JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A.-H. CURTIS

Sur la surface engendrée par les normales principales d'une courbe à double courbure

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 1 (1856), p. 223-229.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1856_2_1__223_0>

SUR

LA SURFACE ENGENDRÉE PAR LES NORMALES PRINCIPALES D'UNE COURBE A DOUBLE COURBURE;

PAR M. A.-H. CURTIS.

Dans le volume de 1850 de ce Journal, page 332, M. J. Bertrand a discuté analytiquement les propriétés de la surface des normales principales d'une courbe à double courbure. Parmi les résultats auxquels on arrive, sont les suivants :

I. Pour que les normales principales d'une courbe soient en même temps normales principales d'une autre courbe, il faut et il suffit qu'il existe entre les deux courbures de cette courbe une relation linéaire.

II. L'héliçoïde à plan directeur est la seule surface dont les génératrices soient normales principales d'un nombre infini de courbes distinctes.

III. Il est impossible qu'une surface dont la ligne de striction coupe à angle droit les génératrices, c'est-à-dire une surface formée par les normales aux plans osculateurs d'une courbe, contienne deux lignes distinctes dont les génératrices soient les normales principales.

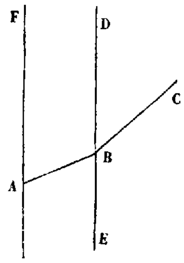
Je me propose d'obtenir ces résultats par une méthode géométrique qui est à la fois plus élémentaire et plus concise que la méthode analytique de M. Bertrand. Elle suppose les deux lemmes suivants, dont le premier a été, à ce que nous croyons, donné premièrement par M. Graves, sous la forme de problème, à un des examens de l'Université de Dublin.

1°. Si chacun des éléments d'une courbe fait un angle constant avec la ligne rectificatrice [*] correspondante, la courbe doit être une hélice tracée sur un cylindre.

Soient AF, BD deux lignes consécutives rectificatrices, et AB, BC les

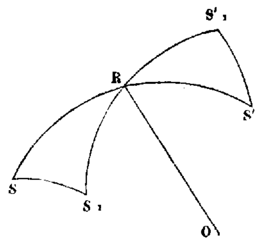
[*] On entend ici par *ligne rectificatrice* la droite qui résulte de l'intersection de deux plans menés par deux points de la courbe infiniment voisins, perpendiculairement aux normales principales en ces points : cette ligne est, par conséquent, parallèle à la plus courte distance de deux normales principales consécutives. La surface rectificatrice (ou rectifiante) est le lieu des lignes rectificatrices.

éléments correspondants. Comme la normale de la surface rectificatrice a la même direction que le rayon de courbure de la courbe, la courbe est une géodésique sur la surface rectificatrice; donc l'angle ABE = DBC = FAB, par l'hypothèse : de sorte que BD et AF sont parallèles. Les lignes rectificatrices sont conséquemment toutes parallèles; il suit de là que la surface rectificatrice est un cylindre, et que la courbe étant une géodésique sur cette surface, doit être une hélice.



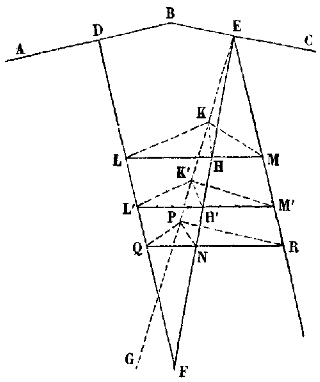
2°. Si deux courbes ont la même surface pour lieu de leurs normales principales, l'angle d'inclinaison des tangentes aux points où elles sont coupées par la même normale principale est constant.

