JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Expression remarquable de la quantité qui, dans le mouvement d'un système de points matériels à liaisons quelconques, est un minimum en vertu du principe de la moindre action

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 1 (1856), p. 297-304.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1856_2_1__297_0>

EXPRESSION REMARQUABLE

DE

LA QUANTITÉ QUI, DANS LE MOUVEMENT D'UN SYSTÈME DE POINTS MATÉRIELS A LIAISONS QUELCONQUES, EST UN MINIMUM EN VERTU DU PRINCIPE DE LA MOINDRE ACTION;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Le principe de la moindre action n'est applicable que dans les systèmes où l'intégrale des forces vives a lieu. Soient donc m, m', m'',..., les masses des points matériels qui forment un système donné remplissant cette condition, v, v', v'',... leurs vitesses, $\sum mv^2$ la force vive totale, et U la fonction des forces. L'intégrale des forces vives pourra s'écrire

$$\sum mv^2 = 2(\mathrm{U} + \mathrm{K}),$$

K étant une constante qui dépend de la force vive initiale. Nous supposons cette constante déterminée, et nous suivons le système depuis son départ d'une certaine position (1) jusqu'à son arrivée à une autre position (2). Dans la position (1) la force vive est connue par hypothèse, et dès lors dans la position (2), comme dans toutes les autres, elle peut se calculer au moyen de la fonction des forces.

Soit ds l'élément décrit pendant l'instant infiniment petit dt par le point matériel m. On aura

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Substituant cette valeur dans l'intégrale des forces vives, on en tirera ensuite

$$dt = \sqrt{\frac{\Sigma\, mds^2}{2(\mathrm{U} + \mathrm{K})}},$$

ce qui permettra d'éliminer partout où on le jugera convenable l'élément dt du temps.

La quantité que l'on considère dans le principe de la moindre action est l'intégrale, prise depuis la position (1) jusqu'à la position (2), de la somme des produits $mvds$ de la quantité de mouvement de chaque point matériel par l'élément ds qu'il décrit pendant chaque instant dt sur sa trajectoire. C'est donc

$$\int \sum mvds,$$

ou

$$\int dt \sum mv^2$$

en remplaçant ds par vdt. Mais pour se faire une idée vraiment nette du principe dont nous parlons, il faut remplacer $\sum mv^2$ et dt par leurs valeurs ci-dessus. On a de cette manière

$$dt \sum mv^2 = \sqrt{2(\text{U}+\text{K})\sum mds^2};$$

et c'est l'intégrale de cette dernière quantité

$$\sqrt{2(\text{U}+\text{K})\sum mds^2}$$

que le principe de la moindre action concerne proprement. Il faut comparer la valeur qu'elle prend dans le mouvement réel qui transporte le système de la position (1) à la position (2) aux valeurs qu'elle pourrait prendre dans tout autre mouvement fictif propre à effectuer ce même transport. Imaginons qu'on ait exprimé les coordonnées des divers points du système au moyen d'un certain nombre de variables indépendantes α, β,..., γ, de manière à vérifier les équations de condition fournies par les liaisons: α, β,..., γ varieront ensemble dans le passage tel qu'il s'opère en effet, de la position (1) pour laquelle on a

$$\alpha = \alpha_1, \quad \beta = \beta_1, \ldots, \quad \gamma = \gamma_1,$$

à la position (2) pour laquelle

$$\alpha = \alpha_2, \quad \beta = \beta_2, \ldots, \quad \gamma = \gamma_2.$$

On pourra regarder ces quantités comme des fonctions de l'une d'elles α, en sorte que

$$\beta = \mathrm{f}(\alpha), \ldots, \quad \gamma = f(\alpha).$$

Les fonctions f,..., f dépendent, je le répète, de la loi du mouvement qui s'exécute; elles sont parfaitement déterminées. En mettant pour $\beta,\ldots,\gamma$ leurs valeurs en α dans la quantité

$$\sqrt{2(\mathrm{U}+\mathrm{K})\sum mds^2},$$

cette quantité prendra la forme

$$\lambda(\alpha)\,d\alpha,$$

et son intégrale sera

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\lambda(\alpha)\,d\alpha.$$

Maintenant, dans cette même quantité

$$\sqrt{2(\mathrm{U}+\mathrm{K})\sum mds^2},$$

faisons

$$\beta=\varphi(\alpha),\ldots,\quad \gamma=\psi(\alpha),$$

les fonctions $\varphi,\ldots,\psi$ donnant toujours $\beta=\beta_1,\ldots,\gamma=\gamma_1$ pour $\alpha=\alpha_1$, et $\beta=\beta_2,\ldots,\gamma=\gamma_2$ pour $\alpha=\alpha_2$, mais étant d'ailleurs différentes de $\mathrm{f},\ldots,f$, et répondant par conséquent, non plus au mouvement réel, mais à un mouvement fictif, entre les mêmes positions extrêmes. Nous aurons une autre différentielle

