JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LÉOPOLD KRONECKER

Sur quelques fonctions symétriques et sur les nombres de Bernoulli

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 1 (1856), p. 385-391.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1856_2_1__385_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

SUR

QUELQUES FONCTIONS SYMÉTRIQUES

ET SUR

LES NOMBRES DE BERNOULLI;

PAR M. LÉOPOLD KRONECKER.

En exprimant les fonctions symétriques d'un nombre quelconque de quantités en fonction des sommes de puissances semblables des mêmes quantités, on obtient en général des formules assez compliquées. Par cette raison, je ne crois pas inutile d'indiquer quelques fonctions symétriques pour lesquelles ces formules deviennent très-simples.

Si l'on désigne n quantités quelconques par $a, b, c, \ldots$, la somme des expressions de la forme

$$(\pm a \pm b \pm c \pm \ldots)^k,$$

qu'on obtient en faisant toutes les combinaisons des signes $\pm$, sera évidemment une fonction symétrique des quantités $a, b, c, \ldots$. De même, si l'on prend la somme de toutes les expressions de la forme

$$\pm(\pm a \pm b \pm c \pm \ldots)^k,$$

le signe placé en dehors des parenthèses étant le produit des signes placés au dedans, cette somme sera une fonction symétrique des quantités $a, b, c, \ldots$. Ces deux sommes étant désignées respectivement par P_k et R_k, je vais établir les formules qui font connaître les expressions P_k et R_k en fonction des sommes de puissances semblables des quantités $a, b, c, \ldots$, mêmes.

§ I.

Soit

$$(1) \qquad F(x) = (e^{ax} + e^{-ax})(e^{bx} + e^{-bx})(e^{cx} + e^{-cx})\ldots$$

En développant ce produit, on aura

$$F(x) = \sum e^{x(\pm a \pm b \pm c \pm \ldots)},$$

où le signe de sommation s'étend à toutes les combinaisons des signes $\pm$ dans l'exposant. Le second membre développé en série donne

$$F(x) = 2^n + P_1 x + P_2 . \frac{x^2}{1.2} + P_3 . \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots,$$

où les lettres n, P_1, P_2, P_3,..., ont le sens indiqué plus haut. Or il est évident que l'expression P_k s'annule pour les valeurs impaires du nombre k: ainsi l'on a

$$\text{(II)} \qquad F(x) = 2^n + \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{P_{2k}}{1.2.3\ldots 2k} x^{2k}.$$

D'un autre côté, en différentiant le logarithme du produit (I), on obtient

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = a . \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{ax} + e^{-ax}} + b . \frac{e^{bx} - e^{-bx}}{e^{bx} + e^{-bx}} + c . \frac{e^{cx} - e^{-cx}}{e^{cx} + e^{-cx}} + \ldots,$$

$F'(x)$ étant la dérivée de $F(x)$. Développons les divers termes du second membre en séries, et désignons par S_k la somme des puissances semblables $k^{\text{ièmes}}$ des quantités a, b, c,.... Il vient alors

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{2^2(2^2-1)}{1.2} B_1 . S_2 . x - \frac{2^4(2^4-1)}{1.2.3.4} B_2 . S_4 . x^3 + \frac{2^6(2^6-1)}{1.2.3.4.5.6} . B_3 . S_6 . x^5 - \ldots,$$

ou, en employant le signe de sommation,

$$\text{(III)} \qquad F'(x) = F(x) . \sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^{k-1} . \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{1.2.3\ldots 2k} B_k . S_{2k} . x^{2k-1},$$

où les lettres B_1, B_2, B_3,..., désignent les nombres de Bernoulli conformément à l'usage. En portant dans cette formule les expressions de

$F(x)$ et $F'(x)$ tirées de la formule (II), on aura

$$\text{(IV)}\left\{\begin{aligned} &\sum \frac{2k \cdot P_{2k}}{1.2.3\ldots 2k} \cdot x^{2k-1} \\ &= \left\{2^n + \sum \frac{P_{2k}}{1.2.3\ldots 2k} x^{2k}\right\} \cdot \sum (-1)^{k-1} \cdot \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{1.2.3\ldots 2k} \cdot B_k \cdot S_{2k} \cdot x^{2k-1}, \end{aligned}\right.$$

où toutes les sommations s'étendent aux valeurs de $k = 1, 2, 3, \ldots, \infty$.

