JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

WEIERSTRASS

Sur la théorie des fonctions abéliennes

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 19 (1854), p. 257-278.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1854_1_19__257_0>

SUR

LA THÉORIE DES FONCTIONS ABÉLIENNES[*];

PAR M. LE D^r WEIERSTRASS,
Professeur de Mathématiques au Collége de Braunsberg (Prusse orientale).

M'étant occupé depuis plusieurs années de la théorie des *transcendantes abéliennes*, je suis arrivé à des résultats qui ne paraissent pas être indignes de l'attention des géomètres, et que je me propose de développer dans une suite de Mémoires. Le premier de ces Mémoires, dont la rédaction est déjà complétement achevée, aura pour objet principal le problème de représenter explicitement les fonctions périodiques de plusieurs arguments, dont les propriétés fondamentales se trouvent énoncées, ainsi que M. Jacobi l'a démontré le premier, dans le théorème d'Abel sur les *intégrales hyper-elliptiques* : problème résolu d'une manière brillante par MM. Gœpel et Rosenhain pour les fonctions de *deux* arguments, mais qui sera traité ici dans toute sa généralité. Je me servirai pour cette discussion d'une méthode tout à fait différente de celle des deux géomètres cités, et je puis dire de plus dès à présent que cette méthode fait espérer des résultats analogues pour des transcendantes plus élevées encore. Les feuilles suivantes présentent un aperçu succinct de mon travail.

§ I.

Je donne au système d'équations intégrales, qui doit servir, d'après M. Jacobi, de point de départ à la théorie des transcendantes abéliennes, la forme suivante que j'ai reconnue comme la plus simple et la plus appropriée à la discussion.

[*] Tiré du *Journal de M. Crelle*, vol. XLVII, et traduit de l'allemand par M. *Woepcke*.

Soit

$$R(x) = (x - a_0)(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_{2n})$$

une fonction entière de degré $2n + 1$; je suppose, en premier lieu, que les quantités $a_0, a_1, \ldots, a_{2n}$ sont toutes *réelles*, et arrangées de telle sorte que

$$a_0 > a_1 > a_2 > \ldots > a_{2n}.$$

Décomposons $R(x)$ dans les deux facteurs

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_3)\ldots(x - a_{2n-1})$$

et

$$Q(x) = (x - a_0)(x - a_2)\ldots(x - a_{2n});$$

puis, en considérant $u_1, u_2, \ldots, u_n$ comme des variables illimitées, et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ comme des fonctions de ces quantités, représentons les relations qui existent entre ces $2n$ variables par les n équations suivantes :

$$(1)\quad \begin{cases} u_1 = \int_{a_1}^{x_1} \frac{P(x)}{x - a_1} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} + \int_{a_3}^{x_2} \frac{P(x)}{x - a_1} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} + \ldots \\ \qquad + \int_{a_{2n-1}}^{x_n} \frac{P(x)}{x - a_1} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}, \\ u_2 = \int_{a_1}^{x_1} \frac{P(x)}{x - a_3} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} + \int_{a_3}^{x_2} \frac{P(x)}{x - a_3} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} + \ldots \\ \qquad + \int_{a_{2n-1}}^{x_n} \frac{P(x)}{x - a_3} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n = \int_{a_1}^{x_1} \frac{P(x)}{x - a_{2n-1}} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} + \int_{a_3}^{x_2} \frac{P(x)}{x - a_{2n-1}} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} + \ldots \\ \qquad + \int_{a_{2n-1}}^{x_n} \frac{P(x)}{x - a_{2n-1}} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}. \end{cases}$$

Maintenant je démontre d'une manière détaillée, en m'appuyant sur le théorème d'Abel, le théorème énoncé déjà essentiellement par M. Jacobi, et que je considère comme la base de toute cette théorie; savoir, qu'à des valeurs données de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, il correspond un nombre infini de valeurs différentes des quantités $u_1, u_2, \ldots, u_n$, mais que si $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont données, les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ainsi que les valeurs correspondantes de $\sqrt{R(x_1)}, \sqrt{R(x_2)}, \ldots, \sqrt{R(x_n)}$, sont complétement déterminées. *En effet, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les racines d'une équation de degré n, dont les coefficients sont des fonctions complétement déterminées et à sens unique des variables illimitées $u_1, u_2, \ldots, u_n$, tandis qu'une seconde fonction entière de x, dont les coefficients sont des fonctions semblables de $u_1, u_2, \ldots, u_n$, donne pour $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$ les valeurs correspondantes de $\sqrt{R(x_1)}, \sqrt{R(x_2)}, \ldots, \sqrt{R(x_n)}$.*

D'après cela, toute fonction symétrique et rationnelle de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ peut être considérée comme une fonction à sens unique de $u_1, u_2, \ldots, u_n$. On trouve, en particulier, que

$$(a_\alpha - x_1)(a_\alpha - x_2)\ldots(a_\alpha - x_n)$$

(où α désigne un des nombres $0, 1, \ldots, 2n$) est le *carré* d'une telle fonction. Conséquemment, en exprimant le plus grand nombre contenu dans $\frac{1}{2}\alpha$ par $\overline{\alpha}$, et en posant

$$(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) = L(x),$$

je désigne

$$(2) \qquad \frac{\sqrt{\left[(-1)^{\overline{\alpha}} L(a_\alpha)\right]}}{\sqrt[4]{\left[(-1)^{\overline{\alpha}} R'(a_\alpha)\right]}} \quad \text{par} \quad \mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots, u_n)_\alpha,$$

et j'appelle les $2n+1$ quantités $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_0$, $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_1$, etc., ainsi définies, *fonctions abéliennes*, attendu que ce sont elles qui correspondent parfaitement aux *fonctions elliptiques* $\sin\mathrm{am}\, u$, $\cos\mathrm{am}\, u$, $\Delta\,\mathrm{am}\, u$. Les séries développées suivant les puissances de $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ont la forme suivante :

$$(3) \quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_{2\mathfrak{a}-1} \\ = \sqrt[4]{\left[\dfrac{-Q(a_{2\mathfrak{a}-1})}{P'(a_{2\mathfrak{a}-1})}\right]} \cdot \left[u_\mathfrak{a} + (u_1, u_2, \ldots)_3 + (u_1, u_2, \ldots)_5 + \ldots\right], \end{array}\right.$$

$$(4) \quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_{2\mathfrak{b}} \\ = \sqrt[4]{\left[\dfrac{P(a_{2\mathfrak{b}})}{Q'(a_{2\mathfrak{b}})}\right]} \cdot \left[1 + (u_1, u_2, \ldots)_2 + (u_1, u_2, \ldots)_4 + \ldots\right]. \end{array}\right.$$

Dans ces formules, $\mathfrak{a}$ désigne un quelconque des nombres $1, 2, \ldots, n$; $\mathfrak{b}$ un quelconque des nombres $0, 1, \ldots, n$; et $(u_1, u_2, \ldots)_\alpha$ une fonction entière et homogène de degré α. Je fais observer qu'en général, dans ce qui suit, $\mathfrak{a}$, c et $\mathfrak{a}'$, c' désigneront un des nombres $1, 2, \ldots, n$; tandis que $\mathfrak{b}$ désignera un des nombres $0, 1, \ldots, n$. Il faut observer, en outre, que partout où il se présentera la racine (deuxième ou quatrième) d'une expression *positive* composée par multiplication et division des différences $a_0 - a_1, a_0 - a_2, \ldots, a_1 - a_2, a_1 - a_3, \ldots$, on devra toujours prendre la valeur *positive* de cette racine.

