

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

LÉOPOLD KRONECKER

**Démonstration d'un théorème de M. Kummer**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 2<sup>e</sup> série*, tome 1 (1856), p. 396-398.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1856\\_2\\_1\\_\\_396\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1856_2_1__396_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

## DÉMONSTRATION

D'UN

## THÉORÈME DE M. KUMMER;

PAR M. LÉOPOLD KRONECKER.

Dans son Mémoire sur la Théorie des nombres complexes composés de racines ( $\lambda^{\text{ièmes}}$ ) de l'unité et de nombres entiers, M. Kummer a donné le théorème important que voici [\*] :

*La condition nécessaire et suffisante pour que le premier facteur du nombre des classes H soit divisible par  $\lambda$ , consiste en ce qu'un quelconque des  $\frac{\lambda-3}{2}$  premiers nombres bernoulliens soit divisible par  $\lambda$ .*

On peut démontrer ce théorème d'une manière très-simple. En effet, si l'on conserve les notations de M. Kummer [\*\*], tout se réduit à examiner si la congruence

$$\psi(\gamma^{2n-1}) = b_0 + b_1 \gamma^{2n-1} + \dots + b_{\lambda-2} \cdot \gamma^{(\lambda-2)(2n-1)} \equiv 0 \pmod{\lambda},$$

est ou n'est pas satisfaite pour une quelconque des valeurs de

$$n = 1, 2, 3, \dots, \mu.$$

Donc, puisqu'on a [\*\*\*]

$$\lambda b_k = \gamma \cdot \gamma_{k-1} - \gamma_k,$$

il s'agit d'examiner la congruence

$$(I) \quad \lambda \cdot \psi(\gamma^{2n-1}) = \Sigma (\gamma \gamma_{k-1} - \gamma_k) \gamma^{(2n-1)k} \equiv 0 \pmod{\lambda^2},$$

où le signe de sommation s'étend à toutes les valeurs de

$$k = 0, 1, 2, 3, \dots, (\lambda - 2).$$

[\*] Voir ce Journal, tome XVI, page 479.

[\*\*] Voir ce Journal, tome XVI, page 475.

[\*\*\*] Voir ce Journal, tome XVI, page 474.

Partons de l'égalité identique

$$\gamma^k - (\gamma^k - \gamma_k) = \gamma_k.$$

En élevant cette égalité à la puissance  $2n$  et en observant que le nombre entier  $(\gamma^k - \gamma_k)$  est un multiple de  $\lambda$ , on obtient la congruence

$$\gamma^{2nk} - 2n\gamma^{(2n-1)k}(\gamma^k - \gamma_k) \equiv \gamma_k^{2n} \pmod{\lambda^2}.$$

ou

$$(1 - 2n)\gamma^{2nk} + 2n\gamma_k\gamma^{(2n-1)k} \equiv \gamma_k^{2n} \pmod{\lambda^2}.$$

En remplaçant  $k$  par  $(k-1)$  et en multipliant par  $\gamma^{2n}$ , il vient

$$(1 - 2n)\gamma^{2nk} + 2n\gamma_{k-1}\gamma^{(2n-1)(k+1)} \equiv \gamma^{2n}\gamma_{k-1}^{2n} \pmod{\lambda^2}.$$

En retranchant cette congruence de celle qui précède, on obtient

$$2n(\gamma\gamma_{k-1} - \gamma_k)\gamma^{(2n-1)k} \equiv \gamma^{2n}\gamma_{k-1}^{2n} - \gamma_k^{2n} \pmod{\lambda^2}.$$

Donc on aura de même

$$2n \cdot \Sigma(\gamma\gamma_{k-1} - \gamma_k)\gamma^{(2n-1)k} \equiv \gamma^{2n} \Sigma\gamma_{k-1}^{2n} - \Sigma\gamma_k^{2n} \pmod{\lambda^2}.$$

Or, comme les nombres  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{\lambda-2}$  et les nombres  $1, 2, 3, \dots, (\lambda-1)$  sont les mêmes à l'ordre près, on a enfin

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2n \cdot \Sigma(\gamma\gamma_{k-1} - \gamma_k)\gamma^{(2n-1)k} \\ \equiv (\gamma^{2n} - 1)[1^{2n} + 2^{2n} + \dots + (\lambda-1)^{2n}] \pmod{\lambda^2}. \end{array} \right.$$

Le nombre  $2n$  est moindre que  $\lambda$ . On voit donc que la discussion de la congruence (I) se réduit à la question si le second membre de la congruence (II) est divisible par  $\lambda^2$ . Cela n'a pas lieu pour la valeur

$$2n = 2\mu = \lambda - 1.$$

Car, suivant l'hypothèse (faite par M. Kummer) que le nombre  $\gamma^\mu + 1$  ne soit pas divisible par  $\lambda^2$ , le nombre  $\gamma^{2\mu} - 1$  ne contiendra qu'une fois le facteur  $\lambda$ , et, en vertu du théorème de Fermat, la somme

$$1^{\lambda-1} + 2^{\lambda-1} + \dots + (\lambda-1)^{\lambda-1}$$

sera congrue à  $-1$  suivant le module  $\lambda$ . Ensuite, pour décider si le produit

$$(\gamma^{2^n} - 1) [1^{2^n} + 2^{2^n} + \dots + (\lambda - 1)^{2^n}]$$

est divisible par  $\lambda^2$  pour une des valeurs de  $n = 1, 2, \dots, (\mu - 1)$ , observons que, dans ces cas, le nombre  $(\gamma^{2^n} - 1)$  n'est pas divisible par  $\lambda$ , et que l'expression connue de la somme

$$1^{2^n} + 2^{2^n} + \dots + (x - 1)^{2^n}$$

en fonction rationnelle entière de  $x$ , fournit la congruence

$$1^{2^n} + 2^{2^n} + \dots + (\lambda - 1)^{2^n} \equiv \pm B_n \cdot \lambda \pmod{\lambda^2},$$

$B_n$  désignant le nombre bernoullien  $n^{\text{ième}}$ . Donc, pour que la congruence (1) ait lieu pour une quelconque des valeurs de

$$n = 1, 2, 3, \dots, \mu,$$

il faut et il suffit que la congruence

$$B_n \equiv 0 \pmod{\lambda}$$

soit satisfaite pour une quelconque des valeurs de  $n = 1, 2, \dots, (\mu - 1)$ ; ce qu'il fallait démontrer.

