JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Mémoire sur la réduction de classes très-étendues d'intégrales multiples

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 1 (1856), p. 289-294.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1856_2_1__289_0>

MÉMOIRE

SUR

LA RÉDUCTION DE CLASSES TRÈS-ÉTENDUES D'INTÉGRALES MULTIPLES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

[Extrait par l'auteur.]

Nous empruntons cet Extrait aux *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences, tome XLII, page 525, séance du lundi 24 mars 1856. Le Mémoire entier, assez volumineux déjà, et qu'on espère augmenter encore par des recherches ultérieures, ne paraîtra que plus tard, et peut-être dans un autre recueil.

« **1**. J'ai obtenu à diverses époques et par différentes méthodes des formules pour la réduction de plusieurs classes très-étendues et assez remarquables d'intégrales multiples. Dans des cas particuliers, ces formules fournissent les valeurs finies de quelques intégrales qui paraissent mériter qu'on les signale. Elles conduisent d'ailleurs à la solution de certains problèmes, au premier abord très-difficiles. On les trouvera réunies et discutées dans mon Mémoire. Je ne pourrai, dans cet Extrait, qu'effleurer le sujet, et je m'attacherai de préférence aux formules qui sont liées à l'intégrale

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-\left(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}+\frac{k^n}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}}\right)} \alpha_1^{\frac{1}{n}-1}\alpha_2^{\frac{2}{n}-1}\ldots\alpha_{n-1}^{\frac{n-1}{n}-1} d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_{n-1},$$

dont je me suis servi dans un article inséré au *Compte rendu* de la dernière séance [*] pour démontrer la belle formule de Gauss concernant les fonctions Γ. En désignant par R cette intégrale, j'ai prouvé que

---

[*] *Comptes rendus*, tome XLII, page 501. Au reste, cet article a été inséré aussi dans le présent volume; *voir* page 82.

l'on a

$$R = \frac{1}{\sqrt{n}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} e^{-nk}.$$

» **2**. Cela posé, considérons l'intégrale à n variables

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-(\alpha+\alpha_1+\ldots+\alpha_{n-1})}\,\varphi(\alpha\alpha_1\ldots\alpha_{n-1})\,\alpha_1^{\frac{1}{n}}\alpha_2^{\frac{2}{n}}\ldots\alpha_{n-1}^{\frac{n-1}{n}}\,d\alpha\,d\alpha_1\ldots d\alpha_{n-1},$$

où φ désigne une fonction quelconque, telle pourtant, bien entendu, que l'intégrale garde un sens précis et une valeur déterminée. Désignons cette intégrale par L. En substituant à la variable α une variable nouvelle k, liée à α par la relation

$$\alpha = \frac{k^n}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}},$$

nous aurons de suite

$$L = n\int_0^\infty R\,\varphi(k^n)\,k^{n-1}\,dk;$$

et en mettant pour R sa valeur,

$$L = n^{\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\int_0^\infty e^{-nk}\,\varphi(k^n)\,k^{n-1}\,dk.$$

L'intégrale donnée à n variables est donc réduite à une intégrale simple. En prenant pour la fonction φ une puissance de la variable, on retrouverait naturellement la formule de Gauss :

$$\text{(A)}\qquad \Gamma\left(\frac{\mu}{n}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{\mu+n-1}{n}\right) = n^{\frac{1}{2}-\mu}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,\Gamma(\mu).$$

» **3**. On obtient une formule particulière, digne de remarque, en posant

$$\varphi(k^n) = e^{-ak},$$

où a désigne une constante, telle que la somme $n+a$ soit positive. On a alors

$$\varphi(\alpha\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}) = e^{-a\sqrt[n]{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}}},$$

et il vient

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-\left(\alpha+\alpha_1+\ldots+\alpha_{n-1}+a\sqrt[n]{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}}\right)} \alpha_1^{\frac{1}{n}} \alpha_2^{\frac{2}{n}} \ldots \alpha_{n-1}^{\frac{n-1}{n}}\, d\alpha\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_{n-1}$$
$$= n^{\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1.2.3\ldots(n-1)}{(n+a)^n}.$$

» Cette formule peut être démontrée autrement; par exemple, au moyen de développements en séries. D'abord en développant l'exponentielle

$$e^{-a\sqrt[n]{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}}}$$

en série suivant les puissances de a, on prouvera que la formule est exacte tant que la valeur absolue de a ne surpasse pas n. Remplaçant ensuite a par $a+h$, et développant suivant les puissances de h, on étendra de proche en proche la limite supérieure de a jusqu'à ∞. La formule dont nous parlons une fois établie, on en déduira, si l'on veut, une démonstration nouvelle de l'équation (A) de Gauss : il suffira de prendre la différentielle à indice quelconque des deux membres et de faire ensuite $a = 0$.