Les séries ci-dessus ne peuvent pas être *convergentes* pour *toutes* les valeurs de $u_1, u_2, \ldots$. Cependant, ce sont elles que je prends pour point de départ, en définissant d'abord les fonctions $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha$ seulement pour des valeurs de $u_1, u_2, \ldots$, qui rendent toutes les séries proposées convergentes. Ensuite, je développe la propriété principale des fonctions ainsi définies; savoir, que si $u_1, u_2, \ldots$ sont remplacés par des quantités composées de deux éléments $u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots$, les valeurs de ces fonctions s'expriment *rationnellement* par $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_0$, $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_1, \ldots$, $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_{2n}$; $\mathrm{al}(v_1, v_2, \ldots)_0$, $\mathrm{al}(v_1, v_2, \ldots)_1, \ldots$, $\mathrm{al}(v_1, v_2, \ldots)_{2n}$, et par les dérivées partielles du premier ordre de ces quantités. Puis je démontre, au moyen des formules ainsi trouvées, qu'il y a des fonctions de $u_1, u_2, \ldots$ à sens unique existant pour *toutes* les valeurs de $u_1, u_2, \ldots$ qui s'identifient avec les fonctions représentées par les séries ci-dessus pour les valeurs de $u_1, u_2, \ldots$, qui les rendent *convergentes*, et que je désigne, à partir de là, par les notations $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_0$, $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_1, \ldots$. Cela posé, les quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$, qui satisfont aux équations (1) pour des valeurs quelconques de $u_1, u_2, \ldots, u_n$, seront les n racines de l'équation suivante :

$$(5)\qquad \frac{e_1^2\,\mathrm{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_1}{a_1 - x} + \frac{e_3^2\,\mathrm{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_3}{a_3 - x} + \ldots + \frac{e_{2n-1}^2\,\mathrm{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_{2n-1}}{a_{2n-1} - x} = 1,$$

où

$$\sqrt[4]{\left[\frac{-Q(a_{2\mathfrak{a}-1})}{P'(a_{2\mathfrak{a}-1})}\right]} = e_{2\mathfrak{a}-1}.$$

En outre, on a

$$(6)\quad\left\{\begin{aligned}&\sqrt{R(x_{\mathfrak{a}})}\\&=\frac{a_{2c-1}-x_{\mathfrak{a}}}{e_{2c-1}^2\,\mathrm{al}^2(u_1,u_2,\ldots)_{2c-1}}\cdot\sum_{\mathfrak{a}=1,2,\ldots,n}\left[\frac{e_{2\mathfrak{a}-1}^2\,P(x_{\mathfrak{a}})\,\mathrm{al}(u_1,u_2,\ldots)_{2\mathfrak{a}-1}}{a_{2\mathfrak{a}-1}-x_{\mathfrak{a}}}\cdot\frac{d\,\mathrm{al}(u_1,u_2,\ldots)_{2\mathfrak{a}-1}}{du_c}\right],\end{aligned}\right.$$

où c désigne un quelconque des nombres $1, 2,\ldots, n$.

Au reste, on peut proposer, en place des formules (5) et (6), d'autres très-semblables, dans lesquelles figurent n quelconques des fonctions $\mathrm{al}(u_1, u_2,\ldots)_0$, $\mathrm{al}(u_1, u_2,\ldots)_1,\ldots$. En exprimant par x_1, $x_2,\ldots, x_n$ les différentielles de ces fonctions, on trouve l'occasion d'introduire encore une série d'autres fonctions, représentées par la formule

$$(7)\quad\left\{\begin{aligned}&\mathrm{al}(u_1,u_2,\ldots)_{\alpha,\beta}\\&=\sqrt{[\pm(a_\alpha-a_\beta)]}\,.\,\mathrm{al}(u_1,u_2,\ldots)_\alpha\,\mathrm{al}(u_1,u_2,\ldots)_\beta\cdot\sum\left[\frac{\sqrt{R(x_{\mathfrak{a}})}}{(x_{\mathfrak{a}}-a_\alpha)(x_{\mathfrak{a}}-a_\beta)L'(x_{\mathfrak{a}})}\right],\end{aligned}\right.$$

où l'on prendra le signe supérieur ou inférieur de $(a_\alpha - a_\beta)$ suivant que $\alpha < \beta$ ou $\alpha > \beta$, α et β désignant deux nombres différents de la suite $0, 1, 2,\ldots, 2n$. On aura alors

$$(8)\quad\frac{d\,\mathrm{al}(u_1,u_2,\ldots)_\alpha}{du_{\mathfrak{a}}}=-\frac{e_{2\mathfrak{a}-1}^2}{\sqrt{\pm[(a_\alpha-a_{2\mathfrak{a}-1})]}}\cdot\mathrm{al}(u_1,u_2,\ldots)_{2\mathfrak{a}-1}\,\mathrm{al}(u_1,u_2,\ldots)_{\alpha,2\mathfrak{a}-1},$$

en supposant $\alpha \gtrless 2\mathfrak{a} - 1$. De cette équation, il suit la relation remarquable que voici :

$$(9)\qquad e_{2\mathfrak{a}-1}^2\frac{d\,\mathrm{al}^2(u_1,u_2,\ldots)_{2\mathfrak{a}-1}}{du_c}=e_{2c-1}^2\frac{d\,\mathrm{al}^2(u_1,u_2,\ldots)_{2c-1}}{du_{\mathfrak{a}}}.$$

Entre les fonctions $\mathrm{al}(u_1, u_2,\ldots)_\alpha$ et $\mathrm{al}(u_1, u_2,\ldots)_{\alpha,\beta}$ il existe des relations nombreuses. Les suivantes me paraissent particulièrement dignes d'être remarquées :

$$(10)\qquad\frac{\mathrm{al}^2(u_1,u_2,\ldots)_{2\mathfrak{b}}}{e_{2\mathfrak{b}}^2}=1-\sum_{\mathfrak{a}=1,\ldots,n}\left[\frac{e_{2\mathfrak{a}-1}^2\,\mathrm{al}^2(u_1,u_2,\ldots)_{2\mathfrak{a}-1}}{a_{2\mathfrak{b}}-a_{2\mathfrak{a}-1}}\right],$$

$$(11)\quad\left\{\begin{aligned}&\pm\frac{\mathrm{al}^2(u_1,u_2,\ldots)_{2\mathfrak{b},2c-1}}{e_{2\mathfrak{b}-1}^2}=\mathrm{al}^2(u_1,u_2,\ldots)_{2c-1}+\frac{e_{2c-1}^2}{a_{2\mathfrak{b}}-a_{2c-1}}\\&+\sum_{\mathfrak{a}=1,\ldots,c-1}\left[\frac{e_{2\mathfrak{a}-1}^2\,\mathrm{al}^2(u_1,u_2,\ldots)_{2\mathfrak{a}-1,2c-1}}{a_{2\mathfrak{b}}-a_{2\mathfrak{a}-1}}\right]-\sum_{\mathfrak{a}=c+1,\ldots,n}\left[\frac{e_{2\mathfrak{a}-1}^2\,\mathrm{al}^2(u_1,u_2,\ldots)_{2\mathfrak{a}-1,2c-1}}{a_{2\mathfrak{b}}-a_{2\mathfrak{a}-1}}\right].\end{aligned}\right.$$

Dans cette dernière équation, on prendra le signe supérieur ou inférieur suivant que $2c - 1$ est plus petit ou plus grand que $2b$. Au moyen des équations (8 à 11), on peut aussi établir une relation algébrique entre chacune des $(2n+1)n$ dérivées du premier ordre des fonctions $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha$ et n de ces dernières fonctions.

§ II.

Maintenant j'introduis les quantités analogues aux intégrales elliptiques complètes *de première espèce*. Si x est réel et compris entre les limites $a_{\alpha-1}$ et a_α, on a

$$\mathrm{R}(x) = (-1)^\alpha (a_0 - x) \ldots (a_{\alpha-1} - x)(x - a_\alpha) \ldots (x - a_{2n}),$$

et, conséquemment, on peut poser

$$\sqrt{\mathrm{R}(x)} = \pm i^\alpha \sqrt{(a_0 - x)} \ldots \sqrt{(a_{\alpha-1} - x)} \cdot \sqrt{(x - a_\alpha)} \ldots \sqrt{(x - a_{2n})},$$

où les racines du second membre sont toutes positives.

En outre, on a, si x est compris entre $+\infty$ et a_0,

$$\sqrt{\mathrm{R}(x)} = \pm \sqrt{(x - a_0)} \ldots \sqrt{(x - a_{2n})},$$

et, si x est compris entre a_{2n} et $-\infty$,

$$\sqrt{\mathrm{R}(x)} = \pm i^{2n+1} \sqrt{(a_0 - x)} \ldots \sqrt{(a_{2n} - x)}.$$

En représentant par a et b deux quantités réelles et par $\mathrm{F}(x)$ une fonction rationnelle de x, je désigne par

$$\overline{\int_a^b} \frac{\mathrm{F}(x)\,dx}{\sqrt{\mathrm{R}(x)}}$$

la valeur particulière que prend la formule

$$\int_a^b \frac{\mathrm{F}(x)\,dx}{\sqrt{\mathrm{R}(x)}}$$

si l'on détermine, en intégrant, $\sqrt{\mathrm{R}(x)}$ au moyen des formules ci-dessus, en employant le signe *supérieur*. Cela posé, désignons

$$\overline{\int_{a_\alpha}^{\infty}} \frac{\mathrm{P}(x)\,dx}{2(x - a_{2\mathfrak{a}-1})\sqrt{\mathrm{R}(x)}} \quad \text{par} \quad \overset{a}{\mathrm{K}}_{\mathfrak{a}},$$

on aura la relation

$$(12)\qquad \overset{0}{\mathrm{K}}_{a} - \overset{1}{\mathrm{K}}_{a} + \overset{2}{\mathrm{K}}_{a} - \ldots + \overset{2a}{\mathrm{K}}_{a} = 0, \quad \text{pour} \quad a = 1, 2, \ldots, n.$$

