JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. LAMÉ

Mémoire sur l'équilibre d'élasticité des enveloppes sphériques

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 19 (1854), p. 51-87.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1854_1_19__51_0>

MÉMOIRE

SUR

L'ÉQUILIBRE D'ÉLASTICITÉ DES ENVELOPPES SPHÉRIQUES;

PAR M. G. LAMÉ.

(Lu à l'Académie des Sciences, le 1er août 1853.)

Dans un ouvrage publié l'année dernière, j'ai exposé les principes de la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides et ses principales applications. Le travail actuel a pour objet l'intégration des équations générales de cette théorie, dans le cas de l'équilibre d'un système sphérique. Il donne la solution du problème suivant :

Une enveloppe solide, homogène et d'élasticité constante, est limitée par deux sphères concentriques. Les parois sont soumises à des forces connues, qui diffèrent, en intensité et en direction, d'un point à l'autre de ces surfaces. Il s'agit de déterminer les déplacements moléculaires ou les déformations, les dilatations ou les contractions, enfin les forces élastiques que les efforts extérieurs font naître dans l'intérieur de l'enveloppe.

On parvient à traiter ce cas général en se servant des coordonnées polaires ou sphériques, c'est-à-dire du rayon, de la latitude et de la longitude. Les propriétés de ces coordonnées, si souvent utilisées dans la *Mécanique céleste* et dans la *Théorie analytique de la chaleur*, trouvent ici de nouvelles applications; mais il faut les étendre, en quelque sorte, ou les généraliser. Quand il s'agit d'un problème relatif à l'attraction des sphéroïdes ou à l'équilibre des températures, il n'y a qu'une seule fonction à chercher; alors chaque terme de la série qui la représente peut n'admettre que deux facteurs, l'un fonction du rayon seul, l'autre contenant à la fois les deux coordonnées angulaires et plusieurs constantes, qu'il n'est pas toujours nécessaire de séparer.

Dans l'application à la théorie de l'élasticité, il y a trois fonctions principales à déterminer, et sept autres qui se déduisent des trois premières par des différentiations. Les séries qui représentent ces fonctions contiennent plusieurs suites de constantes arbitraires, qui se trouvent dans toutes, mais avec des facteurs numériques différents. De là résulte la nécessité de séparer ces constantes, de telle sorte que chaque terme des séries qu'on emploie n'en contienne qu'une seule, multipliée par un coefficient numérique spécial, et par trois facteurs où les trois coordonnées entrent séparément. Sans cet isolement préalable, il serait impossible de déterminer les constantes arbitraires à l'aide des forces données.

Les équations que j'ai intégrées, sont celles qui concernent l'équilibre intérieur des corps solides homogènes d'élasticité constante, et qui renferment deux nombres spécifiques, au lieu du seul coefficient qu'admettaient Navier, Poisson et d'autres géomètres, généralisation dont j'ai établi la nécessité dans mon ouvrage élémentaire sur l'élasticité. Ces équations sont aux différences partielles du second ordre et au nombre de trois. Elles contiennent simultanément trois fonctions qui sont, dans le cas actuel, les projections du déplacement moléculaire sur le rayon, sur la tangente à la méridienne et sur la perpendiculaire au plan méridien.

La première recherche à faire consistait à représenter ces fonctions par des séries suffisamment générales, dans lesquelles chaque groupe de termes correspondants vérifiât les équations aux différences partielles, et qui fussent composées de manière à faciliter la détermination des constantes arbitraires à l'aide des forces données, ou par les équations à la surface. La méthode d'intégration que j'ai adoptée est complétement analytique, et ne laisse subsister aucun doute sur la généralité des séries qu'elle donne : elle consiste à employer d'abord trois fonctions intermédiaires qui ramènent les équations aux différences partielles, du second ordre au premier, et à intégrer les équations ainsi réduites. Ces intégrales premières étant obtenues, l'intégration d'un second groupe de trois équations aux différences partielles du premier ordre conduit aux intégrales secondes, c'est-à-dire aux séries qui doivent représenter, de la manière la plus générale, les projections du déplacement dans le système sphérique.

Dans la question de physique mathématique qu'il s'agit de résoudre, les équations à la surface sont au nombre de six. Elles expriment que les trois composantes de la force élastique, qui s'exerce sur l'élément d'une surface sphérique, sont des fonctions données des coordonnées angulaires, lorsqu'on prend cet élément sur les parois de l'enveloppe. La théorie de l'élasticité donne le moyen de déduire, par la différentiation et la combinaison des projections du déplacement, les expressions générales des composantes dont il s'agit. Si, dans les séries qui les représentent, on égale successivement le rayon à celui de l'une et de l'autre paroi, il en résulte six développements, ne contenant d'autres variables que les coordonnées angulaires et qu'il faut identifier avec les fonctions données.

Ces six équations à la surface devaient conduire à la détermination complète de tous les coefficients arbitraires introduits par l'intégration. C'est, en effet, ce qui a lieu. Mais ici la belle méthode d'élimination, si fréquemment employée dans la *Mécanique céleste* et dans la *Théorie analytique de la chaleur*, serait insuffisante sans une extension importante que je vais indiquer. Deux des six équations à la surface, celles qui concernent les composantes normales aux éléments des deux parois sphériques, ne contiennent la latitude que dans une seule espèce de facteurs, et la méthode ordinaire leur est directement applicable. Les quatre autres, au contraire, contiennent la latitude sous deux espèces différentes de facteurs, et la détermination des constantes arbitraires exige la découverte d'une nouvelle méthode d'élimination : car il s'agit de deux suites de coefficients indéterminés, entrant simultanément dans deux équations, lesquelles expriment, chacune, que la somme de deux séries distinctes doit être identiquement égale à une fonction donnée.

De là résulte un problème d'analyse que je crois nouveau en physique mathématique, et qui se présentera nécessairement dans tous les cas généraux de l'équilibre d'élasticité. Sa solution m'a d'abord paru difficile à établir; mais, telle est l'admirable fécondité qu'offre l'ensemble des propriétés que les géomètres ont trouvées dans l'emploi des coordonnées sphériques, qu'en se guidant, dans le cas actuel, par une analogie toute naturelle, on devine facilement la solution cherchée, et que voici :

Pour isoler l'un des coefficients des deux suites qui composent des séries distinctes dans les deux équations, il faut multiplier chaque équation par le facteur variable qui accompagne, dans cette équation même, le coefficient qu'on a en vue, faire la somme des deux produits, et l'intégrer entre les limites extrêmes des coordonnées angulaires. Par cette opération, tous les coefficients des deux suites disparaissent, à l'exception d'un seul, dont la valeur s'exprime par le quotient de deux intégrales définies.

Si l'on réunit, dans chaque série, les termes qui correspondent au sinus et au cosinus d'un même multiple de la longitude, et au même indice d'une certaine fonction de la latitude, on forme ce qu'on peut appeler le terme général de cette série. Les termes généraux de toutes les séries contiennent les mêmes constantes, affectées de facteurs numériques différents, et le nombre de ces constantes est de douze. Elles sont déterminées par quatre groupes d'équations du premier degré, dont les seconds membres sont des quotients d'intégrales définies. Deux de ces groupes sont à quatre inconnues, les deux autres à deux inconnues seulement.

Mais, pour ceux des termes généraux où l'indice relatif à la latitude est l'unité, chaque groupe perd une inconnue, quoique le nombre des équations reste le même. De là résultent des relations qui doivent exister entre les données pour que ces équations ne soient pas incompatibles, et, en outre, l'indétermination des constantes qui ont disparu. Or ces relations expriment que les forces appliquées aux deux parois doivent se faire équilibre sur l'enveloppe, considérée comme un système invariable; et les constantes qui restent indéterminées, appartiennent à des groupes de termes représentant de simples translations parallèles à certains axes, ou de simples rotations autour des mêmes axes; genres de déplacements qui ne font naître aucune force élastique. Ces résultats étaient prévus; mais la manière dont ils se dégagent de la solution analytique mérite d'être remarquée.

En suivant les règles établies dans la théorie générale de l'élasticité, on peut déduire, des séries qui donnent les projections du déplacement moléculaire, la loi de la déformation, la loi de la dilatation, celle de toute force élastique qui s'exerce dans l'intérieur de l'enveloppe, et discuter ces lois dans certains cas particuliers. Toutes ces applications n'offrent pas de difficulté nouvelle, et j'ai dû me dispenser de les traiter ici. Je voulais seulement montrer comment les coordonnées sphériques peuvent être appliquées, avec succès, à l'intégration d'un cas général de l'équilibre d'élasticité, où le corps solide a des dimensions finies dans tous les sens.

§ I.

Les équations aux différences partielles qui expriment l'équilibre d'une enveloppe sphérique solide, homogène et d'élasticité constante, sont les suivantes :

$$(1)\quad \begin{cases} (\lambda+2\mu)r^2c\dfrac{d\theta}{dr}+\mu\left[\dfrac{dc\left(\dfrac{dU}{d\varphi}-\dfrac{drV}{dr}\right)}{d\varphi}-\dfrac{d\left(\dfrac{drW}{dr}-\dfrac{1}{c}\dfrac{dU}{d\psi}\right)}{d\psi}\right]+\rho r^2 c R_0=0,\\[2ex] (\lambda+2\mu)\,c\,\dfrac{d\theta}{d\varphi}+\mu\left[\dfrac{d\dfrac{1}{rc}\left(\dfrac{dV}{d\psi}-\dfrac{dcW}{d\varphi}\right)}{d\psi}-\dfrac{dc\left(\dfrac{dU}{d\varphi}-\dfrac{drV}{dr}\right)}{dr}\right]+\rho rc\Phi_0=0,\\[2ex] (\lambda+2\mu)\,\dfrac{1}{c}\,\dfrac{d\theta}{d\psi}+\mu\left[\dfrac{d\left(\dfrac{drW}{dr}-\dfrac{1}{c}\dfrac{dU}{d\psi}\right)}{dr}-\dfrac{d\dfrac{1}{rc}\left(\dfrac{dV}{d\psi}-\dfrac{dcW}{d\varphi}\right)}{d\varphi}\right]+\rho r\Psi_0=0. \end{cases}$$

Dans ces équations, r est le rayon, ou la distance au centre du système sphérique, φ la latitude et c son cosinus, ψ la longitude; U, V, W sont les projections du très-petit déplacement d'un point de l'espace élastique, sur le rayon, sur la tangente au méridien, sur la tangente au petit cercle parallèle à l'équateur; R_0, Φ_0, Ψ_0 sont les composantes, suivant les mêmes directions, de la force extérieure, pesanteur ou autre, qui agit sur l'enveloppe solide; ρ est la densité du corps; λ, μ sont deux coefficients spécifiques et constants qui mesurent son élasticité; enfin θ est la dilatation cubique ayant pour valeur

$$(2)\qquad \theta=\frac{1}{r^2}\frac{dr^2U}{dr}+\frac{1}{rc}\frac{dcV}{d\varphi}+\frac{1}{rc}\frac{dW}{d\psi}.$$

En outre, s étant le sinus de la latitude, R_i, Φ_i, Ψ_i les composantes, sur les directions citées, de la force élastique qui sollicite un élément-plan, tangent à la sphère, au cône de latitude, ou situé dans le plan méridien, suivant que l'indice i est 1, 2 ou 3, les valeurs de ces neuf composantes sont :

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}
R_1 &= \lambda\theta + 2\mu\frac{dU}{dr},\\
\Phi_2 &= \lambda\theta + 2\mu\left(\frac{U}{r} + \frac{1}{r}\frac{dV}{d\varphi}\right),\\
\Psi_3 &= \lambda\theta + 2\mu\left(\frac{U}{r} - \frac{s}{c}\frac{V}{r} + \frac{1}{rc}\frac{dW}{d\psi}\right),\\
\Psi_2 &= \Phi_3 = \mu\left(\frac{1}{rc}\frac{dV}{d\psi} + \frac{1}{r}\frac{dW}{d\varphi} + \frac{s}{c}\frac{W}{r}\right),\\
R_3 &= \Psi_1 = \mu\left(\frac{dW}{dr} - \frac{W}{r} + \frac{1}{rc}\frac{dU}{d\psi}\right),\\
\Phi_1 &= R_2 = \mu\left(\frac{1}{r}\frac{dU}{d\varphi} + \frac{dV}{dr} - \frac{V}{r}\right).
\end{aligned}\right.$$

Comme je l'ai indiqué dans les *Leçons sur l'élasticité,* on déduit les dix équations précédentes de celles qui expriment le même genre d'équilibre par les coordonnées rectilignes, en transformant ces dernières à l'aide des formules qui servent à passer aux coordonnées sphériques.

