JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur les sommes de diviseurs des nombres

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 1 (1856), p. 349-350.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1856_2_1__349_0>

SUR

LES SOMMES DE DIVISEURS DES NOMBRES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

On sait qu'Euler a trouvé une relation remarquable entre les sommes de diviseurs des nombres. En désignant par $\int(n)$ la somme des diviseurs du nombre n, on a

$$\int(n) = \int(n-1) + \int(n-2) - \int(n-5) - \int(n-7) + \ldots.$$

Les nombres placés sous le signe $\int$ dans le second membre sont de l'une ou de l'autre des deux formes

$$n - \frac{3m^2 - m}{2}, \quad n - \frac{3m^2 + m}{2},$$

et le terme qui répond à chacun d'eux est positif ou négatif suivant que m est ou n'est pas impair. On suppose $\int(0) = n$; mais on n'admet pas sous le signe $\int$ de nombre négatif, et il faut s'arrêter au moment où un tel nombre s'introduirait par la loi de la série.

Cette dernière remarque doit être également appliquée à une autre formule dont je vais dire ici deux mots. Dans cette formule, curieuse aussi, les nombres placés sous le signe $\int$ sont tous impairs et déduits du nombre $2n+1$, pris à volonté pour point de départ, en en retranchant le double d'un nombre triangulaire : la loi des coefficients est d'ailleurs très-différente. On a, en effet,

$$\text{(A)} \qquad \sum \left[n - 5\frac{m(m+1)}{2} \right] \int (2n + 1 - m^2 - m) = 0,$$

le signe $\sum$ se rapportant aux valeurs successives $0, 1, 2, 3, \ldots,$ de m, sous la condition de s'arrêter à l'instant où l'on cesserait d'avoir

$$2n+1-m^2-m>0.$$

La formule (A) peut s'écrire autrement :

$$n\left[\int(2n+1)+\int(2n+1-2)+\ldots+\int(2n+1-m^2-m)+\ldots\right]$$
$$=5\left[\int(2n+1-2)+\ldots+\frac{m(m+1)}{2}\int(2n+1-m^2-m)+\ldots\right].$$

Soit, par exemple, $n=4$; on devra avoir

$$4\left[\int(9)+\int(7)+\int(3)\right]=5\left[\int(7)+3\int(3)\right],$$

c'est-à-dire

$$4(13+8+4)=5(8+3.4),$$

ce qui est exact.

J'ignore si quelqu'un avait déjà donné la formule (A), qui n'est au surplus qu'une conséquence immédiate de l'équation connue

$$\left(1+x+\ldots+x^{\frac{m(m+1)}{2}}+\ldots\right)^4=1+4x+\ldots+x^n\int(2n+1)+\ldots;$$

il suffit de prendre la différentielle logarithmique des deux membres, et d'égaler de part et d'autre les coefficients des puissances de x après avoir chassé les dénominateurs.