JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BERTRAND

Note sur le gyroscope de M. Foucault

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 1 (1856), p. 379-382.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1856_2_1__379_0>

NOTE

SUR

LE GYROSCOPE DE M. FOUCAULT;

PAR M. J. BERTRAND.

Tous les savants connaissent aujourd'hui l'ingénieux appareil auquel M. Léon Foucault a donné le nom de *gyroscope*. Je me dispenserai donc d'en reproduire ici la description, et il me suffira de rappeler qu'il se compose essentiellement d'un corps solide de révolution tournant rapidement autour de son axe de figure, tandis que celui-ci est obligé, par la nature du système, de rester sur un plan fixe par rapport à la surface de la terre. Le mouvement de l'axe du gyroscope sur ce plan est d'ailleurs entièrement libre.

C'est dans les principes découverts par M. Poinsot qu'il faut chercher l'explication presque intuitive des phénomènes observés, et la Note que l'on va lire n'est qu'un corollaire de l'admirable Mémoire composé il y a vingt ans par l'illustre géomètre, et publié en entier dans le tome XVI (1^{re} série) de ce Journal.

On sait que M. Poinsot regarde chaque molécule d'un corps en mouvement comme animée d'une force égale au produit de la masse par sa vitesse. Toutes les forces qui, à un instant donné, animent les molécules d'un corps solide en mouvement, peuvent être composées suivant les règles de la statique et réduites à une force et à un couple; cette force et ce couple sont invariables si le corps solide est libre, et qu'aucune force extérieure ne le sollicite. Mais si des forces extérieures viennent joindre leur influence à celle de l'inertie, le système des forces qui animent le corps après un temps infiniment petit dt, peut être considéré comme composé de deux autres: 1° le système des forces *finies* qui animaient le corps au commencement de l'instant considéré; 2° le système des forces extérieures qui ont agi sur le corps, multipliées chacune par la durée dt de l'instant considéré.

Ce principe fondamental a conduit M. Poinsot à ses plus beaux théorèmes, et il suffit, comme on va le voir, pour expliquer complétement les phénomènes découverts par M. Foucault.

Je suppose l'appareil disposé de telle sorte, que l'axe de rotation qui est l'axe de symétrie du tore soit assujetti à rester sur un plan P, fixe par rapport à la Terre. Soit o le centre de l'instrument, que nous supposerons fixe. Ne nous occupons que du mouvement du système autour de ce point, et réduisons, par conséquent, toutes les forces aux couples qu'elles produisent.

Soient oA la position actuelle de l'axe de rotation dans le plan P, et oI la parallèle à l'axe du monde menée par le point o.

Pour que l'axe oA restât en *repos apparent* sur le plan P, il faudrait qu'en réalité il tournât autour de oI avec une vitesse égale à celle de la Terre, et décrivît en vingt-quatre heures un cône de révolution. Soit, sur ce cône, oA' la position infiniment voisine de oA. Dans le premier instant, le gyroscope tournant autour de oA, le couple qui l'anime a son axe dirigé suivant oA et égal au produit du moment d'inertie μ, par la vitesse angulaire ω. Pour que cet axe, que nous représenterons par oG, devienne dans l'instant suivant oG' (dirigé suivant oA'), il faut que, pendant l'instant infiniment petit dt, le système ait été sollicité par un couple dont l'axe soit dirigé suivant GG', et dont l'intensité soit représentée par

$$\frac{GG'}{dt}.$$

Or, la seule action qui s'exerce directement sur l'instrument est la réaction du plan fixe P; cette réaction ne peut produire que des forces perpendiculaires au plan P, et, par suite, un couple dont l'axe sera situé dans ce plan; il faut donc que la droite GG' soit parallèle au plan P, et, pour cela, que ce plan soit tangent au cône, et, par suite, perpendiculaire au plan IoA. Nous avons donc ce premier théorème:

L'axe du gyroscope étant assujetti à rester sur un plan P, *il ne peut rester en équilibre que s'il coïncide avec la projection sur le plan de la parallèle à l'axe du monde.*

Lorsque la coïncidence dont nous venons de parler n'a pas lieu à l'origine, l'équilibre relatif est impossible, et l'instrument fait des oscillations dont nous devons calculer les lois.

Et d'abord remarquons que, quelle que soit la position initiale oA de l'axe, on peut appliquer à l'instrument le couple nécessaire pour maintenir l'axe en repos apparent sans changer la vitesse de rotation, pourvu que l'on applique le couple égal et contraire. Or ce couple, d'après la démonstration du théorème précédent, a pour axe une perpendiculaire au plan IoA, et en nommant

μ le moment d'inertie du gyroscope;
ω la vitesse de rotation de la Terre;
ω_1 la vitesse angulaire de l'instrument;

le moment de ce couple est, comme on le voit immédiatement,

$$\mu\omega\omega_1 \sin IoA;$$

et, puisque ce couple maintient l'axe du gyroscope en repos apparent, c'est le couple égal et contraire qui fait glisser l'instrument sur le limbe.

Ce couple est décomposable en deux autres, l'un dont l'axe est situé dans le plan du limbe et qui sera détruit, l'autre seul efficace, dont l'axe perpendiculaire au plan du limbe est représenté par

$$\mu\omega\omega_1 \sin IoA \cos(\overline{P}, \overline{IoA}),$$

$(\overline{P}, \overline{IoA})$ désignant l'angle dièdre formé par le plan P avec le plan IoA. Or, dans le trièdre formé par les droites oA, oI et par la projection oH de oI sur le plan P, on a

$$\sin IoA \cos(P, IoA) = \cos IoH \sin AoH;$$

et comme l'angle IoH est constant, on voit que le couple *accélérateur* est proportionnel au sinus de l'écart entre la position actuelle de l'axe et sa position d'équilibre. De là résulte que la loi des oscillations est celle du pendule simple, et que leur durée est proportionnelle à la racine carrée du cosinus de l'angle formé par l'axe du monde avec le plan P.

Telle est l'explication très-simple des phénomènes observés. Je dois faire remarquer, toutefois, qu'après avoir trouvé l'expression du couple qui pousse l'instrument, il faut encore expliquer pourquoi la vitesse acquise tend à se conserver, car il n'y a pas là, comme dans le cas d'un point matériel, *inertie* proprement dite. On sait, en effet, que l'axe oA étant animé d'un mouvement de translation sur le limbe, l'instrument ne tourne pas rigoureusement autour de oA, mais autour d'un axe faisant un petit angle avec oA et situé dans le plan mené par oA perpendiculairement au limbe. Cet axe de rotation n'étant pas un axe principal d'inertie, tend à se déplacer et à décrire un petit cône; mais pour décrire ce cône, il lui faudrait pénétrer à travers le limbe, dont le plan résiste et produit un couple qui le relève et lui conserve purement et simplement sa vitesse tangente au plan P, et que vient accroître le couple accélérateur calculé plus haut.

J'ajouterai enfin que le petit angle formé par l'axe du gyroscope avec l'axe véritable de rotation ayant été négligé, les formules trouvées ne sont que très-approximatives, et c'est pour cela qu'elles ne coïncident pas avec les résultats rigoureux obtenus par la méthode très-savante, mais beaucoup plus difficile, de M. Bour.