Si l'on fait

$$x = y \cdot \sqrt{-1}$$

et

$$\frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{1.2.3\ldots 2k} \cdot B_k \cdot S_{2k} = s_{2k},$$

$$\frac{(-1)^k}{2^n} \cdot \frac{P_{2k}}{1.2.3\ldots 2k} = p_{2k},$$

la formule (IV) se change en celle-ci :

$$\sum s_{2k} \cdot y^{2k-1} + \left(\sum p_{2k} \cdot y^{2k}\right) \cdot \left(\sum s_{2k} \cdot y^{2k-1}\right) + \sum 2k \cdot p_{2k} \cdot y^{2k-1} = 0.$$

En égalant à zéro le coefficient de y^{2m-1}, m étant un nombre quelconque, on obtient la relation suivante :

$$s_{2m} + s_{2m-2} \cdot p_2 + s_{2m-4} \cdot p_4 + \ldots + s_2 \cdot p_{2m-2} + 2m \cdot p_{2m} = 0,$$

qui a précisément la forme des formules de Newton. On en conclut le théorème que voici :

En désignant par P_k *la somme des expressions de la forme*

$$(\pm a \pm b \pm c \pm \ldots)^k,$$

et par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots,$ *les* $2m$ *racines de l'équation*

$$\begin{aligned} &2^n . 1.2\ldots 2m . z^{2m} - P_2 . 3.4\ldots 2m . z^{2m-2} \\ &+ P_4 . 5.6\ldots 2m . z^{2m-4} - \ldots \pm P_{2m} = 0, \end{aligned}$$

on a l'égalité

$$\begin{aligned} &1.2.3\ldots 2\mu . (\alpha^{2\mu} + \beta^{2\mu} + \gamma^{2\mu} + \ldots) \\ &= 2^{2\mu}(2^{2\mu} - 1) . B_\mu . (a^{2\mu} + b^{2\mu} + c^{2\mu} + \ldots), \end{aligned}$$

la lettre μ *désignant un nombre entier positif quelconque* $\leqq m$.

Par suite, on peut faire usage des formules connues, qui déterminent les coefficients d'une équation en fonctions des sommes de puissances semblables des racines, pour en déduire immédiatement les formules cherchées.

§ II.

Soit

$$\text{(V)} \qquad \Phi(x) = (e^{ax} - e^{-ax})(e^{bx} - e^{-bx})(e^{cx} - e^{-cx})\ldots.$$

En développant ce produit, on aura

$$\Phi(x) = \sum [\pm e^{x(\pm a \pm b \pm c \pm \ldots)}],$$

le signe placé devant la lettre e étant le produit des signes contenus dans l'exposant. En développant en série et en conservant la définition que nous avons donnée de la lettre R_k plus haut, il vient

$$\text{(VI)} \qquad \Phi(x) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{R_k}{1.2.3\ldots k} \cdot x^k.$$

Or il est visible que les séries qu'on peut substituer aux divers facteurs du produit (V) commencent respectivement par

$$2ax,\ 2bx,\ 2cx, \ldots,$$

et que ces séries ne contiennent que les puissances impaires de x. Par suite, le développement de $\Phi(x)$ doit commencer par le terme

$$2^n.a.b.c\ldots x^n,$$

et il ne contiendra que les puissances paires ou impaires de x, suivant que le nombre n est pair ou impair. L'équation (VI) pourra donc s'écrire de la manière suivante :

$$\text{(VII)} \qquad \Phi(x) = x^n . \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{R_{n+2k}}{1.2.3\ldots(n+2k)} \cdot x^{2k},$$

et, d'après ce que nous venons d'observer, on aura d'ailleurs l'égalité

(VIII) $$R_n = 2^n.1.2.3\ldots n.a.b.c\ldots.$$

D'un autre côté, en différentiant le logarithme du produit (V), on obtient

$$\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} = a.\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{e^{ax}-e^{-ax}} + b.\frac{e^{bx}+e^{-bx}}{e^{bx}-e^{-bx}} + c.\frac{e^{cx}+e^{-cx}}{e^{cx}-e^{-cx}} + \ldots,$$

$\Phi'(x)$ étant la dérivée de $\Phi(x)$. En développant en séries les divers termes du second membre et en conservant la notation employée plus haut,

$$S_k = a^k + b^k + c^k + \ldots,$$

on aura

$$\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} = \frac{n}{x} + \sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^{k+1}.\frac{2^{2k}.B_k}{1.2.3\ldots 2k}.S_{2k}.x^{2k-1}.$$

En portant dans cette formule les expressions de $\Phi(x)$ et $\Phi'(x)$ tirées de l'équation (VII), on obtient

$$(\mathrm{IX})\left\{\begin{aligned} &x^{n-1}.\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{(n+2k)R_{n+2k}}{1.2.3\ldots(n+2k)}.x^{2k} = n.x^{n-1}\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{R_{n+2k}}{1.2.3\ldots(n+2k)}.x^{2k}\\ &+x^n.\left(\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{R_{n+2k}}{1.2.3\ldots(n+2k)}.x^{2k}\right).\left(\sum_{k=1}^{k=\infty}(-1)^{k+1}.\frac{2^{2k}.B_k}{1.2.3\ldots 2k}.S_{2k}.x^{2k-1}\right).\end{aligned}\right.$$

Si l'on fait

$$\varpi_{2k} = \frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots(n+2k)}.\frac{R_{n+2k}}{R_n},$$

$$\sigma_{2k} = (-1)^k.\frac{2^{2k}.B_k}{1.2.3\ldots 2k}.S_{2k},$$

l'équation (IX) se change en celle-ci :

$$(\mathrm{X})\left\{\begin{aligned} &x^{n-1}.\sum\frac{R_n}{1.2\ldots n}(n+2k)\varpi_{2k}.x^{2k}\\ &= n.x^{n-1}\sum\frac{R_n}{1.2\ldots n}.\varpi_{2k}.x^{2k} - x^n.\left(\sum\frac{R_n}{1.2.n}.\varpi_{2k}.x^{2k}\right).\left(\sum\sigma_{2k+2}.x^{2k+1}\right),\end{aligned}\right.$$

où toutes les sommations commencent par la valeur $k = 0$.

