JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la représentation des nombres par la forme quadratique $x^2 + ay^2 + bz^2 + abt^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 1 (1856), p. 230.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1856_2_1__230_0>

Gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

SUR LA REPRÉSENTATION DES NOMBRES PAR LA FORME QUADRATIQUE $x^2 + ay^2 + bz^2 + abt^2$.

Note de **M. J. LIOUVILLE**.

Si l'on veut que cette forme quadratique, où nous supposerons a et b entiers et positifs, a étant au plus égal à b, représente *tous* les nombres 1, 2, 3, 4, etc., sept cas seulement seront possibles, savoir ceux de $a = 1$, $b = 1$, 2 ou 3, et de $a = 2$, $b = 2$, 3, 4 ou 5. Les nombres 2 et 3 empêchent d'aller plus loin : l'un d'eux au moins cesserait d'être exprimable par la forme indiquée, pour des valeurs de a ou de b plus grandes. Le premier cas répond au théorème sur la décomposition des nombres en quatre carrés au plus, que Lagrange a démontré dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin* pour 1770. Le cinquième, qui répond au théorème tiré d'abord par Jacobi de la théorie des fonctions elliptiques, que tout nombre M est de la forme

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2,$$

se ramène au premier et *vice versâ*, comme je l'ai fait voir dans ce Journal (1re série, tome X, page 169). On peut en dire autant du deuxième, du quatrième et du sixième : la déduction est même plus facile encore. Pour traiter le troisième cas et prouver que l'équation

$$M = x^2 + y^2 + 3z^2 + 3t^2$$

est toujours possible, on pourra se servir, pour ainsi dire sans y rien changer, de la méthode même que Lagrange donne pour le premier cas dans le Mémoire cité plus haut. Cette méthode un peu modifiée fournirait aussi une démonstration directe du théorème de Jacobi : elle s'appliquerait également au deuxième, au quatrième et au sixième cas. Mais le septième et dernier cas lui échappe : j'ai pu seulement en conclure que tout nombre ou son double est de la forme

$$x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 10t^2.$$