Qu'il soit, en outre,

$$(13)\qquad \mathrm{K}_{a,c} = \overset{2c-1}{\mathrm{K}}_{a} - \overset{2c}{\mathrm{K}}_{a} = \int_{a_{2c-1}}^{a_{2c}} \frac{\mathrm{P}(x)\,dx}{2(x-a_{2a-1})\sqrt{\mathrm{R}(x)}} = -\int_{a_{2c-1}}^{a_{2c}} \sqrt{\left[\frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)}\right]}\cdot\frac{dx}{a_{2a-1}-x},$$

$$i\overline{\mathrm{K}}_{a,c} = \overset{2c-2}{\mathrm{K}}_{a} - \overset{2c-1}{\mathrm{K}}_{a} = \int_{a_{2c-2}}^{a_{2c-1}} \frac{\mathrm{P}(x)\,dx}{2(x-a_{2a-1})\sqrt{\mathrm{R}(x)}},$$

donc

$$(14)\qquad \overline{\mathrm{K}}_{a,c} = -\int_{a_{2c-2}}^{a_{2c-1}} \sqrt{\left[\frac{-\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)}\right]}\,\frac{dx}{x-a_{2a-1}},$$

où l'on prendra la valeur positive de $\sqrt{\left[\frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)}\right]}$ dans la première intégration et la valeur positive de $\sqrt{\left[\frac{-\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)}\right]}$ dans la seconde. On obtiendra

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned}
\overset{0}{\mathrm{K}}_{a} &= \mathrm{K}_{a,1} + \mathrm{K}_{a,2} + \ldots + \mathrm{K}_{a,n},\\
\overset{1}{\mathrm{K}}_{a} &= \mathrm{K}_{a,1} + \mathrm{K}_{a,2} + \ldots + \mathrm{K}_{a,n} - i\overline{\mathrm{K}}_{a,1},\\
\overset{2}{\mathrm{K}}_{a} &= \mathrm{K}_{a,2} + \mathrm{K}_{a,3} + \ldots + \mathrm{K}_{a,n} - i\overline{\mathrm{K}}_{a,1},\\
\overset{3}{\mathrm{K}}_{a} &= \mathrm{K}_{a,2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \mathrm{K}_{a,n} - i\overline{\mathrm{K}}_{a,1} - i\overline{\mathrm{K}}_{a,2},\\
\overset{4}{\mathrm{K}}_{a} &= \mathrm{K}_{a,3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \mathrm{K}_{a,n} - i\overline{\mathrm{K}}_{a,1} - i\overline{\mathrm{K}}_{a,2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\overset{2n}{\mathrm{K}}_{a} &= -i\overline{\mathrm{K}}_{a,1} - i\overline{\mathrm{K}}_{a,2} - \ldots - i\overline{\mathrm{K}}_{a,n}.
\end{aligned}\right.$$

Un cas particulier du théorème d'Abel conduit ensuite aux formules suivantes, dans lesquelles α, β, γ désignent des nombres de la suite 0, 1, 2,..., $2n$, et où le symbole $\alpha|\beta$ représente 0 si $\alpha < \beta$, et 1 si $\alpha > \beta$:

$$(16)\qquad \mathrm{al}(u_1 + \overset{\alpha}{\mathrm{K}}_{1}, \ldots)_{\alpha} = \frac{i^{\alpha-2\overline{\alpha}}}{\mathrm{al}(u_1,\ldots)_{\alpha}}, \qquad \mathrm{al}(u_1 - \overset{\alpha}{\mathrm{K}}_{1}, \ldots)_{\alpha} = \frac{i^{\alpha-2\overline{\alpha}}}{\mathrm{al}(u_1,\ldots)_{\alpha}},$$

$$(17)\qquad \mathrm{al}(u_1 + \overset{\beta}{\mathrm{K}}_{1}, \ldots)_{\alpha} = \frac{i^{\beta|\alpha}\,\mathrm{al}(u_1,\ldots)_{\alpha,\beta}}{\mathrm{al}(u_1,\ldots)_{\beta}}, \quad \mathrm{al}(u_1 - \overset{\beta}{\mathrm{K}}_{1}, \ldots)_{\alpha} = \frac{-i^{\beta|\alpha}\,\mathrm{al}(u_1,\ldots)_{\alpha,\beta}}{\mathrm{al}(u_1,\ldots)_{\beta}}.$$

De ces relations, on déduit

$$(18)\qquad \begin{cases} \mathrm{al}\,(u_1 + 2\overset{\alpha}{\mathrm{K}}_1,\ldots)_\alpha = +\,\mathrm{al}\,(u_1,\ldots)_\alpha, \\ \mathrm{al}\,(u_1 + 2\overset{\beta}{\mathrm{K}}_1,\ldots)_\alpha = -\,\mathrm{al}\,(u_1,\ldots)_\alpha, \ \text{si}\ \beta \gtrless \alpha, \end{cases}$$

et, en posant

$$\mathrm{K}_a = \mu_0 \overset{0}{\mathrm{K}}_a + \mu_1 \overset{1}{\mathrm{K}}_a + \ldots + \mu_{2n} \overset{2n}{\mathrm{K}}_a,$$
$$\mu = \mu_0 + \mu_1 + \ldots + \mu_{2n},$$

où μ_0, μ_1,... désignent des nombres entiers quelconques,

$$(19)\qquad \mathrm{al}\,(u_1\, 2\mathrm{K}_1,\ldots)_\alpha = (-1)^{\mu - \mu_\alpha}\,\mathrm{al}\,(u_1,\ldots)_\alpha.$$

Maintenant, posons

$$(20)\qquad \mathrm{K}'_{a,c} = \overline{\mathrm{K}}_{a,1} + \overline{\mathrm{K}}_{a,2} + \ldots + \overline{\mathrm{K}}_{a,c}$$

et

$$(21)\qquad \begin{cases} \omega_a = \mathfrak{m}_1 \mathrm{K}_{a,1} + \mathfrak{m}_2 \mathrm{K}_{a,2} + \ldots + \mathfrak{m}_n \mathrm{K}_{a,n}, \\ \omega'_a = \mathfrak{n}_1 \mathrm{K}'_{a,1} + \mathfrak{n}_2 \mathrm{K}'_{a,2} + \ldots + \mathfrak{n}_n \mathrm{K}'_{a,n}, \end{cases}$$

(où $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$,..., $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_2$,... désignent également des nombres entiers quelconques), on obtiendra les formules

$$(22)\qquad \mathrm{al}\,(u_1 + 2\omega_1,\ldots)_\alpha = (-1)^{\mathfrak{m}_\alpha - \bar{\alpha}}\,\mathrm{al}\,(u_1,\ldots)_\alpha,$$

où, pour $\alpha = 0$, il faut prendre $\mathfrak{m}_0 = 0$, et

$$(23)\qquad \mathrm{al}\,(u_1 + 2\omega'_1\, i,\ldots)_\alpha = (-1)^{\mathfrak{n}_n + \mathfrak{n}_{n-1} + \ldots + \mathfrak{n}_{\bar{\alpha}+1}}\,\mathrm{al}\,(u_1,\ldots)_\alpha,$$

où, pour $\alpha = 2n$, il faut égaler le facteur de $\mathrm{al}\,(u_1,\ldots)_{2n}$ à 1. Au moyen de la formule (17) on obtient des relations semblables pour les fonctions $\mathrm{al}\,(u_1, u_2,\ldots)_{\alpha,\beta}$.

§ III.