Les projections du déplacement et les composantes des forces élastiques ont des directions et des signes dont il importe de rappeler la liaison. Dans le système des coordonnées actuelles, les sphères concentriques, les cônes de latitude et les plans méridiens forment trois familles de surfaces conjuguées et orthogonales, dont les paramètres sont r, φ, ψ. L'axe ou la normale de l'une des trois surfaces qui passent en chaque point, a sa partie positive dirigée du côté où le paramètre de la surface augmente, sa partie négative située du côté où le paramètre diminue; et chacune de ces parties donne son signe aux projections et aux composantes qui ont la même direction qu'elle. Pour un élément-plan tangent à l'une des surfaces coordonnées, l'action élastique exercée par la partie solide extérieure, ou située du côté de la normale positive, sur la partie intérieure, a pour composantes R_i, Φ_i, Ψ_i; et, inversement, l'action exercée par la partie intérieure sur la partie extérieure a pour composantes $-R_i$, $-\Phi_i$, $-\Psi_i$.

L'enveloppe sphérique est sollicitée, sur les deux parois, par des forces dont on connaît l'intensité et la direction. Sur la paroi extérieure de rayon r_1, l'action élastique aux composantes (R_1, Φ_1, Ψ_1) est remplacée par une force donnée, ayant pour composantes $(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{N}_1, \mathfrak{T}_1)$. Sur la paroi intérieure de rayon r_0, l'action élastique aux composantes $(-R_1, -\Phi_1, -\Psi_1)$ est pareillement remplacée par une force donnée, dont nous désignerons les composantes par $(-\mathfrak{N}_0, -\mathfrak{M}_0, -\mathfrak{T}_0)$. Les six nouvelles composantes $(\mathfrak{N}_i, \mathfrak{M}_i, \mathfrak{T}_i)$ sont des fonctions connues des deux coordonnées φ et ψ, seules variables sur les deux parois. Ainsi l'on doit avoir, d'après les valeurs (3),

$$(4)\qquad \text{pour } r = r_i \left\{ \begin{aligned} R_1 &= \lambda\theta + 2\mu\frac{dU}{dr} = \mathfrak{N}_i(\varphi, \psi), \\ \Phi_1 &= \mu\left(\frac{1}{r}\frac{dU}{d\varphi} + r\frac{d\frac{V}{r}}{dr}\right) = \mathfrak{M}_i(\varphi, \psi), \\ \Psi_1 &= \mu\left(\frac{1}{rc}\frac{dU}{d\psi} + r\frac{d\frac{W}{r}}{dr}\right) = \mathfrak{T}_i(\varphi, \psi), \end{aligned} \right.$$

en écrivant ces équations deux fois, une avec l'indice $i = 1$, l'autre avec l'indice $i = 0$. Telles sont les six conditions ou les six équations à la surface.

Le problème d'analyse, qu'il s'agit de résoudre, consiste à trouver des fonctions U, V, W, de (r, φ, ψ), qui vérifient les équations aux différences partielles (1), et qui, pour $r = r_1$ et $r = r_0$, rendent identiques les six équations (4).

§ II.

Les fonctions ou les séries (U, V, W) doivent contenir des intégrales particulières (U_0, V_0, W_0), uniquement destinées à faire disparaître, dans les équations aux différences partielles linéaires (1), les termes en (R_0, Φ_0, Ψ_0), et, en outre, un complément intégral vérifiant les mêmes équations dépourvues de leurs derniers termes.

Si l'enveloppe sphérique est seulement pesante, l'axe polaire du système coordonné peut être vertical, et l'on a

$$R_0 = -gs, \quad \Phi_0 = gc, \quad \Psi_0 = 0,$$

c et s étant toujours le cosinus et le sinus de la latitude φ, g l'intensité de la force extérieure. Or, lors du passage de l'homogénéité absolue au régime de la pesanteur, les points géométriques de l'espace élastique n'ayant aucune raison de sortir de leur méridien primitif, W est nul, U et V sont indépendants de la longitude ψ, et les équations (1) deviennent

$$\left.\begin{aligned}(\lambda+2\mu)r^2\frac{d\theta}{dr}+\frac{\mu}{c}\frac{dc\zeta}{d\varphi}&=\varpi r^2 s,\\ (\lambda+2\mu)\frac{d\theta}{d\varphi}-\mu\frac{d\zeta}{dr}&=\varpi rc,\end{aligned}\right\}\quad \text{où}\quad \left\{\begin{aligned}\theta&=\frac{1}{r^2}\frac{dr^2\mathrm{U}}{dr}+\frac{1}{rc}\frac{dc\mathrm{V}}{d\varphi},\\ \zeta&=\frac{d\mathrm{U}}{d\varphi}-\frac{dr\mathrm{V}}{dr},\end{aligned}\right.$$

le poids de la matière solide, sous l'unité de volume, étant $\varpi=\rho g$. Ces équations sont vérifiées par les valeurs

$$\theta=\frac{\varpi}{\lambda}rs,\quad \zeta=\frac{\varpi}{\lambda}r^2c,$$

lesquelles conduisent aux intégrales particulières

$$(5)\qquad \mathrm{U}_0=\frac{\varpi}{10\lambda}r^2s,\quad \mathrm{V}_0=-\frac{3\varpi}{10\lambda}r^2c,\quad \mathrm{W}_0=0,$$

nécessaires et suffisantes quand l'enveloppe solide est seulement pesante.

S'il s'agit de l'équilibre relatif d'un corps tournant uniformément autour d'un axe fixe, que l'on peut prendre pour axe polaire, on a

$$\mathrm{R}_0=\omega^2rc^2,\quad \Phi_0=-\omega^2rcs,\quad \Psi_0=0,$$

la vitesse angulaire de la rotation étant ω. Alors, partant des mêmes principes, et suivant la même marche que dans le cas précédent, on obtient les intégrales particulières

$$(6)\quad \mathrm{U}_0=\left(\frac{1}{5}-c^2\right)\mathrm{Q}r^3,\quad \mathrm{V}_0=\frac{1}{2}\mathrm{Q}r^3cs,\quad \mathrm{W}_0=0,\ \text{où}\ \mathrm{Q}=\frac{\rho\omega^2}{7(\lambda+2\mu)}.$$

Si l'enveloppe solide est soumise à une attraction dirigée vers le centre, et proportionnelle à la distance r, on a

$$\mathrm{R}_0=\frac{gr}{r_1},\quad \Phi_0=0,\quad \Psi_0=0,$$

l'intensité de la force attractive étant g à la paroi extérieure, de rayon r_1.

Or, lors du passage de l'homogénéité absolue au régime de l'attraction, les points géométriques de l'espace élastique n'ayant aucune raison d'abandonner leur rayon primitif, les projections V, W du déplacement sont nulles; U ne peut d'ailleurs varier qu'avec r, et les équations (1) se réduisent à l'équation unique

$$(\lambda + 2\mu)\frac{d\frac{1}{r^2}\frac{dr^2 U}{dr}}{dr} = \frac{\varpi r}{r_1};$$

ce qui conduit aux intégrales particulières

$$(7) \qquad U_0 = \frac{\varpi}{10(\lambda + 2\mu)}\frac{r^3}{r_1}, \quad V_0 = 0, \quad W_0 = 0,$$

nécessaires et suffisantes dans ce dernier cas.

§ III.

On peut maintenant supprimer, dans les équations (1), les termes en (R_0, Φ_0, Ψ_0), et chercher le complément intégral des séries (U, V, W), puisque les valeurs particulières (5), (6) et (7), isolées ou ajoutées, permettent de traiter toutes les applications qui offriraient quelque intérêt.

Par cette suppression, et posant, pour simplifier,

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{drV}{d\psi} - \frac{drcW}{d\varphi} = r^2 c \mathcal{A}, \\ &\frac{drcW}{dr} - \frac{dU}{d\psi} = c \mathcal{B}, \\ &\frac{dU}{d\varphi} - \frac{drV}{dr} = \frac{1}{c}\Gamma, \end{aligned} \right.$$

les équations aux différences partielles (1) peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d\mathcal{B}}{d\psi} - \frac{d\Gamma}{d\varphi} = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} r^2 c \frac{d\theta}{dr}, \\ &\frac{d\Gamma}{dr} - \frac{d\mathcal{A}}{d\psi} = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} c \frac{d\theta}{d\varphi}, \\ &\frac{d\mathcal{A}}{d\varphi} - \frac{d\mathcal{B}}{dr} = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}\frac{1}{c}\frac{d\theta}{d\psi}. \end{aligned} \right.$$

Si l'on ajoute ces équations (9) après les avoir respectivement différentiées, la première en r, la seconde en φ, la troisième en ψ, les fonctions $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, Γ disparaissent, et, divisant par c, on obtient

$$(10)\qquad \frac{dr^2\dfrac{d\theta}{dr}}{dr}+\frac{1}{c}\,\frac{dc\dfrac{d\theta}{d\varphi}}{d\varphi}+\frac{1}{c^2}\,\frac{d^2\theta}{d\psi^2}=0.$$

La même suite d'opérations appliquée au groupe (8) fait disparaître les fonctions U, rV, rcW, et l'on a

$$(11)\qquad \frac{dr^2\mathcal{A}}{dr}+\frac{1}{c}\,\frac{dc\mathcal{B}}{d\varphi}+\frac{1}{c^2}\,\frac{d\Gamma}{d\psi}=0.$$

Remarquons enfin que les fonctions U, rV, rcW sont liées à θ par l'équation (2), qui se met sous la forme

$$(12)\qquad \frac{dr^2\mathrm{U}}{dr}+\frac{1}{c}\,\frac{dc.r\mathrm{V}}{d\varphi}+\frac{1}{c^2}\,\frac{drc\mathrm{W}}{d\psi}=r^2\theta.$$

L'ensemble des cinq groupes d'équations qui précèdent, indique clairement la marche à suivre pour obtenir les valeurs nécessaires et suffisamment générales des projections du déplacement : il faut intégrer d'abord l'équation (10), chercher ensuite des fonctions $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, Γ, qui satisfassent aux équations (9) et (11), et composer enfin des fonctions U, rV, rcW, qui vérifient les équations (8) et (12).

Supprimer les (R_0, Φ_0, Ψ_0), ou en faire abstraction, revient à étudier, directement et sans mélange, les lois de la déformation occasionnée, dans une enveloppe sphérique solide, par des efforts dont on connaît l'intensité et la direction, et qui sollicitent les deux parois; car les équations aux différences partielles (1) étant linéaires, les déplacements qui exprimeront cette nouvelle déformation coexisteront avec ceux qu'a fait naître la pesanteur, la force centrifuge ou l'attraction centrale, à la manière de tous les petits mouvements, et comme l'entendait Bernoulli. Mais il importe de remarquer que, si l'on peut, comme nous allons le faire, étudier la déformation d'une enveloppe uniquement sollicitée sur ses parois, en n'employant que le complément intégral et en faisant abstraction des actions exercées sur toute la masse solide, l'inverse ou la réciproque n'a pas lieu : c'est-à-dire que les intégrales particulières (5), (6) ou (7) ne suffisent pas pour faire connaître les déplacements dus à la pesanteur, à la force centrifuge ou à l'attraction centrale; qu'il faut y joindre essentiellement un complément intégral, dont les arbitraires puissent être déterminées par les conditions et l'état des parois de l'enveloppe, comme il sera dit à la fin de ce Mémoire.