» La constante a de notre formule peut être supposée imaginaire, pourvu que la partie réelle de $n + a$ soit positive. Je profiterai de l'occasion pour faire observer que la constante k de la formule

$$R = \frac{1}{\sqrt{n}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} e^{-nk}$$

admet de même des valeurs imaginaires. Dans le premier membre, où k entre à la puissance $n^{ième}$, on peut prendre

$$k^n = \rho\,(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta),$$

pourvu que l'angle θ soit compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, et alors on doit poser, dans le second membre,

$$k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{\theta}{n}\right).$$

Les valeurs extrêmes

$$\theta = \pm \frac{\pi}{2}$$

peuvent être admises; pour elles on a

$$k^n = \pm \rho \sqrt{-1}.$$

» 4. Enfin, dans l'intégrale L, on peut supposer la fonction φ nulle dès que la variable atteint une certaine valeur positive b, cette fonction restant d'ailleurs quelconque pour des valeurs moindres. On reconnaît alors que l'intégrale multiple

$$\int \cdots \int e^{-(\alpha+\alpha_1+\ldots+\alpha_{n-1})} \varphi(\alpha\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}) \alpha_1^{\frac{1}{n}} \alpha_2^{\frac{2}{n}} \cdots \alpha_{n-1}^{\frac{n-1}{n}} \, d\alpha \, d\alpha_1 \ldots d\alpha_{n-1},$$

prise pour toutes les valeurs positives de α, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, qui vérifient l'inégalité

$$\alpha\alpha_1\ldots\alpha_{n-1} < b$$

est égale à l'intégrale simple

$$n^{\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \int_0^c e^{-nk} \varphi(k^n) k^{n-1} \, dk,$$

où $c = \sqrt[n]{b}$.

» 5. Tout en abrégeant beaucoup, en omettant même de mentionner certaines questions accessoires qui ont de l'intérêt, j'ai pourtant donné quelques développements sur l'intégrale L. Je serai très-bref dans ce qui va suivre.

» L'intégrale à $(n-1)$ variables

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty f\left(x + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1} + \frac{k^n}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}}\right) \alpha_1^{\frac{1}{n}-1} \alpha_2^{\frac{2}{n}-1} \ldots \alpha_{n-1}^{\frac{n-1}{n}-1} \, d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_{n-1},$$

que je désignerai par V, et où k est un paramètre positif, x une variable indépendante, peut être traitée par une méthode semblable à celle que j'ai employée pour l'intégrale R. En différentiant par rapport à k, puis substituant à la variable α_1 une autre variable α_n liée à α_1 par la relation

$$\alpha_1 = \frac{k^n}{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n},$$

on trouve sans peine que

$$\frac{dV}{dk} = n\frac{dV}{dx}.$$

Donc

$$V = \psi(x + nk).$$

On déterminera la fonction $\psi(x)$ en posant $k = 0$. La valeur de $\psi(x)$ est donc exprimée par l'intégrale

$$\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty f(x+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1})\,\alpha_1^{\frac{1}{n}-1}\,\alpha_2^{\frac{2}{n}-1}\ldots\alpha_{n-1}^{\frac{n-1}{n}-1}\,d\alpha_1\,d\alpha_2\ldots d\alpha_{n-1},$$

que l'on sait réduire à une intégrale simple [*]. On exprimera donc aussi V par une intégrale simple.

» On réduira aisément ensuite à une intégrale double l'intégrale à n variables

$$\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty PQ\,\alpha_1^{\frac{1}{n}}\alpha_2^{\frac{2}{n}}\ldots\alpha_{n-1}^{\frac{n-1}{n}}\,d\alpha\,d\alpha_1\ldots d\alpha_{n-1},$$

où j'ai fait, pour abréger,

$$P = f(\alpha + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1}),$$

et

$$Q = \varphi(\alpha\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}).$$

» En remplaçant α par $a\alpha$, α_1 par $a_1\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}$ par $a_{n-1}\alpha_{n-1}$, on remplacera la somme des variables, dont P dépend, par une fonction linéaire de ces variables.

» On obtiendra des résultats curieux en supposant que l'une des

---

[*] Voir *Journal de Mathématiques*, 1re série, tome IV, page 229.

fonctions P, Q devient nulle, ou même que toutes deux deviennent nulles, lorsque les variables dont elles dépendent surpassent une limite donnée, ou cessent d'être comprises entre des limites données.

» Enfin, parmi les intégrales dont je me suis occupé, je citerai encore la formule

$$\int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} f(a^2 \alpha^2 + b^2 \beta^2 + \ldots) \varphi\left(\frac{p^2}{\alpha^2} + \frac{q^2}{\beta^2} + \ldots\right) d\alpha \, d\beta \ldots,$$

qui se lie aux précédentes. Je renvoie pour le reste à mon Mémoire. De plus longs détails sur ce sujet sortiraient du cadre où l'on doit renfermer les *Comptes rendus*. »