Les fonctions $\mathrm{al}\,(u_1, u_2,\ldots)_\alpha$ présentent la particularité qu'elles deviennent toutes infinies pour les mêmes valeurs de u_1, u_2,.... En outre, je fais voir, en démontrant le théorème principal énoncé dans le § Ier, que (si l'on renferme les valeurs absolues de u_1, u_2, etc., entre des limites déterminées, aussi larges d'ailleurs qu'on voudra, mais qu'elles ne pourront pas dépasser) chacune de ces fonctions peut être représentée comme le quotient de deux séries ordonnées suivant les puissances entières et positives de u_1, u_2, etc., et *convergentes* pour toutes les valeurs de ces variables comprises entre les limites proposées. Cela donne lieu à supposer que les fonctions $\mathrm{al}\,(u_1,\ldots)_0$, $\mathrm{al}\,(u_1,\ldots)_1$, etc., peuvent être représentées comme des fractions ayant un dénominateur commun, et dont les numérateurs, de même que ce dénominateur, sont des fonctions de u_1, u_2,... qui ne deviennent jamais infinies, et qui sont développables en séries ordonnées suivant les puissances entières et positives de leurs arguments et *constamment* convergentes. Si l'on peut réellement poser $\mathrm{al}\,(u_1,\ldots)_\alpha = \frac{p_\alpha}{p}$ (en désignant par p, p_α des fonctions de l'espèce que nous venons de dire), $d \log \mathrm{al}\,(u_1,\ldots)_\alpha$ devra être composé de deux parties, dont l'une devient infinie pour toutes les valeurs de u_1, u_2, etc., qui font $\mathrm{al}\,(u_1, u_2,\ldots)_\alpha = 0$, et l'autre pour toutes celles qui rendent $\mathrm{al}\,(u_1,\ldots)_\alpha$ infini. La même chose a lieu pour les différentielles logarithmiques d'ordres supérieurs de $\mathrm{al}\,(u_1, u_2,\ldots)_\alpha$. Supposant qu'il soit $d^\mu \log \mathrm{al}\,(u_1,\ldots)_\alpha = \mathrm{P}_\alpha - \mathrm{P}$, où $\mathrm{P}_\alpha = \infty$ pour $\mathrm{al}\,(u_1,\ldots)_\alpha = 0$, et $\mathrm{P} = \infty$ pour $\mathrm{al}\,(u_1,\ldots)_\alpha = \infty$, on pourra poser $d^\mu \log p_\alpha = \mathrm{P}_\alpha$, $d^\mu \log p = \mathrm{P}$; et comme P_α, P sont exprimables en $\mathrm{al}\,(u_1,\ldots)_0$, $\mathrm{al}\,(u_1,\ldots)_1$, etc., donc aussi en $p_0, p_1,\ldots, p_{2n}, p$, on devra arriver de cette manière à $2n+2$ équations différentielles entre ces $2n+2$ quantités.

Pour les fonctions *elliptiques* ce calcul est très-facile. Car si $x = \sin \mathrm{am}\, u$, on a

$$\frac{d^2 \log x}{du^2} = k^2 x^2 - \frac{1}{x^2}.$$

Posant

$$x = \frac{p_1}{p},$$

il vient

$$\frac{d^2 \log p_1}{du^2} - \frac{d^2 \log p}{du^2} = k^2 \cdot \frac{p_1^2}{p^2} - \frac{p^2}{p_1^2}.$$

On décomposera cette équation dans les deux suivantes :

$$\frac{d^2 \log p_1}{du^2} = -\frac{p^2}{p_1^2}, \quad \frac{d^2 \log p}{du^2} = -k^2 \frac{p_1^2}{p^2}.$$

Après avoir montré que, si la valeur absolue de u ne dépasse pas une limite prise à volonté, sin am u peut être représenté comme le quotient de deux séries développées suivant les puissances entières de u et convergentes pour toutes les valeurs de u inférieures à cette limite, on peut démontrer rigoureusement (ainsi que je l'ai fait dans mon Mémoire) que les fonctions p, p_1, définies par les deux équations différentielles ci-dessus, peuvent être développées en séries ordonnées suivant les puissances entières et positives de u et *constamment convergentes*, c'est-à-dire convergentes pour toutes les valeurs réelles et imaginaires de u. Et en déterminant les quatre constantes arbitraires qu'elles renferment, de manière que, pour $u = 0$,

$$p = 1, \quad \frac{dp}{du} = 0, \quad p_1 = 0, \quad \frac{dp_1}{du} = 1,$$

on trouve effectivement

$$\sin \operatorname{am} u = \frac{p_1}{p}.$$

Il existe des développements analogues pour $\cos \operatorname{am} u$, $\Delta \operatorname{am} u$, et l'on arrive, de cette manière, à la représentation des fonctions elliptiques qu'Abel mentionne dans une lettre adressée à M. Legendre (tome VI, page 76 du Journal de M. Crelle), sans l'avoir cependant exécutée et sans indiquer sa méthode. Des fonctions p, p_1 on arrive facilement aux fonctions $\Theta(u)$, $\mathrm{H}(u)$ de M. Jacobi, et l'on peut ainsi exécuter le développement des fonctions elliptiques dans toutes les formes sans le fonder sur les formules de la transformation ou de la multiplication. En général, on peut prendre les équations différentielles ci-dessus en p et p_1 pour base d'une théorie complète des transcendantes elliptiques, ainsi que je l'ai exécuté effectivement dans un Mémoire composé déjà en 1840 et présenté à cette époque à la Commission d'examen de Munster.

Maintenant j'ai essayé un calcul analogue pour $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha$ comme pour p, p_1. A l'aide des formules mentionnées dans le § I^er, au moyen desquelles on peut exprimer $\mathrm{al}(u_1 + v_1, \ldots)_0$, $\mathrm{al}(u_1 + v_1, \ldots)_1$, etc., par les fonctions de $u_1, u_2, \ldots, u_n$ et de $v_1, v_2, \ldots, v_n$, on peut trouver les différentielles secondes des fonctions abéliennes, et l'on obtient $d^2 \log \mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha$ exprimé en $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_0$, $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_1$, etc., et leurs différentielles premières. En employant les relations (8 à 11), on peut ensuite donner à ces expressions la forme sus-mentionnée, et, en posant

$$\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha = \frac{p_\alpha}{p}, \quad \mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\alpha,\beta} = \frac{p_{\alpha,\beta}}{p},$$

on peut trouver un nombre suffisant d'équations différentielles du second ordre pour les quantités p, p_α, $p_{\alpha,\beta}$; enfin, on peut prouver que les fonctions ainsi définies sont développables en séries ordonnées suivant les puissances entières de u_1, u_2, etc., et *constamment* convergentes. De cette manière, je démontrai (vers la fin de l'année 1847) le théorème que je pouvais considérer comme le pas le plus important pour arriver à une représentation des fonctions abéliennes pour toutes les valeurs des arguments u_1, u_2, etc.; savoir, que les fonctions $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha$, $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\alpha,\beta}$ peuvent être représentées sous la forme de fractions ayant un dénominateur commun, et dont les numérateurs et le dénominateur présentent essentiellement le caractère de fonctions *entières*, attendu qu'ils existent pour toutes les valeurs réelles et imaginaires des arguments u_1, u_2, etc., et qu'ils sont développables en séries ordonnées suivant les puissances entières et positives de ces arguments et constamment convergentes. En appliquant aux fonctions auxiliaires ainsi obtenues exactement la même méthode qui m'avait conduit des fonctions sus-mentionnées, au moyen desquelles j'avais exprimé les fonctions elliptiques, aux fonctions Θ, j'arrivai, par un procédé qui n'admet rien d'arbitraire, aux séries aussi simples que remarquables par leur forme, auxquelles, pour $n = 2$, MM. Gœpel et Rosenhain avaient ramené, avant moi, les fonctions abéliennes de *deux* arguments.

Cependant les calculs nécessaires pour obtenir les résultats que je viens d'exposer ne laissent pas d'être assez compliqués. C'est pourquoi j'essayai, en poursuivant toujours la même idée fondamentale, d'arriver au même but d'une manière plus simple. J'y réussis en faisant intervenir dès l'abord dans la discussion les intégrales abéliennes de deuxième et de troisième espèce, et en les exprimant par $u_1, u_2, \ldots, u_n$, d'une manière analogue à ce qu'on fait pour les intégrales elliptiques correspondantes.

Le Mémoire de M. Gœpel parut pendant le temps où j'étais occupé de ces recherches. Ses résultats et sa méthode ne sont pas aussi simples qu'ils pourraient l'être, même en suivant la voie qu'il a adoptée. Quant au travail de M. Rosenhain, qui n'a été publié qu'après l'achèvement du mien, je n'en connais, jusqu'à présent, que les notices publiées dans le Journal de M. Crelle, et extraites de lettres adressées à M. Jacobi. D'après ce que j'ai pu en conclure, ses résultats s'accordent complétement avec les miens trouvés d'une manière tout à fait différente. Mais je ne crois pas qu'on puisse traiter par les méthodes de ces deux géomètres des fonctions abéliennes d'un ordre supérieur au premier. M. Jacobi a fait remarquer que déjà pour $n = 3$ les fonctions Θ généralisées renferment essentiellement plus de constantes que les fonctions abéliennes à trois arguments conjointement. Conséquemment, il doit exister entre ces constantes des équations de condition pour que les séries en question puissent conduire à des fonctions abéliennes. J'ai trouvé, il est vrai, ces relations pour toutes les valeurs de n, mais je doute que cela soit possible *à priori*, si l'on prend pour point de départ les susdites séries, sans faire usage d'une théorie des fonctions abéliennes développée d'après une autre méthode.

§ IV.

