{A}_n \varphi_n^2,$$

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ étant des fonctions homogènes du premier degré, la forme quadratique $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sera dite définie positive quand tous les nombres $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n$ seront plus grands que zéro; c'est le seul cas qui sera considéré ici.

Ainsi la forme

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a}y^2$$

sera définie positive si l'on a $a > 0$, $ac - b^2 > 0$. On trouve de même $c > 0$.

La forme ternaire

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2a'yz + 2b'xz + 2c'xy,$$

ou bien

$$a\left(x + \frac{c'}{a}y + \frac{b'}{a}z\right)^2 + \frac{ab - c'^2}{a}\left(y + \frac{aa' - b'c'}{ab - c'^2}z\right)^2$$
$$+ \frac{abc + 2a'b'c' - aa'^2 - bb'^2 - cc'^2}{ab - c'^2}z^2,$$

sera définie positive si l'on a

$$a > 0, \quad ab - c'^2 > 0, \quad abc + 2a'b'c' - aa'^2 - bb'^2 - cc'^2 > 0;$$

plus généralement

$$\begin{aligned} &a > 0, \quad ab - c'^2 > 0, \quad abc + 2a'b'c' - aa'^2 - bb'^2 - cc'^2 > 0,\\ &b > 0, \quad bc - a'^2 > 0,\\ &c > 0, \quad ca - b'^2 > 0. \end{aligned}$$

Les nombres

$$ac - b^2, \quad abc + 2a'b'c' - aa'^2 - bb'^2 - cc'^2,$$

pris en signe contraire, sont précisément les déterminants des formes

$$ax^2 + 2bxy + cy^2, \quad ax^2 + by^2 + cz^2 + 2a'yz + 2b'xz + 2c'xy.$$

Comme

$$\begin{aligned} ax^2 + 2bxy + cy^2 &= x(ax + by)\\ &\quad + y(bx + cy),\\ ax^2 + by^2 + cz^2 + 2a'yz + 2b'xz + 2c'xy &= x(ax + c'y + b'z)\\ &\quad + y(c'x + by + a'z)\\ &\quad + z(b'x + a'y + cz), \end{aligned}$$

on voit que ces déterminants de formes sont des déterminants dans le sens ordinaire : seulement Gauss a changé leur signe. Si l'on ne faisait pas ce changement et qu'on représentât par $D_1, D_2, D_3, \ldots, D_n$ les déterminants des formes

$$f(x_1), \quad f(x_1, x_2), \quad f(x_1, x_2, x_3), \ldots, \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

on aurait ce résultat connu

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = D_1 X_1^2 + \frac{D_2}{D_1} X_2^2 + \ldots + \frac{D_n}{D_{n-1}} X_n^2,$$

et la condition nécessaire et suffisante pour rendre $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ définie positive, serait

$$D_1 > 0, \quad D_2 > 0, \ldots, \quad D_n > 0.$$

Ces inégalités conduisent à d'autres par la transposition des variables.

Il faut remarquer que, dans la formule précédente, si la forme

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

définie positive, ne doit pas dépasser une certaine limite L, et qu'on ne considère que les *valeurs principales*, comme $X_n = x_n$ il en résultera

$$x_n < \sqrt{\frac{D_{n-1} L}{D_n}},$$

et comme on trouve semblablement des limites pour $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_2, x_1$, on aura ce théorème :

Toute forme définie positive $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ à coefficients réels a nécessairement un minimum quand on ne considère que les valeurs principales.

Dans son Mémoire sur l'introduction des variables continues dans la Théorie des Nombres (*Journal de Crelle*, tome XLI), et dans une Note sur les formes ternaires (*Journal de Crelle*, tome XL), M. Hermite admet ce théorème sans démonstration, et il en tire par des réductions à l'absurde l'existence des formes réduites. Ces démonstrations sont, ce me semble, peu satisfaisantes. Les valeurs principales n'étant point entières, comme des nombres non entiers décroissants peuvent approcher d'une limite sans l'atteindre, il aurait fallu montrer que ce cas n'arrive point.