$$\varpi(\alpha)\,d\alpha$$

et une autre intégrale

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\varpi(\alpha)\,d\alpha.$$

Or le principe de la moindre action consiste en ce que l'intégrale

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\lambda(\alpha)\,d\alpha$$

est moindre que toutes les autres

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\varpi(\alpha)\,d\alpha;$$

ou plutôt, il consiste en ce que c'est pour $\beta=\mathrm{f}(\alpha),\ldots,\ \gamma=f(\alpha)$ que l'intégrale de

$$\sqrt{2(\mathrm{U}+\mathrm{K})\sum mds^2},$$

prise de la position (1) à la position (2), a une variation nulle, les variations provenant du changement des fonctions par lesquelles on exprime arbitrairement $\beta,\ldots,\gamma$ en fonction de α dans l'intervalle indiqué.

Cela posé, je me propose de mettre la quantité

$$2(\mathrm{U}+\mathrm{K})\sum mds^2,$$

dont la racine carrée figure dans l'énoncé précédent, sous une forme remarquable de laquelle naîtront des conséquences intéressantes et des théorèmes nouveaux.

Les coordonnées des points $m, m', m'',\ldots$ du système étant exprimées au moyen des variables indépendantes $\alpha, \beta,\ldots, \gamma$, il est clair que

$$\sum mds^2$$

est une fonction homogène du second degré des différentielles $d\alpha$, $d\beta,\ldots, d\gamma$. Représentons donc sa valeur par

$$\mathrm{E}d\alpha^2 + 2\mathrm{F}d\alpha d\beta + \mathrm{G}d\beta^2 + 2\mathrm{H}d\alpha d\gamma + \ldots.$$

Comme elle est essentiellement positive, on pourra la mettre sous la forme d'une somme de carrés :

$$(\mathrm{P}d\alpha + \mathrm{Q}d\beta + \ldots + \mathrm{R}d\gamma)^2 + (\mathrm{P}'d\alpha + \mathrm{Q}'d\beta + \ldots + \mathrm{R}'d\gamma)^2 + \ldots,$$

P, Q, etc., étant comme E, F, etc., des fonctions de $\alpha, \beta,\ldots, \gamma$.

Désignons par $p, q,\ldots, r, p', q',\ldots, r'$, etc., d'autres fonctions de $\alpha, \beta,\ldots, \gamma$ liées à P, Q, etc., au moyen d'équations de deux formes distinctes, les unes à lettres semblables,

$$\begin{gathered}
\mathrm{P}p + \mathrm{P}'p' + \ldots = 1, \\
\mathrm{Q}q + \mathrm{Q}'q' + \ldots = 1, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathrm{R}r + \mathrm{R}'r' + \ldots = 1,
\end{gathered}$$

ayant pour second membre l'unité, et les autres à lettres dissemblables,

$$\begin{gathered}
\mathrm{P}q + \mathrm{P}'q' + \ldots = 0, \\
\mathrm{P}r + \mathrm{P}'r' + \ldots = 0, \\
\mathrm{Q}p + \mathrm{Q}'p' + \ldots = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{gathered}$$

dont le second membre est zéro. On peut toujours satisfaire à ces équations, dont on verra plus bas l'origine.

Posons

$$\begin{aligned}
P\,d\alpha + Q\,d\beta + \ldots + R\,d\gamma &= l,\\
P'\,d\alpha + Q'\,d\beta + \ldots + R'\,d\gamma &= l',\\
P''\,d\alpha + Q''\,d\beta + \ldots + R''\,d\gamma &= l'',\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
p\,\frac{d\theta}{d\alpha} + q\,\frac{d\theta}{d\beta} + \ldots + r\,\frac{d\theta}{d\gamma} &= n,\\
p'\,\frac{d\theta}{d\alpha} + q'\,\frac{d\theta}{d\beta} + \ldots + r'\,\frac{d\theta}{d\gamma} &= n',\\
p''\,\frac{d\theta}{d\alpha} + q''\,\frac{d\theta}{d\beta} + \ldots + r''\,\frac{d\theta}{d\gamma} &= n'',\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