Représentant par a une quantité arbitraire, posons

$$(24) \qquad \sum_{\mathfrak{a}} \int_{a_{2\mathfrak{a}-1}}^{x_{\mathfrak{a}}} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)} \frac{P(x)}{x-a} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \mathrm{Sl}(u_1, u_2, ..),$$

en imaginant $x_1, x_2, \ldots, x_n$ exprimés en $u_1, u_2, \ldots, u_n$, et en supposant que pour chaque intégration séparément x parcourt exactement les mêmes valeurs que dans les intégrations des équations (1). Ainsi défini, $\mathrm{Sl}(u_1, u_2, \ldots)$ peut être considéré comme une fonction *logarithmique* de u_1, u_2, etc., c'est-à-dire comme une fonction de la forme

$$\mathrm{A}\log\varphi(u_1, u_2, \ldots) + \varphi_1(u_1, u_2, \ldots),$$

où φ, φ_1 sont des fonctions *à sens unique* de u_1, u_2, etc. Parmi les formules nombreuses relatives à cette fonction, je ne cite que la suivante :

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\,\mathrm{Sl}(u_1, \ldots)}{du_c} \\ &= \tfrac{1}{2}e_{2c-1}\,\mathrm{al}(\overset{c}{w}_1, \ldots)_{2c-1}\,\mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_{2c-1}\left[\mathrm{al}(u_1 + \overset{c}{w}_1, \ldots)_{2c-1} + \mathrm{al}(u_1 - \overset{c}{w}_1, \ldots)_{2c-1}\right] \\ &= \frac{e_{2c-1}^2\sqrt{\mathrm{R}(a)}}{(a - a_{2c-1})\,\mathrm{P}(a)}\cdot\frac{\mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_{2c-1}}{1 - \sum\limits_{\mathfrak{a}}\left[\dfrac{e_{2\mathfrak{a}-1}^2\,\mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_{2\mathfrak{a}-1}}{a_{2\mathfrak{a}-1} - a}\right]}, \end{aligned}\right.$$

où

$$(26)\qquad \overset{c}{w}_{\mathfrak{a}} = \int_{a_{2c-1}}^{a}\frac{\mathrm{P}(x)\,dx}{2(x - a_{2\mathfrak{a}-1})\sqrt{\mathrm{R}(x)}}.$$

La lettre $\mathfrak{a}$ placée sous le signe $\sum$ signifie que dans une formule telle que $\sum\limits_{\mathfrak{a}}\mathrm{A}_{\mathfrak{a}}$ la sommation doit être faite par rapport au nombre entier variable $\mathfrak{a}$ qui parcourra toutes les valeurs depuis 1 jusqu'à n.

Posant maintenant

$$(27)\qquad \frac{\mathrm{P}(a)}{\sqrt{\mathrm{R}(a)}} = b,$$

on pourra, toutes les fois que a se trouve dans le voisinage d'une des valeurs a_1, $a_3, \ldots, a_{2n-1}$, développer $\mathrm{Sl}(u_1, u_2, \ldots)$ suivant les puissances de b, sous la forme que voici :

$$\frac{f(a)}{b} + bf_1(u) + b^3 f_2(u) + \ldots.$$

Pour le cas où a diffère peu de $a_{2\mathfrak{a}-1}$, je désigne le coefficient de b dans ce développement par

$$\mathrm{S\dot{i}l}(u_1, u_2, \ldots)_{\mathfrak{a}},$$

de sorte que l'on trouve

$$(28)\qquad d\,\mathrm{Sl}(u_1, u_2, \ldots)_c = \sum_{\mathfrak{a}} \left[\frac{1}{2} \frac{Q(a_{2c-1})}{P'(a_{2c-1})} \frac{P(x_{\mathfrak{a}})\,dx_{\mathfrak{a}}}{(x_{\mathfrak{a}} - a_{2c-1})^2 \sqrt{R(x_{\mathfrak{a}})}} \right],$$

ou bien

$$(29)\qquad d\,\mathrm{Sl}(u_1, u_2, \ldots)_c = \frac{e_{2c-1}^2\,du_c}{\mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_{2c-1}} + \sum_{\mathfrak{a}}{}' \left[\frac{e_{2c-1}^2\, e_{2\mathfrak{a}-1}^2\, \mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_{2\mathfrak{a}-1}(du_c - du_{\mathfrak{a}})}{(a_{2c-1} - a_{2\mathfrak{a}-1})\,\mathrm{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_{2c-1}} \right],$$

où il faut exclure, dans cette dernière formule, la valeur c de $\mathfrak{a}$.

Ces n quantités nouvelles $\mathrm{Sl}(u_1, u_2, \ldots)_{\mathfrak{a}}$ sont des fonctions *à sens unique* de u_1, u_2, etc., du même genre que $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_0$, etc. On peut ramener à ces fonctions toutes les intégrales abéliennes de seconde espèce, de même qu'à $\mathrm{Sl}(u_1, u_2, \ldots)$ celles de troisième espèce.

Maintenant je désigne l'intégrale définie

$$(30)\qquad \int_{a_\alpha}^{-\infty} \frac{1}{2} \frac{Q(a_{2\mathfrak{a}-1})}{P'(a_{2\mathfrak{a}-1})} \cdot \frac{P(x)}{(x - a_{2\mathfrak{a}-1})^2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} \quad \text{par} \quad \overset{\alpha}{J}_{\mathfrak{a}},$$

et je pose (d'une manière analogue comme ci-dessus pour les quantités $\overset{\alpha}{K}_{\mathfrak{a}}$),

$$(31)\qquad \begin{gathered} J_{\mathfrak{a},c} = \overset{2c-1}{J}_{\mathfrak{a}} - \overset{2c}{J}_{\mathfrak{a}}, \quad i\bar{J}_{\mathfrak{a},c} = \overset{2c-2}{J}_{\mathfrak{a}} - \overset{2c-1}{J}_{\mathfrak{a}}, \\ J'_{\mathfrak{a},c} = \bar{J}_{\mathfrak{a},1} + \bar{J}_{\mathfrak{a},2} + \ldots + \bar{J}_{\mathfrak{a},c}. \end{gathered}$$

Alors la différentielle logarithmique de $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha$ peut être exprimée au moyen des fonctions $\mathrm{Sl}(u_1, \ldots)_{\mathfrak{a}}$ de la manière suivante :

$$(32)\qquad \frac{d\log \mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha}{du_{\mathfrak{a}}} = \overset{\alpha}{J}_{\mathfrak{a}} - \mathrm{Sl}(u_1 + \overset{\alpha}{K}_1 - \overset{2\mathfrak{a}-1}{K}_1, \ldots)_{\mathfrak{a}} + \mathrm{Sl}(u_1 - \overset{2\mathfrak{a}-1}{K}_1, \ldots)_{\mathfrak{a}}.$$

Or on démontre aisément, au moyen de la formule (29), que

$$(33)\qquad \frac{d\,\mathrm{Sl}(u_1 - \overset{2\mathfrak{a}-1}{K}_1, \ldots)_{\mathfrak{a}}}{du_c} = \frac{d\,\mathrm{Sl}(u_1 - \overset{2c-1}{K}_1, \ldots)_c}{du_{\mathfrak{a}}},$$

d'où il suit que l'expression

$$\sum_{\mathfrak{a}} [- \overset{2\mathfrak{a}-1}{J}_{\mathfrak{a}} - \mathrm{Sl}(u_1 - \overset{2\mathfrak{a}-1}{K}_1, \ldots)_{\mathfrak{a}}]\, du_{\mathfrak{a}}$$

est une *différentielle exacte*.

Conséquemment, on peut déterminer une fonction $\mathrm{Al}(u_1, u_2,\dots)$, de telle sorte que

$$(34)\qquad d\log \mathrm{Al}(u_1, u_2,\dots) = -\sum_{\alpha}\Big[\overset{2\alpha-1}{\mathrm{J}_\alpha} + \mathrm{Sl}(u_1 - \overset{2\alpha-1}{\mathrm{K}_1},\dots)\Big]\,du_\alpha,$$

et alors, en posant

$$(34\ bis)\qquad \mathrm{al}(u_1, u_2,\dots)_\alpha = \frac{\mathrm{Al}(u_1, u_2,\dots)_\alpha}{\mathrm{Al}(u_1, u_2,\dots)},$$

on obtient

$$(35)\qquad d\log \mathrm{Al}(u_1, u_2,\dots)_\alpha = -\sum_{\alpha}\Big[\overset{2\alpha-1}{\mathrm{J}_\alpha} - \overset{\alpha}{\mathrm{J}_\alpha} + \mathrm{Sl}(u_1 - \overset{2\alpha-1}{\mathrm{J}_\alpha} + \overset{\alpha}{\mathrm{J}_\alpha},\dots)_\alpha\Big]\,du_\alpha.$$

Si l'on joint à ces équations la condition que, pour $u_1 = 0$, $u_2 = 0,\dots$, $u_n = 0$, il doit être $\mathrm{Al}(u_1,\dots) = 1$, toutes les fonctions auxiliaires définies par ces équations seront complétement déterminées. En les développant en série suivant les puissances de $u_1, u_2,\dots$, on obtient

$$(36)\qquad \begin{cases} \mathrm{Al}(u_1, u_2,\dots) = 1 + (u_1, u_2,\dots)_2 + (u_1, u_2,\dots)_4 + \dots, \\ \mathrm{Al}(u_1, u_2,\dots)_{2\alpha-1} = u_\alpha + (u_1, u_2,\dots)_3 + (u_1, u_2,\dots)_5 + \dots, \\ \mathrm{Al}(u_1, u_2,\dots)_{2b} = 1 + (u_1, u_2,\dots)_2 + (u_1, u_2,\dots)_4 + \dots, \end{cases}$$

et l'on peut démontrer que ces séries sont convergentes pour *toutes* les valeurs de $u_1, u_2,\dots$.