D'ailleurs, pour le cas de deux variables ou des formes binaires, la connaissance du minimum permet de trouver immédiatement la réduite ainsi qu'il suit : Si la forme

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

prend son minimum a' en posant

$$x = m, \quad y = n,$$

d'où

$$a' = am^2 + 2bmn + cn^2,$$

on fera

$$mn_0 - m_0 n = 1,$$

puis

$$x = mx' + m_0 y', \quad y = nx' + n_0 y',$$

d'où résultera la forme équivalente

$$a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2,$$

où l'on a

$$\begin{aligned} a' &= am^2 + 2bmn + cn^2, \\ b' &= amm_0 + b(mn_0 + m_0 n) + cnn_0, \\ c' &= am_0^2 + 2bm_0n_0 + cn_0^2; \end{aligned}$$

puisque a' est un minimum, il faut que

$$a' \leqq c'.$$

Si donc on avait

$$a' - 2b' \geqq 0,$$

on aurait aussi

$$c' - 2b' \geqq 0,$$

et la forme (a', b', c') serait réduite. Dans le cas contraire, comme on peut remplacer m_0 et n_0 par $m_0 + m\nu$, $n_0 + n\nu$, qui satisfont encore à l'équation

$$mn_0 - m_0 n = 1,$$

et comme b' se change en $b' + a'\nu = b''$ et c' en $c' + 2b'\nu + a'\nu^2 = c''$, on pourra déterminer ν de sorte que la forme (a', b'', c'') soit réduite.

Quand le minimum ne sera pas connu, on emploiera l'algorithme de Gauss (*R. A.*, n^{os} 171 et 177) : dans la forme

$$ax^2 + 2bxy + a'y^2,$$

on posera

$$x = 0.x' - y', \quad y = x' + h'y',$$

h' étant entier, et l'on aura la forme équivalente

$$\begin{aligned} a'x'^2 &+ 2(a'h' - b)x'y' + (a - 2bh' + a'h'^2)y'^2 \\ &= a'x'^2 + 2b'x'y' + a''y'^2, \end{aligned}$$

en posant

$$b + b' = a'h', \quad a'' = a + h'(b' - b).$$

Il y a donc pour toute valeur entière de h' des valeurs correspondantes de b' et a''; dans le cas de la forme binaire définie positive, on pourra toujours prendre $b' \leqq \frac{a'}{2}$, en supposant $a' \leqq a$, et cela ne suppose nullement que les coefficients a, b, a' soient entiers. Si l'on avait $b < \frac{a'}{2}$, la forme (a, b, a') serait déjà réduite. Dans le cas contraire, comme $b' \leqq \frac{a'}{2}$, on reconnaîtra que $a'' < a$; et si la forme (a', b', a'') n'était pas réduite, ce qui ne pourrait arriver que pour $a'' < a'$, on passerait à une nouvelle forme en posant

$$x' = 0.x'' - y'', \quad y = x'' + h'' y'';$$

cette forme serait (a'', b'', a'''), en supposant

$$b' + b'' = a'' h'', \quad a''' = a' + h'' (b'' - b').$$

Continuant d'opérer ainsi, on aura une série de formes contiguës équivalentes (a, b, a') (a', b', a'') (a'', b'', a''') $(a''', b'''; a^{\text{iv}})$...; et comme, d'après les valeurs de x', y', x'', y'', etc., on voit de suite que a, a', a'', a''',..., sont des nombres qui résultent de valeurs entières données à x, y dans la forme

$$f = ax^2 + 2b\,xy + a'y^2,$$

ou des *valeurs principales* de f, il en résulte que ces valeurs sont en nombre limité, et que a, a', a'', a''', ..., ne peuvent décroître indéfiniment : on tombera donc forcément sur une forme $[a^{(n)}, b^{(n)}, a^{(n+1)}]$ remplissant les conditions suivantes :

$$a^{(n)}, \quad a^{(n+1)} > 0, \quad a^{(n)} \leqq a^{(n+1)}, \quad a^{(n)} - 2\,b^{(n)} \geqq 0, \quad a^{(n+1)} - 2\,b^{(n)} \geqq 0.$$