§ IV.

Dans l'analyse qui va suivre, nous remplacerons souvent la latitude, ou la variable φ, par s ou son sinus, que nous désignerons alors par α; les règles de la différentiation donnent

$$\frac{d.}{d\varphi} = c\,\frac{d.}{dx}, \quad \frac{1}{c}\,\frac{dc\,\frac{d.}{d\varphi}}{d\varphi} = \frac{d(1-\alpha^2)\frac{d.}{d\alpha}}{d\alpha},$$

et, quand on passe ainsi de la variable φ à la variable α, c est égal à $\sqrt{1-\alpha^2}$, et, pour simplifier, peut remplacer ce radical. Ce changement de variable indépendante est tellement facile, que nous pourrons, dans le même calcul et sans nuire à la clarté, employer alternativement φ et α, s'il en résulte des formules plus courtes. Pour le même but de simplification, posons encore

$$(13) \qquad \theta = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}\,\mathrm{F},$$

et l'équation (10) devient

$$(14) \qquad \frac{dr^2\frac{d\mathrm{F}}{dr}}{dr} + \frac{d(1-\alpha^2)\frac{d\mathrm{F}}{d\alpha}}{d\alpha} + \frac{\frac{d^2\mathrm{F}}{d\psi^2}}{1-\alpha^2} = 0.$$

Cette équation est bien connue; fréquemment employée par la *Mécanique céleste* ou par la *Théorie analytique de la chaleur,* elle régit le potentiel dans l'attraction des sphéroïdes, ou représente la loi des températures stationnaires d'une sphère solide homogène. Son intégrale générale, pour une enveloppe sphérique complète, est la double série

$$(15) \qquad \mathrm{F} = \sum_{n=0}^{n=\infty}\,\sum_{l=0}^{l=n}\left[\left(\mathrm{A}\,r^n + \frac{\mathrm{B}}{r^{n+1}}\right)\cos l\psi + \left(\mathrm{C}\,r^n + \frac{\mathrm{D}}{r^{n+1}}\right)\sin l\psi\right]\mathrm{P}.$$

Chaque terme général contient quatre constantes arbitraires (A, B, C, D), deux nombres entiers n, l, et une fonction entière de α, qui est

$$(16)\qquad P = (1-\alpha^2)^{\frac{l}{2}}\left\{\begin{array}{l} \alpha^{n-l} - \dfrac{(n-l)(n-l-1)}{2(2n-1)}\alpha^{n-l-2} \\ + \dfrac{(n-l)(n-l-1)(n-l-2)(n-l-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}\alpha^{n-l-4} - \ldots \end{array}\right\},$$

et qui vérifie l'équation différentielle

$$(17)\qquad \frac{d(1-\alpha^2)\dfrac{dP}{d\alpha}}{d\alpha} - \frac{l^2 P}{1-\alpha^2} + n(n+1)P = 0.$$

Pour chaque valeur de n, la double série (15) contient un groupe de $(n+1)$ termes généraux, où l'entier l est successivement égal à $0, 1, 2, \ldots, n$; enfin, il y a autant de groupes semblables que de valeurs de l'entier n, depuis zéro jusqu'à l'infini.

Dans l'enveloppe sphérique actuelle, le rayon r, toujours compris entre r_0 et r_1, ne peut pas être nul, puisque le solide ne s'étend pas jusqu'au centre: on doit donc admettre dans F (15) les termes partiels aux constantes B et D; mais s'il s'agissait d'une sphère pleine, ces termes, qui deviendraient infinis pour $r = 0$, devraient être supprimés. Pour les points du solide situés sur l'axe polaire, la latitude φ étant égale à $\frac{\pi}{2}$ et α à l'unité, F ou θ doit alors rester fini et devenir indépendant de ψ; pour les points du solide situés sur le plan de l'équateur, ou quand $\alpha = 0$, F doit aussi rester fini : la double série (15) jouit de ces propriétés, d'après la forme de la fonction P (16), et par l'absence de tout terme contenant des puissances négatives de c et de α. En outre, lorsqu'on augmente la variable ψ d'un nombre entier de circonférences ou de 2π, F doit reprendre la même valeur, et c'est ce qui arrive dans la double série (15), puisque l est un nombre entier. D'après ces considérations, la fonction F (15) a toute la généralité nécessaire pour représenter la dilatation cubique θ (13) de tous les points de l'enveloppe solide. Mais s'il s'agissait d'un secteur, d'un voussoir, d'une enveloppe sphérique évidée ou incomplète, cette double série n'aurait plus la généralité suffisante : elle pourrait alors admettre des termes différents, et entre autres des fractions dont les dénominateurs s'annuleraient pour des valeurs de α ou même de ψ, appartenant à des points non occupés par le solide.

En adoptant l'intégrale (15) comme étant suffisamment générale pour l'objet qui nous occupe, il importe de remarquer que, si le sigma relatif à l paraît subordonné au sigma relatif à n, l'inverse peut aussi avoir lieu. On peut, en effet, réunir dans un seul groupe tous les termes qui contiennent le même nombre l, et où n a successivement toutes les valeurs depuis $n = l$ jusqu'à $n = \infty$, puis former autant de groupes semblables qu'il y a de valeurs de l depuis zéro jusqu'à l'infini. Suivant la question que l'on traite, l'un de ces deux modes de groupement est préférable à l'autre; mais, laissant indécis celui de ces modes qu'il convient d'employer ici, nous poserons symboliquement

$$(18) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{l=0}^{l=n} = \sum_{l=0}^{l=\infty} \sum_{n=l}^{n=\infty} = \mathrm{S};$$

introduisant, en outre, les fonctions ξ et ζ de la seule variable ψ, données par les équations

$$(19) \qquad \begin{cases} \mathrm{A} \cos l\psi + \mathrm{C} \sin l\psi = \xi, \\ \mathrm{B} \cos l\psi + \mathrm{D} \sin l\psi = \zeta, \end{cases}$$

d'où

$$(19\ bis) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 \xi}{d\psi^2} + l^2 \xi = 0, \\ \dfrac{d^2 \zeta}{d\psi^2} + l^2 \zeta = 0, \end{cases}$$

nous pourrons écrire très-simplement l'intégrale générale (15) de la manière suivante :

$$(20) \qquad \mathrm{F} = \mathrm{S}\left(\xi r^n + \frac{\zeta}{r^{n+1}}\right)\mathrm{P};$$

et si nous avons besoin d'autres fonctions F′, F″, de même nature que F, vérifiant comme cette dernière l'équation (14), nous exprimerons les formes intégrales de ces nouvelles fonctions en accentuant ξ et ζ

dans la série (20), et aussi les constantes (A, B, C, D) dans les équations (19).

§ V.

Cherchons maintenant des fonctions $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, Γ, qui satisfassent aux équations (9) et (11), ou bien, substituant à θ sa valeur (13), qui vérifient les quatre équations suivantes, lesquelles sont aux différences partielles, simultanées et du premier ordre,

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\mathcal{B}}{d\psi} - \frac{d\Gamma}{d\varphi} = r^2 c \frac{dF}{dr},\\ &\frac{d\Gamma}{dr} - \frac{d\mathcal{A}}{d\psi} = c\frac{dF}{d\varphi},\\ &\frac{d\mathcal{A}}{d\varphi} - \frac{d\mathcal{B}}{dr} = \frac{1}{c}\frac{dF}{d\psi},\\ &\frac{dr^2\mathcal{A}}{dr} + \frac{1}{c}\frac{dc\mathcal{B}}{d\varphi} + \frac{1}{c^2}\frac{d\Gamma}{d\psi} = 0, \end{aligned}\right.$$

et où la fonction F est donnée par la série (20). Il faut remarquer qu'en ajoutant les trois premières équations (21), après les avoir respectivement différentiées, la première en r, la seconde en φ, la troisième en ψ, on reproduit l'équation (14) que doit vérifier F; d'où il suit que ces trois équations, qui seraient incompatibles sans cette vérification, ne constituent réellement que deux équations distinctes.

Comme dans toute intégration d'un système d'équations linéaires, les fonctions cherchées doivent être ainsi composées,

$$(22)\qquad \mathcal{A} = \mathcal{A}_e + \mathcal{A}', \quad \mathcal{B} = \mathcal{B}_e + \mathcal{B}', \quad \Gamma = \Gamma_e + \Gamma',$$

savoir, d'intégrales particulières et essentielles ($\mathcal{A}_e$, $\mathcal{B}_e$, Γ_e), rendant les premiers membres des équations (21) identiquement égaux aux seconds, et d'intégrales générales complémentaires ($\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, Γ'), vérifiant les mêmes équations lorsque tous leurs seconds membres sont zéro. Ces dernières intégrales se trouvent sans peine : il suffit, en effet, de prendre respectivement pour $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, Γ', les trois dérivées partielles en r, en φ, en ψ, d'une même fonction F′ qui vérifie l'équation (14); car, avec ces valeurs, les premiers membres des équations (21) s'annulent tous. On a ainsi

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{F}' = \mathrm{S}\left(\xi' r^n + \frac{\zeta'}{r^{n+1}}\right)\mathrm{P},\\ &\mathcal{A}' = \frac{d\mathrm{F}'}{dr},\quad \mathcal{B}' = \frac{d\mathrm{F}'}{d\varphi},\quad \Gamma' = \frac{d\mathrm{F}'}{d\psi}:\end{aligned}\right.$$

les fonctions ξ', ζ', de ψ seul, étant données par les équations (19), en mettant un accent aux constantes pour les distinguer de celles qui appartiennent à F.

La recherche des intégrales particulières ($\mathcal{A}_e$, $\mathcal{B}_e$, Γ_e) présente plus de difficulté. A l'aide d'une méthode d'intégration trop longue à développer ici, et dont il sera parlé au § X, j'ai trouvé que l'on peut prendre

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathcal{A}_e = 0,\quad \mathcal{B}_e = \mathrm{S}\left(-\frac{d\xi}{d\psi}\frac{r^{n+1}}{n+1} + \frac{\frac{d\zeta}{d\psi}}{nr^n}\right)\frac{\mathrm{P}}{c},\\ &\Gamma_e = \mathrm{S}\left(\xi\frac{r^{n+1}}{n+1} - \frac{\zeta}{nr^n}\right)c^2\frac{d\mathrm{P}}{d\alpha};\end{aligned}\right.$$

et il est facile de vérifier que ces valeurs remplissent la condition, essentielle et suffisante, de rendre identiques les équations (21). En effet, avec elles, on a d'abord successivement, en ayant égard au second groupe des équations (19), à l'équation différentielle (17), et à la valeur (20) de F,

$$\frac{d\mathcal{B}_e}{d\psi} = \mathrm{S}\left(\frac{\xi r^{n+1}}{n+1} - \frac{\zeta}{nr^n}\right)\frac{l^2\mathrm{P}}{c},$$

$$\frac{d\Gamma_e}{d\varphi} = c\frac{d\Gamma_e}{d\alpha} = c\mathrm{S}\left(\frac{\xi r^{n+1}}{n+1} - \frac{\zeta}{nr^n}\right)\frac{dc^2\frac{d\mathrm{P}}{d\alpha}}{d\alpha},$$

$$\frac{d\mathcal{B}_e}{d\psi} - \frac{d\Gamma_e}{d\varphi} = c\mathrm{S}\left[n\xi r^{n+1} - (n+1)\frac{\zeta}{r^n}\right]\mathrm{P} = r^2 c\frac{d\mathrm{F}}{dr};$$

ce qui vérifie la première (21); ensuite $\mathcal{A}_e$ est nul, et la différentiation donne

$$\frac{d\Gamma_e}{dr} = c\mathrm{S}\left(\xi r^n + \frac{\zeta}{r^{n+1}}\right)\frac{d\mathrm{P}}{d\varphi} = c\frac{d\mathrm{F}}{d\varphi},$$

$$-\frac{d\mathcal{B}_e}{dr} = \frac{1}{c}\mathrm{S}\left(\frac{d\xi}{d\psi}r^n + \frac{\frac{d\zeta}{d\psi}}{r^{n+1}}\right)\mathrm{P} = \frac{1}{c}\frac{d\mathrm{F}}{d\psi};$$

la seconde et la troisième sont donc identiques; enfin on a

$$\frac{dc\mathfrak{B}_e}{d\alpha} + \frac{1}{c^2}\frac{d\Gamma_e}{d\psi} = \mathrm{S}\left(\frac{d\xi}{d\psi}\frac{r^{n+1}}{n+1} - \frac{\frac{d\zeta}{d\psi}}{nr^n}\right)\left(\frac{d\mathrm{P}}{d\alpha} - \frac{d\mathrm{P}}{d\alpha}\right) = 0,$$

et puisque $\mathfrak{A}_e$ est nul, la quatrième (21) est aussi vérifiée.