On peut maintenant ramener $\mathrm{Sl}(u_1,\dots)$ et $\mathrm{Sl}(u_1,\dots)_\alpha$ à la fonction $\mathrm{Al}(u_1, u_2,\dots)$, car en posant

$$(37)\qquad w_\alpha = \int_a^\infty \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{P}(x)\,dx}{(x - a_{2\alpha-1})\sqrt{\mathrm{R}(x)}}$$

et

$$(38)\qquad \frac{d\log \mathrm{Al}(u_1, u_2,\dots)}{du_\alpha} = \overset{\alpha}{\mathrm{A}}\mathrm{l}(u_1, u_2,\dots),$$

on obtient

$$(36)\qquad \mathrm{Sl}(u_1, u_2,\dots) = -\sum_{\alpha} u_\alpha \overset{\alpha}{\mathrm{A}}\mathrm{l}(w_1,\dots) + \frac{1}{2}\log\frac{\mathrm{Al}(u_1 + w_1,\dots)}{\mathrm{Al}(u_1 - w_1,\dots)}.$$

De là on peut déduire encore une formule qui, pour $n = 1$, est très-utile dans la théorie des fonctions elliptiques, et notamment dans les applications de ces fonctions, savoir :

$$(40)\qquad e^{\sum\limits_{\alpha}\int_{a_{2\alpha-1}}^{x_\alpha}\frac{1}{2}\left[1+\frac{P(x)}{P(a)}\cdot\frac{\sqrt{R(a)}}{\sqrt{R(x)}}\right]\frac{dx}{x-a}} = e^{-\sum\limits_{\alpha} u_\alpha \overset{\alpha}{\mathrm{Al}}(w_1,\ldots)}\cdot\frac{\mathrm{Al}(u_1+w_1,\ldots)}{\mathrm{Al}(w_1,\ldots)\,\mathrm{Al}(u_1,\ldots)}.$$

Pour $n=1$ cette relation sert, par exemple, à obtenir facilement les formules au moyen desquelles M. Jacobi a représenté le mouvement de rotation d'un corps solide.

§ V.

Pour représenter effectivement les fonctions $\mathrm{Al}(u_1,\ldots)$, $\mathrm{Al}(u_1,\ldots)_\alpha$, je procède maintenant de la manière suivante.

Je développe en premier lieu la relation

$$(41)\qquad \mathrm{Al}(u_2+2\overset{a}{\mathrm{K}}_1,\ldots)=(-1)^\alpha . e^{-2\sum\limits_{\alpha}\overset{\alpha}{\mathrm{J}}_\alpha(u_\alpha+\overset{\alpha}{\mathrm{K}}_\alpha)}.\mathrm{Al}(u_1,\ldots);$$

ensuite, je pose dans cette équation $u_1+2\overset{\beta}{\mathrm{K}}_1$ en place de u_1, etc. Il vient

$$\mathrm{Al}(u_1+2\overset{\alpha}{\mathrm{K}}_1+2\overset{\beta}{\mathrm{K}}_1,\ldots)_\alpha=(-1)^{\alpha+\beta}e^{-2\sum\limits_{\alpha}[(\overset{\alpha}{\mathrm{J}}_\alpha+\overset{\beta}{\mathrm{J}}_\alpha)(u_\alpha+\overset{\alpha}{\mathrm{K}}_\alpha+\overset{\beta}{\mathrm{K}}_\alpha)+\overset{\beta}{\mathrm{K}}_\alpha\overset{\alpha}{\mathrm{J}}_\alpha-\overset{\alpha}{\mathrm{K}}_\alpha\overset{\beta}{\mathrm{J}}_\alpha]}.\mathrm{Al}(u_1,\ldots).$$

En échangeant l'un contre l'autre α et β, on trouve qu'il doit être

$$e^{2\sum\limits_{\alpha}(\overset{\alpha}{\mathrm{K}}_\alpha\overset{\beta}{\mathrm{J}}_\alpha-\overset{\alpha}{\mathrm{J}}_\alpha\overset{\beta}{\mathrm{K}}_\alpha)}=e^{-\sum\limits_{\alpha}(\overset{\alpha}{\mathrm{K}}_\alpha\overset{\beta}{\mathrm{J}}_\alpha-\overset{\alpha}{\mathrm{J}}_\alpha\overset{\beta}{\mathrm{K}}_\alpha)},$$

d'où il suit que

$$\sum_{\alpha}(\overset{\alpha}{\mathrm{K}}_\alpha\overset{\beta}{\mathrm{J}}_\alpha-\overset{\alpha}{\mathrm{J}}_\alpha\overset{\beta}{\mathrm{K}}_\alpha)=\mu\tfrac{1}{2}\pi i,$$

où μ est un nombre entier. En effet, je trouve, au moyen d'une discussion directe des intégrales définies représentées par $\overset{\alpha}{\mathrm{K}}_\alpha$, $\overset{\beta}{\mathrm{K}}_\alpha$, $\overset{\alpha}{\mathrm{J}}_\alpha$, $\overset{\beta}{\mathrm{J}}_\alpha$, que

$$(42)\qquad \sum_{\alpha}(\overset{\alpha}{\mathrm{K}}_\alpha\overset{\beta}{\mathrm{J}}_\alpha-\overset{\alpha}{\mathrm{J}}_\alpha\overset{\beta}{\mathrm{K}}_\alpha)=\begin{cases}+\frac{1}{2}\pi i, & \text{pour } \alpha>\beta,\\ -\frac{1}{2}\pi i, & \text{pour } \alpha<\beta.\end{cases}$$

De cette relation je déduis ensuite les suivantes :

$$(43)\quad \begin{cases} \sum_{\alpha}(K_{\alpha,c}\,J_{\alpha,c'} - J_{\alpha,c}\,K_{\alpha,c'}) = 0, \\ \sum_{\alpha}(K'_{\alpha,c}\,J'_{\alpha,c'} - J'_{\alpha,c}\,K'_{\alpha,c'}) = 0, \\ \sum_{\alpha}(K_{\alpha,c}\,J'_{\alpha,c'} - J_{\alpha,c}\,K'_{\alpha,c'}) = 0, \text{ pour } c' \gtrless c, \\ \sum_{\alpha}(K_{\alpha,c}\,J'_{\alpha,c} - J_{\alpha,c}\,K'_{\alpha,c}) = \frac{1}{2}\pi. \end{cases}$$

Ces relations, qui sont au nombre de $(2n-1)n$, correspondent à l'équation connue de Legendre entre les intégrales elliptiques entières de première et de seconde espèce. J'en ai publié la démonstration dans un Programme (Braunsberg, 1849), et j'ai donné en même temps, dans ce Mémoire, quelques notices préalables sur les résultats que j'avais obtenus relativement à la théorie des fonctions abéliennes. J'annonçai alors que je me proposais de développer ces résultats dans un travail étendu; mais une maladie, qui m'a rendu impossible, pendant plusieurs années, toute espèce de travail, m'a empêché jusqu'à présent d'exécuter ce projet.

Au moyen des relations proposées, on déduit actuellement de l'équation (41) deux équations plus générales; car posons de nouveau

$$\omega_\alpha = \mathfrak{m}_1 K_{\alpha,1} + \mathfrak{m}_2 K_{\alpha,2} + \ldots + \mathfrak{m}_n K_{\alpha,n},$$
$$\omega'_\alpha = \mathfrak{n}_1 K'_{\alpha,1} + \mathfrak{n}_2 K'_{\alpha,2} + \ldots + \mathfrak{n}_n K'_{\alpha,n},$$

et

$$(44)\quad \begin{cases} \varepsilon_\alpha = \mathfrak{m}_1\,J_{\alpha,1} + \mathfrak{m}_2\,J_{\alpha,2} + \ldots + \mathfrak{m}_n\,J_{\alpha,n}, \\ \varepsilon'_\alpha = \mathfrak{n}_1\,J'_{\alpha,1} + \mathfrak{n}_2\,J'_{\alpha,2} + \ldots + \mathfrak{n}_n\,J'_{\alpha,n}, \end{cases}$$

(en désignant par $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots, \mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \ldots$ des nombres entiers quelconques); on aura

$$(45)\quad \begin{cases} \mathrm{Al}(u_1 + 2\omega_1, \ldots) = e^{-2\sum_{\alpha}\varepsilon_\alpha(u_\alpha + \omega_\alpha)} \,.\, \mathrm{Al}(u_1, \ldots); \\ \mathrm{Al}(u_1 + 2\omega'_1 i, \ldots) = e^{-2\sum_{\alpha}\varepsilon'_\alpha(u_\alpha + \omega'_\alpha i)\,i} \,.\, \mathrm{Al}(u_1, \ldots); \end{cases}$$

et, au moyen de l'équation (17), on obtient des formules semblables pour $\mathrm{Al}(u_1, \ldots)_\alpha$.