C'est là une forme réduite, et comme dans certains cas les b peuvent prendre deux valeurs, on voit qu'il y a quelquefois deux formes réduites. Ainsi l'équation

$$b + b' = a' h',$$

pour $b = ak + \frac{a'}{2}$, donnera à volonté

$$b' = \frac{a'}{2} \quad \text{ou} \quad b' = -\frac{a'}{2}.$$

Pour passer à la réduction des formes ternaires positives

$$\varphi = f(x_1, x_2, x_3),$$

on opérera ainsi : Si

$$x_1 = \alpha y_1 + \alpha' y_2, \quad x_2 = \beta y_1 + \beta' y_2,$$

sous la condition

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1,$$

réduisent la forme $f(x_1, x_2)$, on posera

$$x_1 = \alpha y_1 + \alpha' y_2 + 0.y_3, \quad x_2 = \beta y_1 + \beta' y^2 + 0.y_3,$$
$$x_3 = 0.y_1 + 0.y_2 + y_3,$$

et la forme $f(y_1, y_2, y_3)$ sera équivalente à $f(x_1, x_2, x_3)$ d'après les théorèmes connus. Dans cette forme, $f(y_1, y_2)$ sera réduite. Si $f(y_1, y_3)$ et $f(y_2, y_3)$ ne le sont pas, on continuera de la même manière en réduisant $f(y_1, y_3)$, ce qui donnera une nouvelle forme $f(z_1, z_2, z_3)$ qu'on traitera de même ; mais comme ces calculs opèrent la diminution graduelle des coefficients des carrés, comme ces coefficients ne sont autres que des valeurs principales de $\varphi = f(x_1, x_2, x_3)$ et par conséquent en nombre limité, il est nécessaire qu'on obtienne finalement une forme équivalente $f(u_1, u_2, u_3)$, où $f(u_1, u_2)$, $f(u_1, u_3)$, $f(u_2, u_3)$ seront toutes réduites. C'est là une forme réduite. Mais, comme on l'a vu plus haut, une même forme peut conduire à plusieurs réduites.

On passera de la forme ternaire à la forme quaternaire, et ainsi de suite, et on aura ce théorème général :

Toute forme $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ définie positive à coefficients réels quelconques conduit à une forme équivalente $f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ où chacune des formes binaires $f(u_1, u_2)$, $f(u_1, u_3)$, ..., $f(u_i, u_k)$, ..., est une forme réduite.

Quoique ce théorème ne suffise pas pour la classification des formes définies positives, il n'est pas sans utilité théorique, et c'est peut-être à tort qu'il a été dit, dans une Note sur les formes ternaires, que l'algorithme de réduction n'est pas très-important au point de vue de la théorie.

Comme application, je vais donner la démonstration du théorème de Seeber sur les réduites des formes ternaires définies positives. Voici en quoi ce théorème consiste

Dans toute réduite

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2a'yz + 2b'xz + 2c'xy$$

d'une forme ternaire définie positive, si l'on pose

$$D = abc + 2a'b'c' - (aa'^2 + bb'^2 + cc'^2),$$

on aura toujours

$$2D \geqq abc.$$

D'après le théorème précédent, en considérant les valeurs absolues des coefficients a', b', c', on doit avoir

$$\left.\begin{matrix} b-2a', & c-2a', \\ c-2b', & a-2b', \\ a-2c', & b-2c', \end{matrix}\right\} \text{ positifs ou nuls, } \quad \left.\begin{matrix} bc-4a'^2, \\ ca-4b'^2, \\ ab-4c'^2, \\ abc-8a'b'c', \end{matrix}\right\} \begin{matrix}\text{toujours positifs} \\ \text{ou nuls,} \\ \text{jamais négatifs.}\end{matrix}$$