Si l'on substitue dans les formules (22) les valeurs trouvées (23) et (24), on a définitivement, en effectuant les différentiations indiquées sur F',

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \mathrm{S}\left[n\xi' r^{n-1} - (n+1)\frac{\zeta'}{r^{n+2}}\right]\mathrm{P},\\ \mathfrak{B} &= \mathrm{S}\left(-\frac{d\xi}{d\psi}\frac{r^{n+1}}{n+1} + \frac{\frac{d\zeta}{d\psi}}{nr^n}\right)\frac{\mathrm{P}}{c} + \mathrm{S}\left(\xi' r^n + \frac{\zeta'}{r^{n+1}}\right)c\frac{d\mathrm{P}}{d\alpha},\\ \Gamma &= \mathrm{S}\left(\frac{\xi r^{n+1}}{n+1} - \frac{\zeta}{nr^n}\right)c^2\frac{d\mathrm{P}}{d\alpha} + \mathrm{S}\left(\frac{d\xi'}{d\psi}r^n + \frac{\frac{d\zeta'}{d\psi}}{r^{n+1}}\right)\mathrm{P}.\end{aligned}\right.$$

Et telles sont les intégrales générales des équations (21).

§ VI.

Essayons enfin de composer les séries qui doivent représenter, avec une généralité suffisante, les fonctions (U, V, W). Pour cela, il faut intégrer les équations (8) et (12), ou bien, substituant à θ, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, Γ, leurs valeurs (13) et (22), il faut chercher des fonctions (U, rV, rcW) qui vérifient les quatre équations suivantes, lesquelles sont aux différences partielles, simultanées et du premier ordre,

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dr\mathrm{V}}{d\psi} - \frac{drc\mathrm{W}}{d\varphi} &= r^2c(\mathfrak{A}_e + \mathfrak{A}'),\\ \frac{drc\mathrm{W}}{dr} - \frac{d\mathrm{U}}{d\psi} &= c(\mathfrak{B}_e + \mathfrak{B}'),\\ \frac{d\mathrm{U}}{d\varphi} - \frac{dr\mathrm{V}}{dr} &= \frac{1}{c}(\Gamma_e + \Gamma'),\\ \frac{dr^2\mathrm{U}}{dr} + \frac{1}{c}\frac{dc.r\mathrm{V}}{d\varphi} + \frac{1}{c^2}\frac{drc\mathrm{W}}{d\psi} &= \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}r^2\mathrm{F},\end{aligned}\right.$$

et où les fonctions sises aux seconds membres ont les valeurs (20), (23) et (24). La quatrième valeur (21), satisfaite par les valeurs (22), résulte, comme on l'a vu au § III, d'une élimination entre les trois premières équations (26); ces trois équations ne constituent donc réellement que deux équations distinctes.

Les fonctions à déterminer doivent être ainsi composées,

$$(27)\quad U = U_e + U' + U'',\quad V = V_e + V' + V'',\quad W = W_e + W' + W'',$$

savoir, d'intégrales particulières (U_e, V_e, W_e) vérifiant les équations (26) lorsque les seconds membres ne contiennent que les fonctions ($\mathcal{A}_e$, $\mathcal{B}_e$, Γ_e et F); d'intégrales encore particulières (U', V', W') vérifiant les mêmes équations quand les seconds membres ne contiennent que ($\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, Γ' et o); enfin des intégrales générales (U'', V'', W'') des équations (26) lorsque tous leurs seconds membres sont zéro. Ces dernières intégrales s'obtiennent, de la même manière que ($\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, Γ'), en introduisant une troisième fonction F'' qui vérifie l'équation (14); d'où résulte

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} F'' &= S\left(\xi'' r^n + \frac{\zeta''}{r^{n+1}}\right) P,\\ U'' &= \frac{dF''}{dr},\quad V'' = \frac{1}{r}\frac{dF''}{d\varphi},\quad W'' = \frac{1}{rc}\frac{dF''}{d\psi};\end{aligned}\right.$$

les fonctions ξ'', ζ'' de ψ étant données par les équations (19), avec deux accents aux constantes, pour les distinguer de celles qui appartiennent à F et à F'.

De ce que les fonctions ($\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, Γ') sont respectivement égales aux trois dérivées partielles de F', il suit évidemment que les intégrales particulières (U', rV', rcW') peuvent être formées avec F', comme ($\mathcal{A}_e$, $\mathcal{B}_e$, Γ_e) ont été formées avec F; les formules (23) donnent donc immédiatement

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} U' &= 0,\quad V' = S\left(-\frac{d\xi'}{d\psi}\frac{r^n}{n+1} + \frac{\dfrac{d\zeta'}{d\psi}}{nr^{n+1}}\right)\frac{P}{c},\\ W' &= S\left(\frac{\xi' r^n}{n+1} - \frac{\zeta'}{nr^{n+1}}\right) c\,\frac{dP}{d\alpha};\end{aligned}\right.$$

déduction dont la simplicité remarquable est un avantage de la méthode d'intégration que nous avons suivie.

La recherche des intégrales particulières (U_e, rV_e, rcW_e) exige l'emploi de quatre coefficients indéterminés. De ce que $\mathcal{A}_e$ est nul, la première (26) indique que rV_e et rcW_e sont deux dérivées d'une même fonction, la première en φ, la seconde en ψ; on reconnaît facilement, d'après cela, que (U_e, V_e, W_e) doivent être de la forme

$$(30)\quad \begin{cases} U_e = S\left(-\gamma\xi r^{n+1} - \gamma'\dfrac{\zeta}{r^n}\right)P, \\ V_e = S\left(-\beta\xi r^{n+1} + \beta'\dfrac{\zeta}{r^n}\right)\dfrac{dP}{d\varphi}, \\ W_e = S\left(-\beta\dfrac{d\xi}{d\psi}r^{n+1} + \beta'\dfrac{\frac{d\zeta}{d\psi}}{r^n}\right)\dfrac{P}{c}; \end{cases}$$

réduisant alors les seconds membres des équations (26) aux seuls termes des séries $\mathcal{B}_e$, Γ_e et F, qui contiennent un même ξ, ou un même ζ, et substituant dans les premiers membres le groupe de termes correspondants des séries (30), on obtient deux équations du premier degré entre γ et β, ou entre γ' et β'; et posant, pour simplifier,

$$(31)\quad \lambda + \mu = e, \quad \lambda + 2\mu = a,$$

on trouve, pour les valeurs des quatre coefficients,

$$(32)\quad \begin{cases} \gamma = \dfrac{[(n+2)e - 2a]}{2(2n+3)a}, & \beta = \dfrac{[(n+1)e + 2a]}{(2n+2)(2n+3)a}, \\ \gamma' = \dfrac{[(n-1)e + 2a]}{2(2n-1)a}, & \beta' = \dfrac{(ne - 2a)}{2n(2n-1)a}. \end{cases}$$

Substituant dans les formules (27) les valeurs trouvées (28), (29) et (30); effectuant les différentiations indiquées sur F''; remplaçant les $\xi^{(j)}$, $\zeta^{(j)}$ par leurs valeurs (19); mettant $\cos l\psi$ et $\sin l\psi$ en facteurs communs dans les termes généraux; enfin, désignant les polynômes en r seul, qui multiplient ces lignes trigonométriques, comme l'indique le tableau suivant :

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} n\begin{pmatrix}A''\\C''\end{pmatrix} r^{n-1} - \gamma\begin{pmatrix}A\\C\end{pmatrix} r^{n+1} - \frac{n+1}{r^{n+2}}\begin{pmatrix}B''\\D''\end{pmatrix} - \gamma'\begin{pmatrix}B\\D\end{pmatrix} &= \left\{\begin{matrix}G,\\ \mathfrak{G},\end{matrix}\right. \\ \begin{pmatrix}A''\\C''\end{pmatrix} r^{n-1} - \beta\begin{pmatrix}A\\C\end{pmatrix} r^{n+1} + \frac{1}{r^{n+2}}\begin{pmatrix}B''\\D''\end{pmatrix} + \beta'\begin{pmatrix}B\\D\end{pmatrix} &= \left\{\begin{matrix}H,\\ \mathfrak{H},\end{matrix}\right. \\ \frac{r^n}{n+1}\begin{pmatrix}A'\\C'\end{pmatrix} - \frac{1}{nr^{n+1}}\begin{pmatrix}B'\\D'\end{pmatrix} &= \left\{\begin{matrix}H',\\ \mathfrak{H}',\end{matrix}\right. \end{aligned}\right.$$

qu'il faut écrire deux fois, une avec les lettres supérieures, l'autre avec les lettres inférieures; on obtient définitivement

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} U &= S\,(G\cos l\psi + \mathfrak{G}\sin l\psi)\,P, \\ V &= S\,(H\cos l\psi + \mathfrak{H}\sin l\psi)\,c\,\frac{dP}{d\alpha} - S\,(\mathfrak{H}'\cos l\psi - H'\sin l\psi)\,\frac{lP}{c}, \\ W &= S\,(\mathfrak{H}\cos l\psi - H\sin l\psi)\,\frac{lP}{c} + S\,(H'\cos l\psi + \mathfrak{H}'\sin l\psi)\,c\,\frac{dP}{d\alpha}. \end{aligned}\right.$$

Telles sont les intégrales générales des équations (1), quand on fait abstraction des (R_0, Φ_0, Ψ_0).

§ VII.

Les intégrales générales des fonctions U, V, W contiennent trois suites quadruples de constantes arbitraires, introduites par les séries F, F′, F″, et qu'il s'agit de déterminer. Pour cela, il est nécessaire de développer en série les six équations à la surface (4), que ces constantes doivent vérifier.

Si l'on ajoute au tableau (33) les désignations suivantes,

$$(35)\qquad \begin{pmatrix}A\\C\end{pmatrix} r^n + \begin{pmatrix}B\\D\end{pmatrix}\frac{1}{r^{n+1}} = \left\{\begin{matrix}G',\\ \mathfrak{G}',\end{matrix}\right.$$

on peut écrire la série F (20), ou plutôt celle qui exprime θ (13), sous la forme

$$(36)\qquad \theta = S\left(\frac{\mu}{a}G'\cos l\psi + \frac{\mu}{a}\mathfrak{G}'\sin l\psi\right) = \frac{\mu}{a}F.$$

On arrive d'ailleurs au même développement par la substitution directe des valeurs (34) dans l'équation (2); opération qui sert à vérifier ces valeurs et leurs coefficients (33).