J'introduis maintenant, en place de $u_1, u_2, \ldots, u_n$, n nouvelles variables, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ au moyen des relations

$$(46) \quad \begin{cases} u_1 = \frac{1}{\pi}(K_{1,1} v_1 + K_{1,2} v_2 + \ldots + K_{1,n} v_n), \\ u_2 = \frac{1}{\pi}(K_{2,1} v_1 + K_{2,2} v_2 + \ldots + K_{2,n} v_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n = \frac{1}{\pi}(K_{n,1} v_1 + K_{n,2} v_2 + \ldots + K_{n,n} v_n). \end{cases}$$

Que les valeurs des v déduites de ces relations soient :

$$(47) \quad \begin{cases} v_1 = (G_{1,1} u_1 + G_{2,1} u_2 + \ldots + G_{n,1} u_n)\pi, \\ v_2 = (G_{1,2} u_1 + G_{2,2} u_2 + \ldots + G_{n,2} u_n)\pi, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n = (G_{1,n} u_1 + G_{2,n} u_2 + \ldots + G_{n,n} u_n)\pi. \end{cases}$$

Je tire ensuite des équations (43) les suivantes :

$$(48) \quad \sum_c G_{\alpha,c} J_{\alpha',c} = \sum_c G_{\alpha',c} J_{\alpha,c},$$

$$(49) \quad \sum_\alpha G_{\alpha,c} K'_{\alpha,c'} = \sum_\alpha G_{\alpha,c'} K'_{\alpha,c},$$

de sorte que, si l'on pose

$$(50) \quad \begin{cases} \varepsilon_{\alpha,c} = \sum_{c'} G_{\alpha,c'} J_{c,c'}, \\ \delta_{\alpha,c} = \sum_{c'} G_{c',\alpha} K'_{c',c} \cdot \pi, \\ \sigma_{\alpha,c} = G_{\alpha,c} \cdot \pi, \end{cases}$$

on aura

$$(51) \quad \varepsilon_{\alpha,c} = \varepsilon_{c,\alpha}, \quad \delta_{\alpha,c} = \delta_{c,\alpha},$$

et les relations ci-dessus donnent :

$$(52)\quad \begin{cases} J_{\alpha,c} = \sum_{c'} \varepsilon_{\alpha,c'} K_{c',c}, \\ J'_{\alpha,c} = \frac{1}{2}\sigma_{\alpha,c} + \sum_{c} \varepsilon_{\alpha,c'} K'_{c',c}, \\ K'_{\alpha,c} = \frac{1}{\pi}\sum_{c'} \delta_{\alpha,c'} K_{c',c}. \end{cases}$$

Si l'on forme ensuite les fonctions homogènes du second degré de $u_1, u_2, \ldots$,

$$E(u_1, u_2, \ldots) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,c} \varepsilon_{\alpha,c}\, u_\alpha u_c,$$

on peut montrer, à l'aide des équations précédentes, que

$$(53)\qquad E(u_1 + 2\omega_1, \ldots) = E(u_1, \ldots) + 2\sum_\alpha \varepsilon_\alpha (u_\alpha + \omega_\alpha).$$

De là il suit, en vertu de la première des équations (45), si l'on pose

$$(54)\qquad g \, . \, e^{E(u_1, u_2, \ldots)} \mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots) = \mathrm{Jc}(v_1, v_2, \ldots),$$

où g représente une constante,

$$(55)\qquad \mathrm{Jc}(v_1 + 2\mathfrak{m}_1\pi,\ v_2 + 2\mathfrak{m}_2\pi, \ldots) = \mathrm{Jc}(v_1, v_2, \ldots).$$

J'appelle cette fonction de $v_1, v_2, \ldots$, *fonction de Jacobi*, parce que c'est ce géomètre qui l'a introduite dans l'analyse pour $n = 1$. Conformément à ce nom, j'ai choisi le symbole Jc. En général, je me propose de justifier, dans mon Mémoire étendu, le choix des symboles adoptés.

La seconde des équations citées, si l'on pose

$$\delta_\alpha = \mathfrak{n}_1 \delta_{\alpha,1} + \mathfrak{n}_2 \delta_{\alpha,2} + \ldots + \mathfrak{n}_n \delta_{\alpha,n},$$

donne

$$(56)\quad \mathrm{Jc}(v_1 + \delta_1 i,\ v_2 + \delta_2 i, \ldots) = e^{-2\sum_\alpha \mathfrak{n}_\alpha (v_\alpha + \delta_\alpha i) i}\, \mathrm{Jc}(v_1, v_2, \ldots).$$

Maintenant on peut démontrer que toute fonction qui jouit de la propriété (55), *et qui présente, en outre,* comme $\mathrm{Jc}(v_1, \ldots)$, *le caractère d'une fonction entière,* tel que je viens de le définir, peut être représentée par une série infinie, convergente non-seulement pour les valeurs réelles, mais aussi pour toutes les valeurs imaginaires de v_1, $v_2, \ldots$, et de la forme

$$\mathrm{S}\left[\mathrm{A}_{\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \ldots, \mathfrak{n}_n} e^{(\mathfrak{n}_1 v_1 + \mathfrak{n}_2 v_2 + \ldots + \mathfrak{n}_n v_n) i}\right],$$

où $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \ldots, \mathfrak{n}_n$ représentent des nombres entiers variables dont chacun doit, indépendamment des autres, parcourir toutes les valeurs depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. Pour la fonction Jc, c'est l'équation (56) qui sert à la détermination des coefficients, et l'on obtient

$$(57) \quad \mathrm{Jc}(v_1, v_2, \ldots) = \mathrm{S}\left\{e^{[\mathfrak{n}_1(v_1 + \delta_1 i) + \mathfrak{n}_2(v_2 + \delta_2 i) + \ldots + \mathfrak{n}_n(v_n + \delta_n i)] i}\right\},$$

ou bien

$$(58) \quad \mathrm{Jc}(v_1, v_2, \ldots) = \mathrm{S}\left[e^{-\sum_{\mathfrak{a}, c} \mathfrak{n}_{\mathfrak{a}} \mathfrak{n}_c \delta_{\mathfrak{a}, c}} \cos(\mathfrak{n}_1 v_1 + \mathfrak{n}_2 v_2 + \ldots + \mathfrak{n}_n v_n)\right].$$

Proprement, le second membre devrait encore être multiplié par une constante arbitraire, mais celle-ci peut être supprimée à cause de la quantité arbitraire g. Le coefficient g de la relation (54) est déterminé par la condition que, pour $u_1 = 0$, $u_2 = 0, \ldots$, $u_n = 0$, on doit avoir $\mathrm{Al}(u_1, \ldots) = 1$. D'après cela, on trouve

$$(59) \qquad \mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots) = e^{-\mathrm{E}(u_1, u_2, \ldots)} \cdot \frac{\mathrm{Jc}(v_1, v_2, \ldots)}{\mathrm{Jc}(0, 0, \ldots)},$$

$$v_{\mathfrak{a}} = \sum_c \sigma_{c, \mathfrak{a}} u_c.$$

Pour les fonctions $\mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha$ on obtient ensuite, au moyen des équations (35), les expressions suivantes. Soit

$$\overset{\alpha}{\mathrm{K}}_{\mathfrak{a}} = \mu_1 \mathrm{K}_{\mathfrak{a}, 1} + \mu_2 \mathrm{K}_{\mathfrak{a}, 2} + \ldots + \mu_n \mathrm{K}_{\mathfrak{a}, n}$$
$$- (\nu_1 \mathrm{K}'_{\mathfrak{a}, 1} + \nu_2 \mathrm{K}'_{\mathfrak{a}, 2} + \ldots + \nu_n \mathrm{K}'_{\mathfrak{a}, n}) i,$$

où chacun des nombres $\mu_1, \mu_2, \ldots, \nu_1, \nu_2, \ldots$ sera $= 1$ ou $= 0$, et déterminé au moyen des formules. Soit, en outre,

$$\delta_{\mathfrak{a}} = \nu_1 \delta_{\mathfrak{a}, 1} + \nu_2 \delta_{\mathfrak{a}, 2} + \ldots + \nu_n \delta_{\mathfrak{a}, n},$$

il sera

$$(60)\qquad e^{\mathrm{E}(u_1, u_2, \ldots)}\,\mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha = \frac{e^{\frac{1}{2}\sum\limits_{\mathfrak{a}} \nu_{\mathfrak{a}}\left(\nu_{\mathfrak{a}} - \mu_{\mathfrak{a}}\pi + \frac{1}{2}\overset{\alpha}{\delta}_{\mathfrak{a}} i\right) i}\,\mathrm{Jc}(v_1 - \mu_1\pi + \delta_1 i, \ldots)}{\mathrm{Jc}(0, 0, \ldots)}.$$