θ désignant une fonction de α, β,..., γ. D'après la manière dont nous avons défini les coefficients p, q,..., r, p', q',..., r',..., on aura

$$nl + n'l' + n''l'' + \ldots = d\theta,$$

car c'est en exprimant que le premier membre égale identiquement le second membre développé

$$\frac{d\theta}{d\alpha}\,d\alpha + \frac{d\theta}{d\beta}\,d\beta + \ldots,$$

que l'on obtient entre $p, q, \ldots$ et $P, Q, \ldots$ les relations admises plus haut.

Actuellement prenons pour θ une solution *complète* de l'équation aux différences partielles

$$\left(p\frac{d\theta}{d\alpha}+q\frac{d\theta}{d\beta}+\ldots+r\frac{d\theta}{d\gamma}\right)^2+\left(p'\frac{d\theta}{d\alpha}+q'\frac{d\theta}{d\beta}+\ldots+r'\frac{d\theta}{d\gamma}\right)^2+\ldots=2(U+K),$$

c'est-à-dire de l'équation

$$n^2 + n'^2 + n''^2 + \ldots = 2(U + K).$$

Cela étant, et puisque déjà l'on a

$$\sum mds^2 = l^2 + l'^2 + l''^2 + \ldots,$$

le produit

$$2(U+K)\sum mds^2$$

deviendra

$$(n^2 + n'^2 + n''^2 + \ldots)(l^2 + l'^2 + l''^2 + \ldots),$$

par suite

$$(nl + n'l' + n''l'' + \ldots)^2 + (nl' - ln')^2 + (nl'' - ln'')^2 + (n'l'' - l'n'')^2 + \ldots,$$

ou enfin

$$(d\theta)^2 + (nl' - ln')^2 + (nl'' - ln'') + (n'l'' - l'n'')^2 + \ldots.$$

Les carrés qui viennent après $(d\theta)^2$ s'annulent tous si l'on pose

$$\frac{l}{n} = \frac{l'}{n'} = \frac{l''}{n''} = \ldots.$$

D'après les valeurs de l, l', l'',..., n, n', n'',..., les équations que je viens d'écrire sont des équations différentielles du premier ordre qui donneraient par l'intégration les valeurs de α, β,..., γ en fonction de l'une de ces variables, α par exemple. *Or si vous les joignez à l'intégrale des forces vives, vous aurez précisément ce que M. Hamilton nomme les intégrales intermédiaires des équations différentielles du second ordre, que la mécanique analytique fournit pour le mouvement du système de points matériels dont nous nous occupons.* Nos équations du *premier ordre* ne sont qu'en même nombre que ces équations du *second ordre* : aussi contiennent-elles, outre la constante K, les constantes arbitraires A, B, etc., que θ doit renfermer pour fournir une solution complète de l'équation aux différences partielles

$$\left(p\frac{d\theta}{d\alpha} + q\frac{d\theta}{d\beta} + \ldots + r\frac{d\theta}{d\gamma}\right)^2 + \ldots = 2(\mathrm{U} + \mathrm{K}).$$

En les différentiant, et éliminant les constantes K, A, B, etc., on retrouverait les équations du second ordre, telles que Lagrange les a données. C'est ce qu'on pourrait vérifier sans peine; mais il est plus simple encore d'établir directement nos équations du premier ordre par le principe même de la moindre action, en profitant de la forme commode que nous venons de donner à l'expression de la quantité

$$\sqrt{2(\mathrm{U} + \mathrm{K})\sum mds^2},$$

dont l'intégrale doit être un minimum, ou plutôt doit avoir une variation nulle en vertu de ce principe.

On fera qu'il en soit ainsi, en posant les équations

$$\frac{l}{n} = \frac{l'}{n'} = \frac{l''}{n''} = \ldots,$$

parce que $d\theta$ étant une différentielle exacte, la variation de son intégrale entre des limites fixes est égale à zéro. On n'a du reste aucun besoin de recourir ici aux règles du calcul des variations, et tout peut s'obtenir *sans calcul*, par un raisonnement facile qui s'offre de lui-même. Toutefois, pour être entièrement clair et rigoureux, il faudrait entrer à ce sujet dans quelques explications. Mais, dans le désir d'abréger, j'abandonne pour le moment ces détails à la sagacité du lecteur. J'y reviendrai dans une autre occasion. J'ajoute seulement que les conditions exigées aux limites, savoir que

$\beta = \beta_1, \ldots, \ \gamma = \gamma_1$ pour $\alpha = \alpha_1$, et $\beta = \beta_2, \ldots, \ \gamma = \gamma_2$ pour $\alpha = \alpha_2$,
seront remplies en disposant pour cela des constantes arbitraires introduites par l'intégration des équations différentielles

$$\frac{l}{n} = \frac{l'}{n'} = \frac{l''}{n''} = \ldots,$$

et des constantes A, B,..., que la fonction θ contient, comme nous l'avons déjà remarqué.