Si l'on substitue les valeurs (34) et (36) dans les expressions (3) des composantes (R_1, Φ_1, Ψ_1) de la force élastique qui sollicite un élément-plan tangent à la sphère de rayon r; si aux notations (31) on ajoute celle-ci,

$$3\lambda + 2\mu = b, \quad \text{d'où} \quad a + b = 4e; \tag{37}$$

enfin, si l'on désigne les polynômes en r seul, qui multiplient les lignes trigonométriques en ψ, dans les divers termes généraux, comme l'indique le tableau

$$(38)\left\{\begin{aligned}
&2n(n-1)\mu\begin{pmatrix}A''\\C''\end{pmatrix}r^{n-2} - \frac{\mu}{a}\frac{n(n-1)e-b}{2n+3}\begin{pmatrix}A\\C\end{pmatrix}r^n\\
&+\frac{2(n+1)(n+2)\mu}{r^{n+3}}\begin{pmatrix}B''\\D''\end{pmatrix} + \frac{\mu}{a}\frac{(n+1)(n+2)e-b}{(2n-1)r^{n+1}}\begin{pmatrix}B\\D\end{pmatrix} = \begin{cases}K,\\ \mathcal{K},\end{cases}\\
&2(n-1)\mu\begin{pmatrix}A''\\C''\end{pmatrix}r^{n-2} - \frac{\mu}{a}\frac{(n+1)^2e-a}{(n+1)(2n+3)}\begin{pmatrix}A\\C\end{pmatrix}r^n\\
&-\frac{2(n+2)\mu}{r^{n+3}}\begin{pmatrix}B''\\D''\end{pmatrix} - \frac{\mu}{a}\frac{n^2e-a}{n(2n-1)r^{n+1}}\begin{pmatrix}B\\D\end{pmatrix} = \begin{cases}L,\\ \mathcal{L},\end{cases}\\
&\frac{n-1}{n+1}\mu\begin{pmatrix}A'\\C'\end{pmatrix}r^{n-1} + \frac{(n+2)\mu}{nr^{n+2}}\begin{pmatrix}B'\\D'\end{pmatrix} = \begin{cases}L',\\ \mathcal{L}',\end{cases}
\end{aligned}\right.$$

qu'il faut écrire deux fois, une avec les lettres supérieures, l'autre avec les lettres inférieures; les valeurs générales des composantes dont il s'agit se présentent sous la forme

$$(39)\left\{\begin{aligned}
R_1 &= S(K\cos l\psi + \mathcal{K}\sin l\psi)P,\\
\Phi_1 &= S(L\cos l\psi + \mathcal{L}\sin l\psi)c\frac{dP}{d\alpha} - S(\mathcal{L}'\cos l\psi - L'\sin l\psi)\frac{lP}{c},\\
\Psi_1 &= S(\mathcal{L}\cos l\psi - L\sin l\psi)\frac{lP}{c} + S(L'\cos l\psi + \mathcal{L}'\sin l\psi)c\frac{dP}{d\alpha};
\end{aligned}\right.$$

et, $(\mathcal{N}_i, \mathcal{M}_i, \mathcal{T}_i)$ étant des fonctions de α et ψ, les six équations à la surface (4) qu'il faut identifier sont ainsi développées,

$$(40)\quad \begin{cases} \mathrm{S}(\mathrm{K}_i\cos l\psi + \mathcal{K}_i\sin l\psi)\mathrm{P} = \mathcal{K}_i, \\ \mathrm{S}(\mathrm{L}_i\cos l\psi + \mathcal{L}_i\sin l\psi)c\dfrac{d\mathrm{P}}{d\alpha} - \mathrm{S}(\mathcal{L}'_i\cos l\psi - \mathrm{L}'_i\sin l\psi)\dfrac{l\mathrm{P}}{c} = \mathfrak{M}_i, \\ \mathrm{S}(\mathcal{L}_i\cos l\psi - \mathrm{L}_i\sin l\psi)\dfrac{l\mathrm{P}}{c} + \mathrm{S}(\mathrm{L}'_i\cos l\psi + \mathcal{L}'_i\sin l\psi)c\dfrac{d\mathrm{P}}{d\alpha} = \mathfrak{T}_i; \end{cases}$$

équation qu'il faut écrire deux fois, l'une avec l'indice $i = 1$, l'autre avec l'indice $i = 0$.

L'indice i qui affecte les six lettres désignant les polynômes (38) indique ici que leur variable r doit être remplacée par r_i, c'est-à-dire successivement par r_1 et par r_0. Ainsi, dans les six développements (40), le groupe des termes généraux, correspondants à un même couple de valeurs des entiers l et n, contient douze coefficients constants $(\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_0, \ldots)$. Or ces douze coefficients sont liés aux douze constantes $[\mathrm{A}^{(j)}, \mathrm{B}^{(j)}, \mathrm{C}^{(j)}, \mathrm{D}^{(j)}]$, du groupe de termes généraux correspondants des séries $\mathrm{F}^{(j)}$, par douze équations du premier degré, que l'on obtient en faisant successivement $r = r_1$ et $r = r_0$ dans les six relations (38). Il suffit donc de déterminer les coefficients $(\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_0, \ldots)$ par l'identification nécessaire des développements (40); car la résolution des douze équations citées donnera ensuite les constantes arbitraires introduites par l'intégration.

§ VIII.

Dans les équations (40), où l'on peut remplacer le signe S par le double sigma (18) correspondant au second mode de groupement défini au § IV, on isole chaque groupe de termes contenant le même nombre l, à l'aide d'un procédé fréquemment employé en physique mathématique. Il suffira de rappeler les formules

$$(41)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos l\psi \sin l'\psi\, d\psi = 0, \\ \left.\begin{aligned} &\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos l\psi \cos l'\psi\, d\psi \\ &\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin l\psi \sin l'\psi\, d\psi \end{aligned}\right\} = \begin{cases} 0, \text{ si } l' \text{ non } = l, \\ \pi, \text{ si } l' = l, \end{cases} \end{cases}$$

qu'il est d'ailleurs facile de vérifier. D'après ces formules, si l'on multiplie successivement les équations (40) par $\cos l\psi\, d\psi$, par $\sin l\psi\, d\psi$, l ayant la valeur correspondante au groupe que l'on veut isoler, et si l'on intègre entre les limites extrêmes de la variable ψ, on aura, tous les $\sum$ s'étendant de $n = l$, actuellement constant, jusqu'à $n = \infty$,

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned}
&\sum \mathrm{K}_i^{(l,n)}\mathrm{P}_l^{(n)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathfrak{N}_i \cos l\psi\, d\psi,\\
&\sum \mathfrak{K}_i^{(l,n)}\mathrm{P}_l^{(n)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathfrak{N}_i \sin l\psi\, d\psi,\\
&\sum \mathrm{L}_i^{(l,n)} c\frac{d\mathrm{P}_l^{(n)}}{d\alpha} + \sum\left(-\mathfrak{L}_i'^{(l,n)}\right)\frac{l\mathrm{P}_l^{(n)}}{c} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathfrak{M}_i \cos l\psi\, d\psi,\\
&\sum \mathfrak{L}_i^{(l,n)} c\frac{d\mathrm{P}_l^{(n)}}{d\alpha} + \sum \mathrm{L}_i'^{(l,n)}\frac{l\mathrm{P}_l^{(n)}}{c} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathfrak{M}_i \sin l\psi\, d\psi,\\
&\sum \mathrm{L}_i^{(l,n)}\frac{l\mathrm{P}_l^{(n)}}{c} + \sum\left(-\mathfrak{L}_i'^{(l,n)}\right) c\frac{d\mathrm{P}_l^{(n)}}{d\alpha} = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathfrak{T}_i \sin l\psi\, d\psi,\\
&\sum \mathfrak{L}_i^{(l,n)}\frac{l\mathrm{P}_l^{(n)}}{c} + \sum \mathrm{L}_i'^{(l,n)} c\frac{d\mathrm{P}_l^{(n)}}{d\alpha} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathfrak{T}_i \cos l\psi\, d\psi.
\end{aligned}\right.$$

Le double accent dont les coefficients sont affectés, l'indice et l'accent de la fonction P, indiquent le couple de valeurs de l et de n qui caractérise le terme auquel appartiennent ces coefficients et cette fonction. Il importe de remarquer que les équations précédentes ne contiennent plus d'autre variable que α.

Pour isoler le groupe particulier qui correspond à $l = 0$, il faut multiplier les équations (40) par $d\psi$, et intégrer entre les limites de ψ; puisque

$$\int_0^{2\pi} \sin l\psi\, d\psi = 0,\quad \int_0^{2\pi} \cos l\psi\, d\psi = 0,\quad \int_0^{2\pi} d\psi = 2\pi,$$

tous les termes où l n'est pas nul disparaissent par cette opération, et il reste

$$(43)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{n=\infty} \mathrm{K}_i^{(0,n)}\,\mathrm{P}_0^{(n)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathfrak{K}_i\,d\psi,\\ &\sum_{n=0}^{n=\infty} \mathrm{L}_i^{(0,n)}\,c\,\frac{d\mathrm{P}_0^{(n)}}{d\alpha} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathfrak{M}_i\,d\psi,\\ &\sum_{n=0}^{n=\infty} \mathrm{L}_i'^{(0,n)}\,c\,\frac{d\mathrm{P}_0^{(n)}}{d\alpha} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathfrak{C}_i\,d\psi; \end{aligned}\right.$$

équations que l'on déduit aussi des équations générales (42), en faisant $l = 0$, remarquant que les coefficients $[\mathfrak{K}_i^{(0,n)}, \mathfrak{L}_i^{(0,n)}, \mathfrak{L}_i'^{(0,n)}]$ n'existent pas, et doublant le dénominateur π des seconds membres. Cette modification du dénominateur, seul motif qui oblige de considérer à part le groupe en $l = 0$, on l'évite facilement en posant

$$(44)\qquad \int_0^{2\pi} \cos^2 l\psi\,d\psi = \varpi_l,$$

et prenant pour dénominateur ϖ_l au lieu de π; car, d'après sa valeur (44), ϖ_l est une fonction de l, qui a pour valeur 2π quand $l = 0$, et simplement π quand l est un nombre entier différent de zéro.

Deux propriétés des fonctions P donnent le moyen d'isoler successivement chaque coefficient des séries (42) à l'aide d'une opération semblable à celle qui a séparé ces séries. Si à l'équation différentielle (17) on joint celle-ci,

$$\frac{dc^2\,\frac{d\mathrm{P}'}{d\alpha}}{d\alpha} - \frac{l'^2\mathrm{P}'}{c^2} + n'(n'+1)\,\mathrm{P}' = 0,$$

P et P′ correspondant à des valeurs différentes de n et de l, on déduit facilement de ces équations

$$\begin{aligned} &[n'(n'+1) - n(n+1)]\int \mathrm{P}\mathrm{P}'\,d\alpha\\ &= (l'^2 - l^2)\int \frac{\mathrm{P}\mathrm{P}'}{c^2}\,d\alpha + c^2\left(\mathrm{P}'\,\frac{d\mathrm{P}}{d\alpha} - \mathrm{P}\,\frac{d\mathrm{P}'}{d\alpha}\right); \end{aligned}$$

définissant l'intégration entre les limites extrêmes -1 et $+1$ de la variable α, observant que c^2 ou $(1-\alpha^2)$ s'annule à ces deux limites, et que P, P' sont des fonctions entières de α, on a

$$[n'(n'+1)-n(n+1)]\int_{-1}^{+1} PP'\,d\alpha=(l'^2-l^2)\int_{-1}^{+1}\frac{PP'\,d\alpha}{c^2};$$

d'où l'on conclut enfin

$$(45)\qquad \int_{-1}^{+1} P_l^{(n)}\,P_l^{(n')}\,d\alpha=\begin{cases}0, & \text{si } n' \text{ non } = n,\\ \displaystyle\int_{-1}^{+1}[P_l^{(n)}]^2\,d\alpha, & \text{si } n'=n.\end{cases}$$

Ce théorème suffit pour isoler chaque coefficient $K_i^{(l,n)}$, $\mathcal{K}_i^{(l,n)}$ dans les deux premières équations (42) : car si l'on multiplie ces équations par $P_l^{(n)}\,d\alpha$, n ayant la valeur à laquelle appartient le coefficient qu'on veut isoler, et si l'on intègre entre les limites extrêmes de α, tous les termes correspondants aux autres valeurs de n disparaîtront par cette opération, et l'on aura

$$(46)\qquad \begin{cases} K_i^{(l,n)}=\dfrac{\displaystyle\int_{-1}^{+1} P_l^{(n)}.\int_0^{2\pi}\mathcal{H}_i\cos l\psi\,d\psi.\,d\alpha}{\displaystyle\varpi_l\int_{-1}^{+1}\left[P_l^{(n)}\right]^2 d\alpha},\\[2ex] \mathcal{K}_i^{(l,n)}=\dfrac{\displaystyle\int_{-1}^{+1} P_l^{(n)}.\int_0^{2\pi}\mathcal{H}_i\sin l\psi\,d\psi.\,d\alpha}{\displaystyle\varpi_l\int_{-1}^{+1}\left[P_l^{(n)}\right]^2 d\alpha}.\end{cases}$$

Cette méthode d'élimination était connue; on l'emploie notamment, dans la théorie analytique de la chaleur, pour trouver la loi intégrale des températures stationnaires, dans une enveloppe sphérique homogène, dont les parois sont directement soumises à des sources constantes de chaleur ou de froid. Mais il faut trouver une autre méthode pour isoler les coefficients dans les quatre dernières équations (42); car ces coefficients entrent simultanément dans deux d'entre elles, et d'une manière différente de l'une à l'autre.

