JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Extension d'un théorème de calcul intégral

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 1 (1856), p. 190-192.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1856_2_1__190_0>

EXTENSION D'UN THÉORÈME DE CALCUL INTÉGRAL;

PAR M. J. LIOUVILLE.

J'ai démontré ailleurs [*] que la considération de la première des fonctions

$$f_1 = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} f, \quad f_2 = \frac{df_1}{dx} + \frac{df_1}{dy} f, \ldots,$$

que l'on doit former pour développer en série suivant les puissances de x ou de $(x - a)$ l'intégrale de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

peut être quelquefois utile à un autre point de vue. En effet, si un paramètre α contenu dans f se trouve avoir disparu dans f_1, cela indiquera que

$$\frac{df}{d\alpha}(dy - fdx)$$

est une différentielle exacte, en sorte qu'on pourra alors écrire de suite l'intégrale

$$\int \frac{df}{d\alpha}(dy - fdx) = \text{constante}$$

de l'équation différentielle proposée.

Il y a un théorème analogue pour un système d'équations différentielles simultanées

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{X}, \quad \frac{dy}{dt} = \mathrm{Y}, \ldots, \quad \frac{dz}{dt} = \mathrm{Z},$$

quand X, Y,..., Z désignent des fonctions de t, x, y,..., z provenant d'une même fonction S par des dérivations partielles respectivement relatives à x, y,..., z, de manière que

$$\mathrm{X} = \frac{d\mathrm{S}}{dx}, \quad \mathrm{Y} = \frac{d\mathrm{S}}{dy}, \ldots, \quad \mathrm{Z} = \frac{d\mathrm{S}}{dz}.$$

[*] *Voir* le cahier de mai 1855, page 143.

Les premières fonctions qu'on ait à former ici pour développer x, $y,\ldots, z$ suivant les puissances de t ou de $(t-a)$ sont

$$\begin{aligned}
X_1 &= \frac{dX}{dt} + \frac{dX}{dx}X + \frac{dX}{dy}Y + \ldots + \frac{dX}{dz}Z,\\
Y_1 &= \frac{dY}{dt} + \frac{dY}{dx}X + \frac{dY}{dy}Y + \ldots + \frac{dY}{dz}Z,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
Z_1 &= \frac{dZ}{dt} + \frac{dZ}{dx}X + \frac{dZ}{dy}Y + \ldots + \frac{dZ}{dz}Z.
\end{aligned}$$

Or s'il arrive qu'un paramètre α contenu dans une au moins des fonctions X, Y,..., Z ait disparu dans toutes les fonctions X_1, $Y_1,\ldots$, Z_1, je dis qu'on trouvera aisément un système de facteurs P, Q,..., R rendant

$$P(dx - X\,dt) + Q(dy - Y\,dt) + \ldots + R(dz - Z\,dt)$$

une différentielle exacte $d\varphi(t, x, y,\ldots, z)$ et fournissant en conséquence une intégrale

$$\varphi(t, x, y,\ldots, z) = \text{constante}$$

du système d'équations différentielles posé plus haut. Il suffira de prendre

$$P = \frac{dX}{d\alpha} = \frac{d^2S}{dx\,d\alpha},\quad Q = \frac{dY}{d\alpha} = \frac{d^2S}{dy\,d\alpha},\ldots,\quad R = \frac{dZ}{d\alpha} = \frac{d^2S}{dz\,d\alpha}.$$

L'intégrale sera évidemment de la forme

$$\frac{dS}{d\alpha} = \text{fonct.}\,(t, \alpha) + C.$$

Ce théorème est surtout curieux à cause de l'usage nouveau et singulier qu'il montre qu'on peut faire des fonctions X_1, $Y_1,\ldots$, Z_1, dont le calcul est indiqué pour un tout autre objet dans les traités élémentaires. Je n'ôterai rien de l'intérêt que cette circonstance lui donne en ajoutant que l'on pourra aisément, si l'on veut, le rattacher à des théorèmes connus, bien qu'il m'ait été fourni d'abord par une méthode directe fort simple. La vérification *à posteriori* est du reste si facile, que je supprime pour le moment toute autre démonstration.

En premier lieu, il est clair que, pour les valeurs de P, Q,..., R données plus haut, les conditions d'intégrabilité de la formule

$$P(dx - X dt) + Q(dy - Y dt) + \ldots + R(dz - Z dt)$$

sont remplies d'elles-mêmes quant à ce qui concerne les coefficients des différentielles dx, $dy, \ldots$, dz comparés entre eux. Restent les conditions qui naissent de la comparaison de ces coefficients avec celui de dt; or elles peuvent aisément s'écrire ainsi :

$$\frac{dX_1}{d\alpha} = 0, \quad \frac{dY_1}{d\alpha} = 0, \ldots, \quad \frac{dZ_1}{d\alpha} = 0,$$

et par conséquent elles reviennent à dire avec nous que α ne doit plus entrer dans les fonctions X_1, $Y_1, \ldots$, Z_1.

On comprendra la liaison de notre théorème avec les belles recherches de Jacobi sur la mécanique, en observant que les équations

$$\frac{dX_1}{d\alpha} = 0, \quad \frac{dY_1}{d\alpha} = 0, \ldots, \quad \frac{dZ_1}{d\alpha} = 0$$

peuvent être remplacées par une condition unique, à savoir que la quantité

$$T = \frac{d^2S}{dt\,d\alpha} + \frac{d^2S}{dx\,d\alpha}\frac{dS}{dx} + \ldots + \frac{d^2S}{dz\,d\alpha}\frac{dS}{dz} = \frac{d}{d\alpha}\left[\frac{dS}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{dS}{dx}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{2}\left(\frac{dS}{dz}\right)^2\right]$$

ne contienne plus x, $y, \ldots$, z, et se réduise à une simple fonction de t et de α.

Remarquons, en passant, que si les équations dont nous parlons, sans avoir lieu en général, étaient vérifiées par une valeur particulière de α, ou, ce qui revient au même, si T contenant en général $x, y, \ldots$, z et t se réduisait pour $\alpha = \alpha_1$ à une simple fonction de t, notre théorème subsisterait pour cette valeur particulière.

Je n'ai pas besoin d'ajouter que si d'autres constantes β, $\gamma, \ldots$, distinctes de α, disparaissent avec α dans le passage de X, $Y, \ldots$, Z à X_1, $Y_1, \ldots$, Z_1, cette circonstance fournira de nouvelles intégrales, et même quelquefois toutes les intégrales qu'on a à chercher. Mais il est bon d'observer qu'on peut tirer le même parti du cas où une des variables t, x, $y, \ldots$, z vient à manquer dans X_1, $Y_1, \ldots$, Z_1. Si, par exemple, y disparaît dans ces fonctions, vous remplacerez dans l'expression des facteurs P, Q,..., R la dérivation relative à α par une dérivation suivant y.