Soient O le centre d'une sphère arbitraire; OR le rayon parallèle aux rayons coïncidents de courbure des deux courbes; S, S' les extrémités des rayons de la sphère parallèles aux deux éléments consécutifs de l'une; S_1, S'_1 les points correspondants pour l'autre. Maintenant si nous supposons que le rayon de courbure soit tiré à l'*extrémité* de l'élément, cette ligne, bien qu'elle soit en dernier lieu la normale, doit être considérée comme la bissectrice de l'angle obtus entre deux éléments consécutifs de la courbe, et à la limite cet angle devient égal à deux droits. D'après cette convention, $SR = S'R$, $S_1R = S'_1R$, et puisque SRS', $S_1RS'_1$ sont de grands cercles, l'angle $SRS_1 = S'RS'_1$, par conséquent SS_1 sera égal à $S'S'_1$. L'angle entre une paire d'éléments correspondants est conséquemment égal à celui qui se trouve entre la paire consécutive; en d'autres termes, toutes paires correspondantes sont inclinées au même angle.



Pour prouver les théorèmes de M. Bertrand, nous ferons usage de la construction suivante.

Soient AB, BC deux éléments consécutifs de la courbe de qui l'on suppose que la surface des normales principales soit engendrée. Soient DF, EG deux normales principales tirées des points de milieu de AB et BC, F étant le centre de courbure correspondant à l'élément AB. Soit QP le plus court chemin entre DF et EG. Si alors PN est perpendiculaire à EF, et si ER (la ligne qui passe par E parallèle à DF) coupe QN au point R, QPR sera un triangle rectangle; car PQ, étant perpendiculaire à EG et à ER, est perpendiculaire au plan déterminé par ces lignes, et par conséquent est aussi perpendiculaire à PR. Supposez que L et K soient deux points consécutifs sur une autre courbe ayant la même surface de normales principales que la courbe dont AB, BC sont les éléments. Tirez KH perpendiculaire à EF; prolongez LH jusqu'à M; et tirez MK. Quand deux courbes coupent le même système continu de lignes droites à angle droit, la distance entre les points où les différentes lignes droites du système sont coupées par les deux courbes est constante : on aura donc $LD = KE = HE = a$, où a est constant; et de même $QD = PE = NE$; et conséquemment (comme $FD = FE$) QN, LH et DE sont parallèles : observez que DE est à la limite un élément de la courbe supposée génératrice de la surface des normales principales.



I. Le premier des théorèmes déjà énoncés peut maintenant être établi.

Puisque l'angle LHK est un angle droit, et que, par le second lemme, l'angle KLH est constant, l'espèce du triangle LHK est constante; ainsi donc $\frac{\mathrm{LH}}{\mathrm{HK}} = c$, où c est constant. Maintenant DFE est l'angle de contingence de la courbe ABC, c'est-à-dire $d\varepsilon$, tandis que l'angle HEK est son angle de torsion, c'est-à-dire $d\eta$; donc

$$\mathrm{LH} = \mathrm{LF}\,(\text{angle DFE}) = (\rho - a)\,d\varepsilon,$$

où ρ est le rayon de courbure, tandis que

$$\mathrm{HK} = \mathrm{HE}\,(\text{angle HEK}) = a\,d\eta\,;$$

donc

$$(\rho - a)\,d\varepsilon = acd\eta = bd\eta,$$

où b est constant, ou bien

$$ds - ad\varepsilon = bd\eta\,;$$

donc

$$1 = a\frac{d\varepsilon}{ds} + b\frac{d\eta}{ds},$$

ou, si r est le rayon de torsion,

$$1 = \frac{a}{\rho} + \frac{b}{r}.$$

On peut montrer de la même manière que la courbe dont LK est un élément doit satisfaire à la condition

$$1 = \frac{-a}{\rho_1} + \frac{b}{r_1},$$

ρ_1, r_1 étant ses rayons de courbure et de torsion, et a et b étant les *mêmes* constantes qu'auparavant