§ IX.

Il s'agit d'isoler les coefficients $E_l^{(n)}$, $\mathcal{E}_l^{(n)}$, dans deux équations simultanées de la forme

$$(47)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=l}^{n=\infty} E_l^{(n)} c \frac{dP_l^{(n)}}{d\alpha} + \sum_{n=l}^{n=\infty} \mathcal{E}_l^{(n)} \frac{lP_l^{(n)}}{c} = F(\alpha), \\ \displaystyle\sum_{n=l}^{n=\infty} E_l^{(n)} \frac{lP_l^{(n)}}{c} + \sum_{n=l}^{n=\infty} \mathcal{E}_l^{(n)} c \frac{dP_l^{(n)}}{d\alpha} = \mathcal{F}(\alpha), \end{cases}$$

où nous supposerons que le nombre fixe l n'est pas zéro. P et P′ désignant des fonctions (16) qui correspondent au même l, et à deux valeurs différentes de n, l'intégration par parties, et l'équation différentielle (17), donnent

$$\int c^2 \frac{dP}{d\alpha}\frac{dP'}{d\alpha} d\alpha = c^2 \frac{dP}{d\alpha} P' - l^2 \int \frac{PP' d\alpha}{c^2} + n(n+1)\int PP' d\alpha;$$

définissant l'intégration entre les limites extrêmes de α, on a

$$\int_{-1}^{+1} c^2 \frac{dP}{d\alpha}\frac{dP'}{d\alpha} d\alpha + l^2 \int_{-1}^{+1} \frac{PP' d\alpha}{c^2} = n(n+1)\int_{-1}^{+1} PP' d\alpha;$$

d'où il suit, d'après le théorème (45), et en employant la même notation,

$$(48)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-1}^{+1} c \frac{dP_l^{(n)}}{d\alpha} \cdot c \frac{dP_l^{(n')}}{d\alpha} d\alpha + \int_{-1}^{+1} \frac{lP_l^{(n)}}{c} \cdot \frac{lP_l^{(n')}}{c} d\alpha \\ \quad = \begin{cases} 0, \text{ si } n' \text{ non } = n, \\ \displaystyle n(n+1)\int_{-1}^{+1} [P_l^{(n)}]^2 d\alpha, \text{ si } n' = n. \end{cases} \end{cases}$$

D'après ce nouveau théorème, pour isoler un des coefficients $E_l^{(n)}$, on ajoutera les deux équations (47), respectivement multipliées par $c \frac{dP_l^{(n)}}{d\alpha} d\alpha$, par $\frac{lP_l^{(n)}}{c}$, n ayant la valeur à laquelle appartient le coefficient qu'on veut isoler, et l'on intégrera la somme obtenue entre les limites extrêmes de α; ce qui donnera d'abord

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}_l^{(n)}.n(n+1)\int_{-1}^{+1}[\mathrm{P}_l^{(n)}]^2\,d\alpha \\
&+\sum_{n'=l}^{n'=\infty}\mathcal{E}_l^{(n')}\,l\int_{-1}^{+1}\left[\mathrm{P}_l^{(n')}\frac{d\mathrm{P}_l^{(n)}}{d\alpha}+\mathrm{P}_l^{(n)}\frac{d\mathrm{P}_l^{(n')}}{d\alpha}\right]d\alpha \\
&=\int_{-1}^{+1}\left[c\frac{d\mathrm{P}_l^{(n)}}{d\alpha}\mathrm{F}(\alpha)+\frac{l\mathrm{P}_l^{(n)}}{c}\mathcal{F}(\alpha)\right]d\alpha;
\end{aligned}$$

mais les termes du sigma en n' sont tous nuls : en effet, chacun d'eux a pour facteur une intégrale définie qui n'est autre que la différence des valeurs que prend un produit $\mathrm{P}_l^{(n)}\,\mathrm{P}_l^{(n')}$ aux deux limites de α; et, puisque l n'est pas zéro, $\mathrm{P}_l^{(n)}$ (16) contient le facteur c et s'annule conséquemment à ces limites, ainsi que tout produit $\mathrm{P}_l^{(n)}\,\mathrm{P}_l^{(n')}$. On a donc, isolément,

$$(49)\qquad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{E}_l^{(n)}&=\frac{\displaystyle\int_{-1}^{+1}\left[c\frac{d\mathrm{P}_l^{(n)}}{d\alpha}\mathrm{F}(\alpha)+\frac{l\mathrm{P}_l^{(n)}}{c}\mathcal{F}(\alpha)\,d\alpha\right]}{\displaystyle n(n+1)\int_{-1}^{+1}\left[\mathrm{P}_l^{(n)}\right]^2 d\alpha},\\
\mathcal{E}_l^{(n)}&=\frac{\displaystyle\int_{-1}^{+1}\left[c\frac{d\mathrm{P}_l^{(n)}}{d\alpha}\mathcal{F}(\alpha)+\frac{l\mathrm{P}_l^{(n)}}{c}\mathrm{F}(\alpha)\right]}{\displaystyle n(n+1)\int_{-1}^{+1}\left[\mathrm{P}_l^{(n)}\right]^2 d\alpha},
\end{aligned}\right.$$

la valeur de $\mathcal{E}_l^{(n)}$ s'obtenant de la même manière que $\mathrm{E}_l^{(n)}$ en intervertissant les multiplicateurs.

Quand $l=0$, les équations (47) cessent d'être simultanées, et sont

$$(50)\qquad \sum_{n=0}^{n=\infty}\mathrm{E}_0^{(n)}\,c\frac{d\mathrm{P}_0^{(n)}}{d\alpha}=\mathrm{F}(\alpha),\quad \sum_{n=0}^{n=\infty}\mathcal{E}_0^{(n)}\,c\frac{d\mathrm{P}_0^{(n)}}{d\alpha}=\mathcal{F}(\alpha).$$

La formule (48) devient

$$(51)\quad \int_{-1}^{+1} c\,\frac{d\mathrm{P}_0^{(n)}}{d\alpha}\,.\,c\,\frac{d\mathrm{P}_0^{(n')}}{d\alpha}\,d\alpha = \begin{cases} 0, \text{ si } n' \text{ non} = n, \\ n(n+1)\displaystyle\int_{-1}^{+1} (\mathrm{P}_0^{(n)})^2\,d\alpha, \text{ si } n' = n, \end{cases}$$

et, d'après ce théorème particulier, on isole chaque coefficient, dans l'une ou l'autre équation (50), en la multipliant par le facteur $c\,\frac{d\mathrm{P}_0^{(n)}}{d\alpha}\,d\alpha$, et intégrant entre les limites de α; ce qui donne

$$(52)\quad \mathrm{E}_0^{(n)} = \frac{\displaystyle\int_{-1}^{+1} c\,\frac{d\mathrm{P}_l^{(n)}}{d\alpha}\,\mathrm{F}(\alpha)\,d\alpha}{n(n+1)\displaystyle\int_{-1}^{+1} [\mathrm{P}_0^{(n)}]^2\,d\alpha}, \qquad \mathcal{E}_0^{(n)} = \frac{\displaystyle\int_{-1}^{+1} c\,\frac{d\mathrm{P}_0^{(n)}}{d\alpha}\,\mathfrak{F}(\alpha)\,d\alpha}{n(n+1)\displaystyle\int_{-1}^{+1} [\mathrm{P}_0^{(n)}]^2\,d\alpha},$$

valeurs que reproduisent d'ailleurs les formules (49) lorsqu'on y fait $l = 0$.

La méthode d'élimination trouvée s'applique immédiatement aux quatre dernières équations (42), lesquelles forment deux couples simultanés semblables au couple (47). On en déduit

$$(53)\quad \begin{cases} \mathrm{L}_i^{(l,n)} = \dfrac{\displaystyle\int_{-1}^{+1}\left[c\,\frac{d\mathrm{P}_l^{(n)}}{d\alpha}\int_0^{2\pi}\mathfrak{M}_i\cos l\psi\,d\psi - \frac{l\mathrm{P}_l^{(n)}}{c}\int_0^{2\pi}\mathfrak{G}_i\sin l\psi\,d\psi\right]d\alpha}{\varpi_l.\,n(n+1)\displaystyle\int_{-1}^{+1}\left[\mathrm{P}_l^{(n)}\right]^2 d\alpha}, \\[2ex] \mathfrak{L}_i^{(l,n)} = \dfrac{\displaystyle\int_{-1}^{+1}\left[c\,\frac{d\mathrm{P}_l^{(n)}}{d\alpha}\int_0^{2\pi}\mathfrak{M}_i\sin l\psi\,d\psi + \frac{l\mathrm{P}_l^{(n)}}{c}\int_0^{2\pi}\mathfrak{G}_i\cos l\psi\,d\psi\right]d\alpha}{\varpi_l.\,n(n+1)\displaystyle\int_{-1}^{+1}\left[\mathrm{P}_l^{(n)}\right]^2 d\alpha}, \\[2ex] \mathrm{L}_i'^{(l,n)} = \dfrac{\displaystyle\int_{-1}^{+1}\left[c\,\frac{d\mathrm{P}_l^{(n)}}{d\alpha}\int_0^{2\pi}\mathfrak{G}_i\cos l\psi\,d\psi + \frac{l\mathrm{P}_l^{(n)}}{c}\int_0^{2\pi}\mathfrak{M}_i\sin l\psi\,d\psi\right]d\alpha}{\varpi_l.\,n(n+1)\displaystyle\int_{-1}^{+1}\left[\mathrm{P}_l^{(n)}\right]^2 d\alpha}, \\[2ex] \mathfrak{L}_i'^{(l,n)} = \dfrac{\displaystyle\int_{-1}^{+1}\left[c\,\frac{d\mathrm{P}_l^{(n)}}{d\alpha}\int_0^{2\pi}\mathfrak{G}_i\sin l\psi\,d\psi - \frac{l\mathrm{P}_l^{(n)}}{c}\int_0^{2\pi}\mathfrak{M}_i\cos l\psi\,d\psi\right]d\alpha}{\varpi_l.\,n(n+1)\displaystyle\int_{-1}^{+1}\left[\mathrm{P}_l^{(n)}\right]^2 d\alpha}. \end{cases}$$

Ces valeurs, et celles (46) de $K_i^{(l,n)}$, $\mathfrak{K}_i^{(l,n)}$, écrites deux fois, une avec l'indice $i = 1$, l'autre avec l'indice $i = 0$, donnent les douze coefficients (K_1, K_0,...) des six développements (40), et les équations à la surface sont maintenant satisfaites.