Mais, en posant $\mu_1\nu_1 + \mu_2\nu_2 + \ldots + \mu_n\nu_n = \lambda$, on a :

1°. *Pour λ impair,*

$$(61)\left\{\begin{aligned} &(-1)^{\frac{1}{2}(1-\lambda)}\, e^{\frac{1}{2}\sum \nu_{\mathfrak{a}}\left(v_{\mathfrak{a}} - \mu_{\mathfrak{a}}\pi + \frac{1}{2}\delta_{\mathfrak{a}} i\right) i}\,\mathrm{Jc}(v_1 - \mu_1\pi + \delta_1 i, \ldots) \\ &= \mathrm{S}\left\{(-1)^{\mu_1 \mathfrak{n}_1 + \ldots + \mu_n \mathfrak{n}_n}\, e^{-\sum\limits_{\mathfrak{a}, c}\left(\mathfrak{n}_{\mathfrak{a}} + \frac{1}{2}\nu_{\mathfrak{a}}\right)\left(\mathfrak{n}_c + \frac{1}{2}\nu_c\right)\delta_{\mathfrak{a}, c}} .\sin\left[\left(\mathfrak{n}_1 + \tfrac{1}{2}\nu_1\right) v_1 + \ldots\right]\right\}; \end{aligned}\right.$$

2°. *Pour λ pair,*

$$(62)\left\{\begin{aligned} &(-1)^{\frac{1}{2}\lambda}\, e^{\frac{1}{2}\sum \nu_{\mathfrak{a}}\left(v_{\mathfrak{a}} - \mu_{\mathfrak{a}}\pi + \frac{1}{2}\delta_{\mathfrak{a}} i\right) i}\,\mathrm{Jc}(v_1 - \mu_1\pi + \delta_1 i, \ldots) \\ &= \mathrm{S}\left\{(-1)^{\mu_1 \mathfrak{n}_1 + \ldots + \mu_n \mathfrak{n}_n}\, e^{-\sum\limits_{\mathfrak{a}, c}\left(\mathfrak{n}_{\mathfrak{a}} + \frac{1}{2}\nu_{\mathfrak{a}}\right)\left(\mathfrak{n}_c + \frac{1}{2}\nu_c\right)\delta_{\mathfrak{a}, c}} .\cos\left[\left(\mathfrak{n}_1 + \tfrac{1}{2}\nu_1\right) v_1 + \ldots\right]\right\}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on pose, en outre,

$$\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_{\alpha, \beta} = \frac{\mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots)_{\alpha, \beta}}{\mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots)},$$

le second membre de l'équation (60) fournit la valeur de

$$e^{\mathrm{E}(u_1, \ldots)}\,\mathrm{Al}(u_1, \ldots)_{\alpha, \beta};$$

lorsqu'on pose pour chacun des nombres $\mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2$, etc., la *somme* des deux valeurs qu'il prend pour α et pour β.

Si en place de v_1, v_2, etc., on introduit de nouveau u_1, u_2, etc., on obtient encore les expressions remarquables suivantes.

Soit

$$\overset{\alpha}{\mathrm{K}}_{\mathfrak{a}} = \overset{\alpha}{\omega}_{\mathfrak{a}} - i\,\overset{\alpha}{\omega}{}'_{\mathfrak{a}},$$

où

$$\overset{0}{\omega}_{\mathfrak{a}} = \omega_1 \quad \overset{1}{\omega}_{\mathfrak{a}} = \overset{2}{\omega}_{\mathfrak{a}} = \overset{3}{\omega}_{\mathfrak{a}}, \ldots, \quad \overset{2n-2}{\omega}_{\mathfrak{a}} = \overset{2n-1}{\omega}_{\mathfrak{a}}, \quad \overset{2n}{\omega}_{\mathfrak{a}} = 0,$$

$$\overset{0}{\omega}{}'_{\mathfrak{a}} = 0, \quad \overset{1}{\omega}{}'_{\mathfrak{a}} = \overset{2}{\omega}{}'_{\mathfrak{a}}, \quad \overset{3}{\omega}{}'_{\mathfrak{a}} = \overset{4}{\omega}{}'_{\mathfrak{a}}, \ldots, \quad \overset{2n-1}{\omega}{}'_{\mathfrak{a}} = \overset{2n}{\omega}{}'_{\mathfrak{a}},$$

$$\overset{2c-1}{\omega}_{\mathfrak{a}} = \mathrm{K}_{\mathfrak{a}, c} + \mathrm{K}_{\mathfrak{a}, c+1} + \ldots + \mathrm{K}_{\mathfrak{a}, n},$$

$$\overset{2c}{\omega}{}'_{\mathfrak{a}} = \mathrm{K}'_{\mathfrak{a}, c};$$

soit, en outre,

$$\sigma_\mathfrak{a} = \mathfrak{n}_1 \sigma_{\mathfrak{a},1} + \mathfrak{n}_2 \sigma_{\mathfrak{a},2} + \ldots + \mathfrak{n}_n \sigma_{\mathfrak{a},n},$$
$$\omega'_\mathfrak{a} = \mathfrak{n}_1 K'_{\mathfrak{a},1} + \mathfrak{n}_2 K'_{\mathfrak{a},2} + \ldots + \mathfrak{n}_n K'_{\mathfrak{a},n},$$

il sera

$$\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha = \frac{S\left\{ e^{-\sum\limits_\mathfrak{a} (\sigma_\mathfrak{a} + \frac{1}{2}\overset{\alpha}{\sigma}_\mathfrak{a})(\omega'_\mathfrak{a} + \frac{1}{2}\overset{\alpha}{\omega}'_\mathfrak{a})} \cdot \cos\left[\Sigma(\sigma_\mathfrak{a} + \tfrac{1}{2}\overset{\alpha}{\sigma}_\mathfrak{a})(u_\mathfrak{a} - \overset{\alpha}{\omega}_\mathfrak{a})\right]\right\}}{S\left(e^{-\sum\limits_\mathfrak{a} \sigma_\mathfrak{a}\omega'_\mathfrak{a}} \cdot \cos \Sigma \sigma_\mathfrak{a} u_\mathfrak{a}\right)}.$$

Le signe S se rapporte encore aux nombres $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_2$, etc., contenus dans les expressions $\sigma_\mathfrak{a}$, $\omega'_\mathfrak{a}$; mais $\overset{\alpha}{\sigma}_\mathfrak{a}$ représente la valeur de $\sigma_\mathfrak{a}$ qu'on obtient en prenant pour $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_2$, etc. les valeurs qui font

$$\omega'_\mathfrak{a} = \overset{\alpha}{\omega}'_\mathfrak{a}.$$

Et si, dans l'expression ci-dessus, on remplace $\overset{\alpha}{\sigma}_\mathfrak{a}$, $\overset{\alpha}{\omega}_\mathfrak{a}$, $\overset{\alpha}{\omega}'_\mathfrak{a}$ par les sommes

$$\overset{\alpha}{\sigma}_\mathfrak{a} + \overset{\beta}{\sigma}_\mathfrak{a}, \quad \overset{\alpha}{\omega}_\mathfrak{a} + \overset{\beta}{\omega}_\mathfrak{a}, \quad \overset{\alpha}{\omega}'_\mathfrak{a} + \overset{\beta}{\omega}'_\mathfrak{a},$$

elle représente la fonction $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_{\alpha,\beta}$.

Il existe encore un nombre infini de représentations des fonctions abéliennes semblables à celles qu'on vient de donner. Il y en a une notamment (de même que pour les fonctions elliptiques) où les fonctions *cycliques* sin, cos sont remplacées par les fonctions *hyperboliques* correspondantes. Puis, j'ai aussi développé, dans mon Mémoire, comment toute expression formée rationnellement de fonctions abéliennes peut être représentée comme le quotient de deux séries d'une forme tout à fait semblable, considération qui prépare en même temps la *transformation des fonctions abéliennes*.

Westerkotten (Saline), en Westphalie, 11 septembre 1853.

Nota. Les derniers résultats du Mémoire précédent ont été déjà énoncés dans un Programme publié par le même auteur et daté du 17 juillet 1849.