Si l'on met l'équation

$$D = abc + \ldots$$

sous la forme

$$4D = a(bc - 4a'^2) + b(ca - 4b'^2) + c(ab - 4c'^2) + abc + 8a'b'c'.$$

on voit de suite :

1°. Que pour $a' = b' = c' = 0$, on a $D = abc$,

2°. Que pour $b' = c' = 0$, on a $4D - 3abc \geqq 0$,

3°. Que pour $c' = 0$, on a $4D - 2abc \geqq 0$.

Ainsi, dans ces trois cas, le théorème de Seeber est vérifié.

Voici, d'après Gauss, la démonstration des autres cas (*Journal de Crelle*, tome XX, page 312). Seeber a trouvé son théorème par induction ; la démonstration de Gauss est encore la plus simple.

Il ne me semble point, comme il a été dit, que cette démonstration repose sur des principes singulièrement cachés. Comme D et $2D - abc$ sont des fonctions invariables par la permutation tournante des lettres a, b, c ; a', b', c' ; comme, de plus, les inégalités conditionnelles sont aussi invariables par la permutation tournante, et conduisent à des fonctions invariables par cette permutation, et essentiellement positives, il était naturel d'examiner si $2D - abc$ ne serait pas la somme de plusieurs de ces fonctions : or c'est précisément ce que fait Gauss.

Il faut considérer deux cas :

1°. a', b', c' positifs et $+a', -b', -c', -a', +b', -c', -a', -b', +c'$, ou $a'b'c'$ positif; tous ces cas rentrent l'un dans l'autre, car le changement de signe de deux des variables x, y, z ne détruit pas l'équivalence.

2°. Les cas $-a', -b', -c'$, $-a'+b', +c'$, $+a', -b', +c'$, $+a', +b', -c'$, ou celui de $a'b'c'$ négatif quand les signes ne sont pas mis en évidence, rentrent aussi l'un dans l'autre.

Je supposerai a', b', c' positifs dans le premier cas et négatifs dans le second, ou plutôt j'écrirai alors $-a'$, $-b'$, $-c'$.

Dans le premier cas,

$$2D - abc = abc + 4a'b'c' - 2(aa'^2 + bb'^2 + cc'^2)$$

ne sera jamais négatif, car

$$\begin{aligned}A = {} & aa'(b - 2a') + bb'(c - 2b') + cc'(a - 2c') \\ & + a'(a-2b')(b-2c') + b'(b-2c')(c-2a') + c'(c-2a')(a-2b') \\ & + (a - 2b')(b-2c')(c-2a')\end{aligned}$$

est essentiellement positif ou nul, et donne, réduction faite,

$$A = abc + 4a'b'c' - 2(aa'^2 + bb'^2 + cc'^2) = 2D - abc;$$

ainsi $2D - abc$ n'est jamais négatif; $2D \geqq abc$.

Dans le second cas, on met une nouvelle condition pour les réduites; prenant $a < b < c$, on suppose $a + b - 2(a' + b' + c')$ nul ou positif : cela est permis, car si l'on avait au contraire $a + b + \delta = 2a' + 2b' + 2c'$, δ étant positif, on poserait

$$\begin{aligned} x &= -x' + 0 \,.\, y' + z', \\ y &= 0 \,.\, x - y' + z', \\ z &= 0 \,.\, x' + 0 \,.\, y' + z', \end{aligned}$$

substitution de déterminant $+1$ qui changerait la forme

$$ax^2 + by^2 + cz^2 - 2a'yz - 2b'xz - 2c'xy$$

dans la forme équivalente

$$ax'^2 + by'^2 + [a + b + c - 2(a' + b' + c')]z'^2 \\ - 2(b - a' - c')y'z' - 2(a - b' - c')x'z' - 2c'x'y'.$$