X.

Il importe d'évaluer ici l'intégrale définie $\int_{-1}^{+1} P^2\,d\alpha$, qui entre comme dénominateur dans les valeurs des coefficients (46) et (53). On établit d'abord la formule

$$(2n-1)\,P_l^{(n)} = n\alpha\,P_l^{(n-1)} - c^2\frac{dP_l^{(n-1)}}{d\alpha}.$$

Pour cela, représentant le second membre par Q, et partant de l'équation différentielle (17), que vérifie la fonction $P_l^{(n-1)}$ en y changeant n en $n-1$, on constate que Q vérifie cette même équation (17) sans aucun changement; d'où résulte que Q est proportionnel à $P_l^{(n)}$, ou égal à $kP_l^{(n)}$; ensuite la constante k se détermine par l'égalité nécessaire des coefficients du même premier terme $c^l\alpha^{n-l}$, dans Q et dans $kP_l^{(n)}$, et l'on trouve $k = 2n-1$. De cette première formule on déduit, par la différentiation, et ayant égard à l'équation différentielle que $P_l^{(n-1)}$ vérifie,

$$(2n-1)\frac{dP_l^{(n)}}{d\alpha} = \left(n^2 - \frac{l^2}{c^2}\right)P_l^{(n-1)} + n\alpha\frac{dP_l^{(n-1)}}{d\alpha};$$

éliminant la dérivée de $P_l^{(n-1)}$ entre les deux équations précédentes, on obtient la première du groupe suivant,

$$(54)\qquad \begin{cases} \dfrac{n^2-l^2}{2n-1}\,P_l^{(n-1)} = n\alpha\,P_l^{(n)} + c^2\dfrac{dP_l^{(n)}}{d\alpha}, \\[2ex] (2n+1)\,P_l^{(n+1)} = (n+1)\alpha\,P_l^{(n)} - c^2\dfrac{dP_l^{(n)}}{d\alpha}; \end{cases}$$

dont la seconde se déduit de la formule primitive par le changement de n en $n+1$; éliminant enfin la dérivée de $P_l^{(n)}$ entre les deux équations de ce groupe, on arrive à la formule importante

$$P_l^{(n+1)} = \alpha P_l^{(n)} - \frac{n^2 - l^2}{4n^2 - 1} P_l^{(n-1)} \tag{55}$$

d'où découle facilement l'évaluation proposée.

A l'aide du théorème (45), la formule (55) conduit aux deux relations

$$\int_{-1}^{+1} [P_l^{(n+1)}]^2 \, d\alpha = \int_{-1}^{+1} \alpha P_l^{(n)} P_l^{(n+1)} \, d\alpha,$$

$$\int_{-1}^{+1} \alpha P_l^{(n)} P_l^{(n-1)} \, d\alpha = \frac{n^2 - l^2}{4n^2 - 1} \int_{-1}^{+1} [P_l^{(n-1)}]^2 \, d\alpha,$$

qui, étant comparées après le changement de n en $n-1$ dans la première, donnent

$$\int_{-1}^{+1} [P_l^{(n)}]^2 \, d\alpha = \frac{n^2 - l^2}{4n^2 - 1} \int_{-1}^{+1} [P_l^{(n-1)}]^2 \, d\alpha$$

$$= \prod_{j=l+1}^{j=n} \left(\frac{j^2 - l^2}{4j^2 - 1} \right) \int_{-1}^{+1} [P_l^{(l)}]^2 \, d\alpha,$$

en se servant de la notation souvent employée pour exprimer le produit de facteurs dont la loi est connue. L'équation (16) donne $P_l^{(l)} = c^l$, et l'on obtient

$$\int_{-1}^{+1} [P_l^{(l)}]^2 \, d\alpha = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^{2l+1} \varphi \, d\varphi = 2 \prod_{i=1}^{i=l} \left(\frac{2i}{2i+1} \right)$$

à l'aide de l'intégration par parties. On a donc, enfin,

$$\int_{-1}^{+1} [P_l^{(n)}]^2 \, d\alpha = 2 \prod_{i=1}^{i=l} \left(\frac{2i}{2i+1} \right) \cdot \prod_{j=l+1}^{j=n} \left(\frac{j^2 - l^2}{4j^2 - 1} \right). \tag{56}$$

Et telle est la valeur numérique de l'intégrale définie qui entre au dénominateur des coefficients (46) et (53).

Outre leur emploi dans la recherche de la valeur (56), les deux équations (54) sont utiles en d'autres circonstances. J'avais d'abord obtenu les intégrales générales des fonctions (U, V, W) sous une forme très-compliquée, et c'est à l'aide de ce groupe (54) que je suis parvenu à les simplifier considérablement, à les ramener enfin à la forme (34), qui pouvait seule se prêter à la détermination des constantes arbitraires. Voici le principe de ces simplifications : Comme on l'a vu au § VI, les intégrales (U, V, W) se composent chacune de trois séries distinctes, l'une déduite de F, la deuxième de F', la troisième de F'', dont toutes les constantes sont d'ailleurs arbitraires. Dans les termes généraux de ces trois séries partielles, la même fonction $P_l^{(n)}$ est associée à un binôme en $\left(r^{n+1} \text{ et } \frac{1}{r^n}\right)$ pour la première, en $\left(r^n \text{ et } \frac{1}{r^{n+1}}\right)$ pour la seconde, en $\left(r^{n-1} \text{ et } \frac{1}{r^{n+2}}\right)$ pour la troisième. Or si l'on change n (en $n+1$ et en $n-1$) dans le terme général d'une série inférieure, on reproduit les deux termes d'un binôme du même ordre que celui de la série immédiatement supérieure, mais accompagnés de $P_l^{(n+1)}$ et de $P_l^{(n-1)}$ que le groupe (54) permet d'exprimer en $P_l^{(n)}$. On peut donc ajouter à la première série partielle des termes empruntés à la deuxième, et à la deuxième des termes empruntés à la troisième; ce qui donne le moyen de simplifier les deux premières séries, en conservant leur caractère essentiel, sans nuire à la dernière, dont la généralité ne perd rien à tous ces emprunts.

C'est réellement de cette manière que j'étais arrivé aux intégrales secondes (34). Mais en révisant les intégrales premières, c'est-à-dire celles des fonctions ($\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, Γ), qui ne contenaient chacune que deux séries partielles, l'une déduite de F, l'autre de F', j'ai reconnu que la même méthode de simplification par emprunts s'y appliquait beaucoup plus facilement; et c'est ainsi que j'ai trouvé le groupe (24), ou les valeurs les plus simples de ($\mathcal{A}_e$, $\mathcal{B}_e$, Γ_e), qui conduisent si naturellement aux intégrales générales (34).

§ XI.

Les douze coefficients généraux $(K_1, K_0, \ldots)$, qui rendent identiques les six équations à la surface (40), étant déterminés par les valeurs (46) et (53), il faut recourir au tableau (38) pour déduire de ces valeurs les douze constantes générales $[A^{(j)}, B^{(j)}, C^{(j)}, D^{(j)}]$. Pour cela, faisant successivement $r = r_1$ et $r = r_0$ dans les six équations de ce tableau, les seconds membres seront les douze coefficients généraux actuellement connus, et l'on aura à résoudre quatre groupes d'équations du premier degré, savoir : un à quatre inconnues (A'', A, B'', B) liées à (K_1, K_0, L_1, L_0); un deuxième à quatre inconnues (C'', C, D'', D) liées à $(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_0, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_0)$; un troisième à deux inconnues (A', B') liées à (L'_1, L'_0); enfin un dernier à deux inconnues (C', D') liées à $(\mathcal{L}'_1, \mathcal{L}'_0)$. Tant que n sera plus grand que l'unité, ou pour tout couple $(l, n > 1)$, ces groupes d'équations ne présenteront aucune indétermination, ni aucune impossibilité. Mais, quand $n = 1$, le nombre des équations de chaque groupe étant toujours quatre ou deux, il y a une inconnue de moins, puisque les premiers termes disparaissent au tableau (38); d'où résultent, d'une part, des relations nécessaires entre les données, afin que les équations de chaque groupe ne soient pas incompatibles, et, d'autre part, l'indétermination des constantes qui correspondent aux termes nuls. Il importe de chercher ces relations nécessaires, et d'étudier les conséquences de cette indétermination.

Si l'on fait $r = r_i$ et $n = 1$ dans les deux premières cases du tableau (38), elle deviennent, d'après les notations (31) et (37),

$$\frac{\mu b}{5a}\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} r_i + \frac{12\mu}{r_i^4}\begin{pmatrix} B'' \\ D'' \end{pmatrix} + \frac{\mu(6e - b)}{ar_i^2}\begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} = \begin{cases} K_i \\ \mathcal{K}_i \end{cases},$$

$$-\frac{\mu b}{10a}\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} r_i - \frac{6\mu}{r_i^4}\begin{pmatrix} B'' \\ D'' \end{pmatrix} - \frac{\mu(e - a)}{ar_i^2}\begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} = \begin{cases} L_i \\ \mathcal{L}_i \end{cases}:$$

ajoutant à la première deux fois la seconde, et faisant ensuite successivement $i = 1$, $i = 0$, on a

$$\frac{3\mu}{r_i^2}\begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} = \begin{cases} K_i + 2L_i, \\ \mathcal{K}_i + 2\mathcal{L}_i, \end{cases} \qquad 3\mu\begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} = \begin{cases} r_1^2(K_1 + 2L_1) = r_0^2(K_0 + 2L_0), \\ r_1^2(\mathcal{K}_1 + 2\mathcal{L}_1) = r_0^2(\mathcal{K}_0 + 2\mathcal{L}_0); \end{cases}$$

d'où résultent, pour tout couple $(l,\ n=1)$, les deux relations nécessaires

$$(57)\qquad \begin{cases} r_1^2(\mathrm{K}_1+2\mathrm{L}_1)-r_0^2(\mathrm{K}_0+2\mathrm{L}_0)=0,\\ r_1^2(\mathcal{K}_1+2\mathcal{L}_1)-r_0^2(\mathcal{K}_0+2\mathcal{L}_0)=0.\end{cases}$$

Si l'on fait pareillement $r=r_i$ et $n=1$ dans la dernière case du même tableau (38), elle devient et donne

$$\frac{3\mu}{r_i^3}\begin{pmatrix}\mathrm{B}'\\ \mathrm{D}'\end{pmatrix}=\begin{cases}\mathrm{L}'_i,\\ \mathcal{L}'_i,\end{cases}\qquad 3\mu\begin{pmatrix}\mathrm{B}'\\ \mathrm{D}'\end{pmatrix}=\begin{cases}r_1^3\,\mathrm{L}'_1=r_0^3\,\mathrm{L}'_0,\\ r_1^3\,\mathcal{L}'_1=r_0^3\,\mathcal{L}'_0,\end{cases}$$

d'où résultent encore, pour tout couple $(l,\ n=1)$, les deux relations nécessaires

$$(58)\qquad r_1^3\,\mathrm{L}'_1-r_0^3\,\mathrm{L}'_0=0,\quad r_1^3\,\mathcal{L}'_1-r_0^3\,\mathcal{L}'_0=0.$$