Un théorème de Jacobi permet de passer aisément des intégrales *intermédiaires* d'un problème de dynamique aux intégrales finales entre les seules variables α, β, ..., γ. Je me borne à écrire ces intégrales finales, qui sont

$$\frac{d\theta}{d\mathrm{A}} = \mathrm{A}', \qquad \frac{d\theta}{d\mathrm{B}} = \mathrm{B}', \qquad \text{etc.}$$

Pour déterminer α, β,..., γ en fonction de t, on y joindra l'intégrale des forces vives qui donne dt, et par suite t, au moyen d'une quadrature, quand on a exprimé β,..., γ en α. C'est ainsi qu'il faudra nécessairement opérer, si la fonction θ n'a été obtenue que pour une valeur donnée de K. Mais si K reste dans θ sous forme algébrique, on obtiendra t au moyen de la dérivée partielle de θ par rapport à K.

En voilà assez sur ce sujet. Au fond je ne me proposais qu'un seul but, et il est atteint : je voulais appeler l'attention des géomètres sur l'expression curieuse

$$(d\theta)^2 + (nl' - ln')^2 + \ldots,$$

que j'ai trouvée pour le produit

$$2(\mathrm{U} + \mathrm{K}) \sum mds^2,$$

et qui rendant, pour ainsi dire, intuitives les propriétés de l'intégrale à laquelle le principe de la moindre action se rapporte, ouvre les voies à une étude plus approfondie. On comprendra aisément qu'on peut en tirer un théorème nouveau de *minimum* concernant la quantité

$$2(\mathrm{U}+\mathrm{K})\sum mds^2,$$

si, partant d'une position $(\alpha, \beta,\ldots, \gamma)$ pour aller à une autre position infiniment voisine, et prenant $d\theta$ constante, on veut rendre l'expression citée la plus petite possible; les valeurs de $d\alpha, d\beta,\ldots, d\gamma$ propres au minimum seront évidemment fournies par les équations de la Dynamique

$$\frac{l}{n}=\frac{l'}{n'}=\frac{l''}{n''}=\ldots,$$

et par celle qui exprime que $d\theta$ a la valeur assignée; de même, si l'on se donnait la somme

$$(d\theta)^2+(nl'-ln')^2+\ldots,$$

c'est encore aux équations

$$\frac{l}{n}=\frac{l'}{n'}=\frac{l''}{n''}=\ldots$$

qu'il faudrait recourir pour rendre $d\theta$ un maximum.

J'ai développé longuement cette théorie dans mon cours au Collége de France (année scolaire 1852-1853). Mais elle m'était connue, et je l'avais communiquée à plusieurs de mes amis longtemps avant cette époque. L'idée d'introduire la fonction θ pour exprimer

$$2(\mathrm{U}+\mathrm{K})\sum mds^2$$

par une somme de carrés dont le premier ait pour racine une différentielle exacte, m'est venue en lisant (en 1847) un Mémoire manuscrit de M. Schlaefli [*], professeur à l'université de Berne, où ce géomètre distingué donnait une forme semblable au carré de l'élément de longueur d'une ligne géodésique sur l'ellipsoïde. Je suis heureux de reconnaître ce que je dois à M. Schlaefli et de rendre hommage à son haut mérite. Toutefois sa méthode est fort différente de la mienne, et moins générale. Je ne sache pas, en effet, que M. Schlaefli ait jamais songé à se servir de la fonction θ et de l'équation aux différences partielles qu'elle vérifie. Cette fonction, dont l'importance est connue aujourd'hui de tous les géomètres, grâce aux travaux de M. Hamilton et de Jacobi, joue au contraire dans ma méthode le plus grand rôle.

[*] *Voir* un extrait de ce Mémoire, *Comptes rendus*, tome XXV, page 391. *Voir* aussi le Journal de *Crelle*, tome XLIII, page 23.