Or on reconnaît que cette forme est encore réduite, et que, si on la représentait par

$$a_1 x'^2 + b_1 y'^2 + c_1 z'^2 - 2a'_1 y'z' - 2b'_1 x'z' - 2c'_1 x'y',$$

elle remplirait (outre les conditions ordinaires $a_1 - 2b'_1 \geqq 0$, etc.) la condition nouvelle demandée, que la somme des deux plus petits coefficients des carrés surpasse ou au moins égale la somme $2(a'_1 + b'_1 + c'_1)$ des coefficients des rectangles.

Ceci posé, on a

$$D = abc - 2a'b'c' - (aa'^2 + bb'^2 + cc'^2),$$

d'où

$$2D - abc = abc - 4a'b'c' - 2(aa'^2 + bb'^2 + cc'^2),$$

quantité qui n'est jamais négative; car si l'on pose

$$\begin{aligned} B = &(a - 2c')(b - 2a')(c - 2b') \\ &+ (a - 2b')(b - 2c')(c - 2a') \\ &+ 2aa'[b + c - 2(a' + b' + c')] + 2bb'[c + a - 2(b' + c' + a')] \\ &+ 2cc'[a + b - 2(c' + a' + b')], \end{aligned}$$

cette quantité, qui n'est jamais négative, sera, réduction faite,

$$B = 2abc - 16a'b'c' - 4(aa'^2 + bb'^2 + cc'^2),$$

et ajoutée à la quantité positive employée déjà,

$$A = abc + 4a'b'c' - 2(aa'^2 + bb'^2 + cc'^2),$$

elle donnera

$$A + B = 3abc - 12a'b'c' - 6(aa'^2 + bb'^2 + cc'^2) = 6D - 3abc.$$

Ainsi $2D - abc$ n'est jamais négatif.

On parvient au même résultat ainsi qu'il suit :

Soit

$$\begin{aligned} C = &c(a - 2c')(b - 2a') \\ &+ c(a - 2b')(b - 2c') \\ &+ 2aa'(c - 2a') + 2bb'(c - 2b') + 2cc'[a + b - 2(a' + b' + c')]. \end{aligned}$$

Cette quantité, qui n'est jamais négative, est, réduction faite,

$$C = 2abc - 4(aa'^2 + bb'^2 + cc'^2):$$

d'ailleurs

$$B = 2abc - 16a'b'c' - 4(aa'^2 + bb'^2 + cc'^2);$$

de là,

$$B + C = 4abc - 16a'b'c' - 8(aa'^2 + bb'^2 + cc'^2) = 8D - 4abc.$$

Cette démonstration ne diffère de celle de Gauss que par la notation et quelques développements; d'ailleurs elle emploie les trois mêmes identités.

La Note de Gauss sur l'ouvrage de M. Seeber finit par l'exposé de quelques considérations géométriques relatives aux formes binaires et ternaires; elles ont été développées par M. Dirichlet (*Journal de Crelle*, tome XL). On trouve à la fin du Mémoire de M. Dirichlet [*] une démonstration géométrique du théorème de Seeber; M. Hermite en a aussi donné une dans le même Journal. Les deux démonstrations emploient une même inégalité, que les deux auteurs ont obtenue par des moyens différents. Il convient de dire ici qu'à la fin de sa Note Gauss donne l'énoncé géométrique suivant du théorème de Seeber :

Dans tout parallélipipède, où les diagonales, tant celles des faces que celles du parallélipipède, ne sont pas inférieures aux arêtes, le volume du parallélipipède multiplié par $\sqrt{2}$ n'est jamais inférieur au volume du parallélipipède rectangle formé avec trois arêtes issues d'un même sommet.

[*] Cet excellent Mémoire est écrit en langue allemande, et il serait bien à désirer qu'on nous en donnât une traduction française. (J. LIOUVILLE.)