Quand $n=1$, le nombre l ne peut être que 1, ou zéro. Dans le premier cas, on a, en désignant $\cos\psi$ et $\sin\psi$ par c' et s' et d'après les formules (16), (56), (44), (46) et (53)

$$(59)\qquad \begin{cases} n=1,\quad l=1,\quad \mathrm{P}=c,\\[4pt] c\dfrac{d\mathrm{P}}{d\alpha}=-s,\quad \displaystyle\int_{-1}^{+1}\mathrm{P}^2\,d\alpha=\frac{4}{3},\quad \varpi_l=\pi,\\[4pt] \mathrm{K}_i=\dfrac{3}{4\pi}\displaystyle\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi}\mathfrak{N}_i\,cc'\,d\psi\,d\alpha,\\[4pt] \mathrm{L}_i=\dfrac{3}{8\pi}\displaystyle\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi}(-\mathfrak{M}_i\,sc'-\mathfrak{T}_i\,s')\,d\psi\,d\alpha,\\[4pt] \mathrm{L}'_i=\dfrac{3}{8\pi}\displaystyle\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi}(-\mathfrak{T}_i\,sc'+\mathfrak{M}_i\,s')\,d\psi\,d\alpha,\\[4pt] \mathcal{K}_i=\dfrac{3}{4\pi}\displaystyle\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi}\mathfrak{N}_i\,cs'\,d\psi\,d\alpha,\\[4pt] \mathcal{L}_i=\dfrac{3}{8\pi}\displaystyle\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi}(-\mathfrak{M}_i\,ss'+\mathfrak{T}_i\,c')\,d\psi\,d\alpha,\\[4pt] \mathcal{L}'_i=\dfrac{3}{8\pi}\displaystyle\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi}(-\mathfrak{T}_i\,ss'-\mathfrak{M}_i\,c')\,d\psi\,d\alpha.\end{cases}$$

Dans le second cas, on a, d'après les mêmes formules,

$$(60)\quad \left\{\begin{aligned}
&n = 1, \quad l = 0, \quad P = s,\\
&c\frac{dP}{d\alpha} = c, \quad \int_{-1}^{+1} P^2\,d\alpha = \frac{2}{3}, \quad \varpi_l = 2\pi,\\
&K_i = \frac{3}{4\pi}\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} \mathfrak{N}_i\, s\,d\psi\,d\alpha,\\
&L_i = \frac{3}{8\pi}\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} \mathfrak{M}_i\, c\,d\psi\,d\alpha,\\
&L'_i = \frac{3}{8\pi}\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} \mathfrak{T}_i\, c\,d\psi\,d\alpha,\\
&\mathfrak{K}_i = 0, \quad \mathfrak{L}_i = 0, \quad \mathfrak{L}'_i = 0.
\end{aligned}\right.$$

Si l'on substitue successivement ces valeurs (59) et (60) dans les relations (57), on trouve, en remplaçant l'intégration en α par celle en φ,

$$(61)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} (\mathfrak{N}_1\, cc' - \mathfrak{M}_1\, sc' - \mathfrak{T}_1\, s')\, r_1\, c\,d\psi \,.\, r_1\, d\varphi\\
&\quad - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} (\mathfrak{N}_0\, cc' - \mathfrak{M}_0\, sc' - \mathfrak{T}_0\, s')\, r_0\, c\,d\psi \,.\, r_0\, d\varphi = 0,\\
&\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} (\mathfrak{N}_1\, cs' - \mathfrak{M}_1\, ss' + \mathfrak{T}_1\, c')\, r_1\, c\,d\psi \,.\, r_1\, d\varphi\\
&\quad - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} (\mathfrak{N}_0\, cs' - \mathfrak{M}_0\, ss' + \mathfrak{T}_0\, c')\, r_0\, c\,d\psi \,.\, r_0\, d\varphi = 0,\\
&\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} (\mathfrak{N}_1\, s + \mathfrak{M}_1\, c)\, r_1\, c\,d\psi \,.\, r_1\, d\varphi\\
&\quad - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} (\mathfrak{N}_0\, s + \mathfrak{M}_0\, c)\, r_0\, c\,d\psi \,.\, r_0\, d\varphi = 0;
\end{aligned}\right.$$

la dernière (57) étant rendue identique par les valeurs (60). Si l'on fait successivement les mêmes substitutions dans les relations (58), on trouve de la même manière,

$$(62)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}(\mathfrak{M}_1 r_1 s' - \mathfrak{C}_1 r_1 sc') r_1 c d\psi . r_1 d\varphi \\
&-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}(\mathfrak{M}_0 r_0 s' - \mathfrak{C}_0 r_0 sc') r_0 c d\psi . r_0 d\varphi = 0,\\
&\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}(\mathfrak{M}_1 r_1 c' + \mathfrak{C}_1 r_1 ss') r_1 c d\psi . r_1 d\varphi \\
&-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}(\mathfrak{M}_0 r_0 c' + \mathfrak{C}_0 r_0 ss') r_0 c d\psi . r_0 d\varphi = 0,\\
&\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\mathfrak{C}_1 r_1 c . r_1 c d\psi . r_1 d\varphi \\
&-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\mathfrak{C}_0 r_0 c . r_0 c d\psi . r_0 d\varphi = 0;
\end{aligned}\right.$$

la dernière (58) étant encore rendue identique par les valeurs (60). Ce qui donne en tout six conditions nécessaires entre les données.

Si l'on considère maintenant trois axes rectilignes et orthogonaux, menés par le centre du système sphérique, savoir : deux dans le plan de l'équateur par les longitudes 0 et $\frac{\pi}{2}$, le troisième suivant l'axe polaire; si l'on remarque que les produits $r_1 c_1 d\psi . r_1 d\varphi$ et $r_0 c d\psi . r_0 d\varphi$ sont les éléments de surface des deux parois; enfin, si l'on se rappelle que les composantes des forces données sont $(\mathfrak{N}_1, \mathfrak{M}_1, \mathfrak{C}_1)$ sur la paroi extérieure, et $(-\mathfrak{N}_0, -\mathfrak{M}_0, -\mathfrak{C}_0)$ sur la paroi intérieure (§ I); on reconnaîtra facilement, dans les premiers membres des équations (61), les sommes des composantes de toutes les forces données suivant les trois axes choisis, et, dans les premiers membres des relations (62), les sommes des moments des mêmes forces autour des mêmes axes. D'après cela, les six conditions trouvées expriment que les forces données doivent se faire équilibre sur l'enveloppe solide, considérée comme un système invariable, pour que cette enveloppe puisse être en équilibre d'élasticité sous l'action de ces forces.

§ XII.

Les constantes qui restent indéterminées, par suite de leur disparition du tableau (38) quand $n = 1$, existent néanmoins dans les séries (34), lesquelles contiennent ainsi des groupes de termes dont les coefficients pourront être pris arbitrairement, sans que les efforts donnés s'y opposent. Limitant les fonctions (U, V, W) (34) à ces seuls groupes, on trouve, par le tableau (33) et par les premières lignes (59) et (60),

$$(63)\quad \left\{\begin{aligned} U &= A''_0 s + A''_1 cc' + C''_1 cs', \\ V &= A''_0 c - A''_1 sc' - C''_1 ss' + \frac{1}{2} A'_1 rs' - \frac{1}{2} C'_1 rc', \\ W &= \frac{1}{2} A'_0 rc - A''_1 s' + C''_1 c' - \frac{1}{2} A'_1 rsc' - \frac{1}{2} C'_1 rss'; \end{aligned}\right.$$

les indices 1 et 0 indiquant ici que les constantes appartiennent respectivement aux couples ($l = 1$, $n = 1$) et ($l = 0$, $n = 1$). Or ces valeurs (63) expliquent très-bien la cause de l'indétermination dont il s'agit. Chaque groupe de termes correspondant à une même constante représente les projections d'un déplacement général qui peut être considéré isolément, et l'on reconnaît facilement que les groupes en A''_1, en C''_1, en A''_0 indiquent de simples translations du solide, parallèles respectivement aux trois axes définis plus haut, tandis que les groupes en A'_1, en C'_1, en A'_0 indiquent de simples rotations autour des mêmes axes. Or on sait, et il est d'ailleurs évident, que des déplacements de cette nature ne font naître aucune force élastique; ces termes ne devaient donc laisser aucune trace dans les six équations à la surface, et leurs constantes rester indéterminées. On pourra, d'ailleurs, disposer de ces constantes de telle sorte, qu'à certains points de l'enveloppe solide correspondent des déplacements ou nuls, ou donnés. Nous regardons cette explication, si simple et si naturelle, des anomalies offertes par les termes où $n = 1$, comme une vérification de la théorie exposée dans le Mémoire actuel.

Quand $n = 0$, le tableau (38) présente aussi des circonstances particulières : les constantes (A'', C'') disparaissent de la première des trois cases, et dans les deux autres (B, D), (B', D') ont pour facteur l'infini. Mais, quand $n = 0$, le nombre l ne peut être que zéro, la fonction P (16) se réduit à l'unité et sa dérivée à zéro. Les séries Φ_1, Ψ_1 (39) et, par suite, les deux dernières équations (40) n'ont donc pas de termes correspondants à $n = 0$; et il en est de même des séries V, W (34). Alors les deux dernières cases du tableau (38) n'existent pas, et la première case se réduit à sa première équation. De plus, la constante B est nécessairement nulle, car elle donnerait un terme entièrement constant pour U [d'après G (33)], lequel, n'étant associé à aucun terme de V et de W, ne pourrait à lui seul vérifier les équations générales. De là résulte, enfin, que pour $n = 0$ le tableau (38) se réduit à

$$\frac{\mu}{3a} A + \frac{4\mu}{r^3} B'' = K^{(0,0)},$$

et faisant successivement $r = r_1$, et $r = r_0$, recourant à la première formule (46), on a

$$\frac{\mu b}{3a} A + \frac{4\mu}{r_1^3} B'' = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \mathfrak{N}_1 \, d\alpha, \quad \frac{\mu b}{3\alpha} A + \frac{4\mu}{r_0^3} B'' = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \mathfrak{N}_0 \, d\alpha$$

pour déterminer les seules constantes A et B″ qui correspondent au groupe $(l = 0, n = 0)$; car la constante A″ n'existe nulle part, pas même dans U, puisqu'elle disparaît aussi de G (33) lorsque $n = 0$; ce qui n'ajoute aucun nouveau terme au groupe (63).

Là se termine la solution du problème proposé lorsque l'on fait abstraction des (R_0, Φ_0, Ψ_0). Mais quand on tient compte de ces forces, il en résulte les modifications suivantes. Les valeurs générales (34) comprennent alors les intégrales particulières (U_0, V_0, W_0) définies au

§ II, et qui sont des fonctions connues. Si l'on désigne par $(\mathcal{R}, \mathcal{F}, \Pi)$ les valeurs que prennent les composantes (R_1, Φ_1, Ψ_1) (3), quand on y substitue ces intégrales particulières au lieu de (U, V, W), il faut ajouter ces valeurs aux seconds membres des équations (39) et, dans les équations à la surface (40), ainsi que dans les intégrales doubles (46) et (53), remplacer les $(\mathfrak{N}_i, \mathfrak{M}_i, \mathfrak{E}_i)$ par $(\mathfrak{N}_i - \mathcal{R}_i, \mathfrak{M}_i - \mathcal{F}_i, \mathfrak{E}_i - \Pi_i)$. Le reste de la solution s'achève et se discute de la même manière.

Alors les équations de condition (61) et (62) expriment que l'enveloppe sphérique, considérée comme un système invariable, doit être en équilibre sous l'action des efforts qui sollicitent les parois et des forces agissant sur la masse. C'est ainsi que, dans le cas de la pesanteur ou des valeurs (5), les efforts extérieurs doivent faire équilibre au poids de l'enveloppe. Mais s'il s'agit de la force centrifuge ou des valeurs (6), de l'attraction centrale ou des valeurs (7), les équations de condition (61) et (62) doivent être indépendantes de ces forces, qui s'équilibrent d'elles-mêmes sur le solide; et, en effet, on s'assure que, dans ces deux cas, les $(\mathcal{R}_i, \mathcal{F}_i, \Pi_i)$ n'entrent pas dans les coefficients des termes correspondants à $n = 1$, et qui seuls composent les équations de condition.