De la même construction, on peut tirer des expressions pour ds_1 élément de la seconde courbe. Car

$$\begin{aligned}\overline{ds_1}^2 &= \mathrm{LK}^2 = \mathrm{LH}^2 + \mathrm{HK}^2 = (\rho - a)^2\,\overline{d\varepsilon}^2 + a^2\,\overline{d\eta}^2 \\ &= \left[(\rho - a)^2\frac{1}{\rho^2} + \frac{a^2}{r^2}\right]\overline{ds}^2 = \left[\left(1 - \frac{a}{\rho}\right)^2 + \frac{a^2}{r^2}\right]\overline{ds}^2,\end{aligned}$$

comme l'a montré M. J.-A. Serret, ou bien

$$\overline{ds_1}^2 = \mathrm{HK}^2 + \overline{\mathrm{LH}}^2 = (1 + c^2)\,\mathrm{HK}^2 = (1 + c^2)\,a^2\,\overline{d\eta}^2 = (a^2 + b^2)\,\overline{d\eta}^2.$$

Puisque l'angle entre deux lignes parallèles à deux rayons consécutifs de courbure de toute courbe est égal à $\sqrt{\overline{d\varepsilon}^2 + \overline{d\eta}^2}$ (comme cela est évident d'après la construction déjà employée), nous aurons dans le présent cas

$$\overline{d\varepsilon}^2 + \overline{d\eta}^2 = \overline{d\varepsilon_1}^2 + \overline{d\eta_1}^2,$$

$d\varepsilon$ et $d\eta$ étant les angles de contingence et de torsion de la première courbe, et $d\varepsilon_1$ et $d\eta_1$ étant ceux de la seconde. Nous avons donc les équations suivantes qui lient les deux courbes :

$$\begin{gathered} a\,d\varepsilon + b\,d\eta = ds, \\ -\,a\,d\varepsilon_1 + b\,d\eta_1 = ds_1 = \sqrt{a^2 + b^2}\,d\eta, \\ \sqrt{\overline{d\varepsilon}^2 + \overline{d\eta}^2} = \sqrt{\overline{d\varepsilon_1}^2 + \overline{d\eta_1}^2}. \end{gathered}$$

Elles donnent

$$d\varepsilon_1 = \frac{-a d\eta + b d\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad d\eta_1 = \frac{a d\varepsilon + b d\eta}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

de là

$$\rho_1 = \frac{ds_1}{d\varepsilon_1} = \frac{(a^2+b^2)\,d\eta}{b d\varepsilon - a d\eta} = \frac{\frac{a^2+b^2}{r^2}}{\frac{b}{\rho r} - \frac{a}{r^2}},$$

où

$$b = r\left(1 - \frac{a}{\rho}\right);$$

conséquemment

$$\rho_1 = \frac{\frac{a^2}{r^2} + \left(1 - \frac{a}{\rho}\right)^2}{\frac{1}{\rho} - a\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\rho^2}\right)},$$

et de même

$$r_1 = r\left[\frac{a^2}{r^2} + \left(1 - \frac{a}{\rho}\right)^2\right],$$

expressions qui lient entre eux les rayons de courbure et de torsion des deux courbes, et qui sont beaucoup plus simples que celles données par M. Bertrand.

II. En établissant le second théorème, nous prouverons d'abord qu'il n'est pas possible de tracer sur une surface trois courbes distinctes, pour chacune desquelles elle soit la surface des normales principales, excepté quand la surface est l'héliçoïde, auquel cas on peut y tracer un nombre *infini* de courbes à chacune desquelles elle se trouve avoir ce rapport.

Dans la figure précédemment employée, supposez que L′K′ soit un élément d'une troisième courbe ayant la même surface de normales principales que celles dont DE et LK sont les éléments, et soient H′ et M′ déterminés par L′K′ de la même manière que H et M ont été déterminés par LK; soit L′D $= a'$. Alors comme a' est constante, et que, par le second lemme, les angles KLH, K′L′H′ sont constants aussi, les trois rapports

$$\frac{\mathrm{L'H'}}{\mathrm{H'K'}}, \quad \frac{\mathrm{H'K'}}{\mathrm{HK}}, \quad \frac{\mathrm{HK}}{\mathrm{LH}},$$

sont constants; ainsi donc, par la composition de ces rapports, $\frac{L'H'}{LH}$ ou $\frac{FL'}{FL}$ est constant aussi, de sorte que, comme LL' est égal à $(a' - a)$, LF et par conséquent FD, c'est-à-dire ρ, est constant. De plus, comme $\frac{FL\,d\varepsilon}{a\,d\eta} = \frac{LH}{HK}$, et par conséquent est constant, $\frac{d\varepsilon}{d\eta}$ ou $\frac{r}{\rho}$ est constant; ainsi donc r est constant aussi.