Supposons maintenant qu'aucune des quantités a, b, c,..., ne soit égale à zéro. Alors l'équation (VIII) fait voir que la valeur de R_n est différente de zéro. On peut donc dégager l'équation (X) du facteur commun $\frac{x^{n-1}.R_n}{1.2\ldots n}$. Cela fait, cette équation peut s'écrire comme il suit :

$$\sum 2k.\varpi_{2k}.x^{2k} + \left(\sum \varpi_{2k}.x^{2k}\right).\left(\sum \sigma_{2k+2}.x^{2k+2}\right) = 0.$$

En égalant à zéro le coefficient de x^{2m}, m étant un nombre quelconque, on obtient la relation

$$\sigma_{2m} + \sigma_{2m-2}.\varpi_2 + \sigma_{2m-4}.\varpi_4 + \ldots + \sigma_2.\varpi_{2m-2} + 2m.\varpi_{2m} = 0.$$

En comparant cette relation avec les formules de Newton, on en déduit le théorème suivant :

En désignant par R_k *la somme des expressions de la forme*

$$\pm(\pm a \pm b \pm c\ldots)^k,$$

et par α, β, γ,..., *les* $2m$ *racines de l'équation*

$$(n+1)(n+2)\ldots(n+2m).R_n.z^{2m} + (n+3)(n+4)\ldots(n+2m)R_{n+2}.z^{2m-2}$$
$$+ (n+5)(n+6)\ldots(n+2m).R_{n+4}.z^{2m-4} + \ldots + R_{n+2m} = 0,$$

on a l'égalité

$$1.2.3\ldots 2\mu.(\alpha^{2\mu} + \beta^{2\mu} + \gamma^{2\mu} + \ldots)$$
$$= (-1)^{\mu}.2^{2\mu}.B_{\mu}.(a^{2\mu} + b^{2\mu} + c^{2\mu} + \ldots)$$

pour toutes les valeurs de $\mu = 1, 2, \ldots, m$.

On peut donc se servir des formules connues, par lesquelles les coefficients d'une équation s'expriment en fonctions des sommes de puissances semblables des racines, pour en déduire immédiatement les expressions des quantités

$$\frac{R_{n+1}}{R_n}, \quad \frac{R_{n+2}}{R_n}, \ldots,$$

en fonction des sommes de puissances semblables des quantités a, b,

$c,\ldots$ Donc les expressions R_1, $R_2,\ldots$, R_{n-1} étant nulles, et la valeur de R_n se trouvant déterminée par l'équation (VIII), le problème proposé est résolu.

§ III.

En attribuant des valeurs spéciales aux quantités a, b, $c,\ldots$, les deux théorèmes que je viens d'énoncer fournissent des formules pour les nombres de Bernoulli. Par exemple, en supposant que a, b, $c,\ldots$, soient les diverses racines de l'équation $x^{2m} = 1$, on sait que les sommes $a^{2\mu} + b^{2\mu} + c^{2\mu} + \ldots$ s'annulent, μ étant $< m$, et que la somme $a^{2m} + b^{2m} + c^{2m} + \ldots$ est égale à $2m$. Par suite, les quantités P_2, $P_4,\ldots$, P_{2m-2}, ainsi que les quantités R_{2m+2}, $R_{2m+4},\ldots$ R_{4m-2} se réduiront à zéro. Puis en observant que le produit $a.b.c\ldots$, c'est-à-dire le produit de toutes les racines de l'équation $x^{2m} = 1$, est égal à -1, la formule (VIII) donne

$$R_{2m} = -2^{2m}.1.2.3\ldots 2m.$$

Donc, en vertu des deux théorèmes énoncés ci-dessus, les quantités P_{2m} et R_{n+2m} se trouveront déterminées comme il suit :

$$(-1)^m.P_{2m} = -2^{4m}.(2^{2m}-1).B_m,$$
$$(1.2.3\ldots 2m)^2.R_{4m} = (-1)^{m+1}.2^{2m}.1.2.3\ldots 4m.R_{2m}.B_m.$$

D'où l'on déduit pour les nombres de Bernoulli les formules curieuses que voici :

$$B_m = \frac{(-1)^{m+1}}{2^{4m}(2^{2m}-1)}.\sum(\pm a \pm b \pm c \pm \ldots)^{2m},$$
$$B_m = \frac{(-1)^m}{2^{4m}.(2m+1)(2m+2)\ldots 4m}.\sum[\pm(\pm a \pm b \pm c\ldots)^{4m}],$$

les lettres a, b, $c,\ldots$, désignant toutes les diverses racines de l'équation $x^{2m} = 1$.