Maintenant, $\frac{PN}{NR} = \frac{d\eta}{d\varepsilon} = \frac{\rho}{r}$; l'espèce des triangles semblables PRQ et NPQ est conséquemment connue; donc, et l'angle PQR et le rapport QN : NR (qui est égal à FN : NE) sont constants. De la première de ces conditions, puisque QP est parallèle à la ligne rectificatrice de la courbe ABC en D, tandis que QN est parallèle à DE, il suit que la ligne rectificatrice fait un angle constant avec l'élément de la courbe, et par conséquent, d'après le premier lemme, que la surface rectificatrice est un cylindre, tandis que, d'après la seconde condition, il suit que NE ou son égale DQ est constante; tous les points de la courbe sont conséquemment à égale distance de la ligne de striction de ses normales principales; Q et P sont donc deux points consécutifs sur la ligne de striction; l'élément de la ligne de striction est conséquemment parallèle à la ligne correspondante rectificatrice, et comme la direction de cette dernière est invariable, la première doit être rectilinéaire, tandis que la surface rectificatrice, étant produite par des lignes droites parallèles à cette ligne droite et à une distance constante de cette ligne, doit être un cylindre droit sur une base circulaire; la courbe ABC, étant une géodésique sur ce cylindre, est une hélice, et sa surface de normales principales l'héliçoïde; et comme cette surface a le même rapport à toutes les hélices qui y sont tracées, c'est la surface des normales principales d'un nombre infini de courbes.

Pour compléter la preuve du théorème dont il s'agit, il est nécessaire de montrer que l'héliçoïde est la *seule* surface sur laquelle on puisse tracer un nombre infini de courbes pour chacune desquelles elle soit la surface des normales principales. C'est facile à faire. Si un nombre infini de pareilles courbes peuvent être déterminées sur la surface, il s'ensuit *a fortiori* que trois peuvent être déterminées. La surface doit donc être comme précédemment l'héliçoïde.

III. Comme l'héliçoïde est la surface des normales principales d'un nombre infini de courbes, et comme sur cette surface la ligne de striction coupe toutes les génératrices à angle droit, il est clair que le troisième des théorèmes dont il s'agit n'est pas strictement vrai, et qu'il existe des surfaces qui sont chacune le lieu des normales principales de plus d'une courbe, et pour lesquelles la ligne de striction coupe les génératrices rectilignes à angle droit.

Ceci a déjà été remarqué par M. Graves. M. Graves a aussi fait voir que ce cas est réellement compris dans l'équation de condition donnée par M. Bertrand, qui a cependant négligé de considérer le facteur de cette équation qui montre que l'héliçoïde est la solution.

Pour compléter la solution géométrique de la question, il est nécessaire de montrer que l'héliçoïde est la *seule* surface qui satisfait à ces conditions. Comme en ce cas la ligne de striction est une trajectoire orthogonale à angle droit des génératrices rectilignes, $RE = QD$ est constante, et comme $ME = LD$, est constante aussi,

$$NR : HM :: RP : MK :: RE : ME$$

est constant; donc, comme $QR = LM$ et $QR.RN = RP^2$, $LM.MH : MK^2$ est connu et l'espèce du triangle LHK est connue; donc on connaît aussi celle des triangles semblables HKM, NPR et PQR, et comme, dans le présent cas, chaque élément de la ligne de striction est parallèle à la ligne rectificatrice correspondante par le même raisonnement que ci-dessus, la ligne de striction doit être rectilinéaire, et la surface rectificatrice un cylindre circulaire droit; la courbe est une hélice tracée dessus, et la surface des normales principales un héliçoïde.