JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

P. TCHEBICHEF

Sur l'intégration des différentielles irrationnelles

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 18 (1853), p. 87-111.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1853_1_18__87_0>

SUR

L'INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES IRRATIONNELLES;

PAR M. P. TCHEBICHEF.

§ I.

Si la différentielle $\frac{f_0 x}{F_0 x} \frac{dx}{\sqrt[m]{\theta x}}$, composée d'une fraction rationnelle $\frac{f_0 x}{F_0 x}$ et d'une racine d'une fonction entière θx, s'intègre à l'aide des signes algébriques et logarithmiques, nous savons, d'après les recherches ingénieuses de M. Abel et de M. Liouville, que l'intégrale $\int \frac{F_0 x}{f_0 x} \frac{dx}{\sqrt[m]{\theta x}}$ se présentera sous la forme suivante:

$$U + A^0 \log V^0 + A' \log V' + A'' \log V'' + \ldots,$$

où $U, V^0, V', V'', \ldots$, sont des fonctions rationnelles de x et $\sqrt[m]{\theta x}$; $A^0, A', A'', \ldots$, sont des quantités constantes.

Le terme algébrique U peut se déterminer facilement. On sait qu'il est de la forme $\frac{P}{Q}(\theta x)^{\frac{m-1}{m}}$, où P et Q sont des fonctions entières, que l'on trouvera à l'aide des procédés suivants [*]:

1°. On cherchera le plus grand commun diviseur entre les fonctions $F_0 x \theta x$ et $\frac{d[F_0 x \theta x]}{dx}$; ce diviseur est le dénominateur Q du terme algébrique.

2°. Si les degrés des fonctions

$$\frac{Q f_0 x}{F_0 x \theta x}, \qquad \frac{Q}{x[\theta x]^{\frac{m-1}{m}}},$$

[*] Nous supposons que la différentielle $\frac{f_0 x}{F_0 x} \frac{dx}{\sqrt[m]{\theta x}}$ est réduite de manière que θx ne contient pas des facteurs d'un degré plus élevé que $m - 1$.

sont inférieurs à -1, le terme algébrique est o. Dans le cas contraire, en désignant par n le plus petit nombre supérieur au degré de ces fonctions, on trouvera le numérateur P d'après la formule

$$P = B_0 + B_1 + x + B_2 x^2 + \ldots + B_n x^n,$$

où B_0, B_1, B_2,..., B_n sont des coefficients constants, dont la valeur se déterminera en cherchant à rendre le polynôme

$$fx - \frac{F_0 x\,\theta x}{Q}\left[B_1 + 2 B_2 x + \ldots + nB_n x^{n-1}\right]$$

$$-\left[\frac{m-1}{m}\frac{F_0 x\,\theta' x}{Q} - \frac{F_0 x\,\theta x\,\frac{dQ}{dx}}{Q^2}\right]\left[B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots + B_n x^n\right]$$

divisible par $\frac{Q}{D}$, et avec cette condition que le quotient ne soit pas d'un degré plus élevé que $\frac{Fx\sqrt[m]{\theta x}.D}{xQ}$, D étant le plus grand commun diviseur entre les fonctions θx et $\theta' x$.

Si ces conditions ne peuvent être remplies, on en conclura que l'intégration de $\frac{f_0 x}{F_0 x}\frac{\sqrt[m]{\theta x}}{dx}$, à l'aide des signes algébriques et logarithmiques, est impossible. Dans le cas contraire, on trouvera le terme algébrique, et si l'on ôte sa différentielle de $\frac{f_0 x}{F_0 x}\frac{dx}{\sqrt[m]{\theta x}}$, le reste doit pouvoir être intégré à l'aide des seuls termes logarithmiques. C'est de cette intégration que nous allons maintenant nous occuper.

Voici les questions dont nous donnerons les solutions dans ce Mémoire :

1°. Déterminer le nombre de termes logarithmiques dans la valeur de l'intégrale donnée.

La solution de cette question, dans un cas particulier, donne la démonstration du théorème énoncé par M. Abel en ces termes :

« ... Le théorème suivant très remarquable a lieu :

« *Lorsqu'une intégrale de la forme* $\int \frac{\rho\, dx}{\sqrt{R}}$, *où* ρ *et* R *sont des fonc-*

tions entières de x, est exprimable par des logarithmes, on peut toujours l'exprimer de la manière suivante :

$$\int \frac{\rho\, dx}{\sqrt{R}} = A \log \frac{p + q\sqrt{R}}{p - q\sqrt{R}},$$

où A *est constant, et* p *et* q *des fonctions entières de* x. » (Œuvres compl., tome I, page 65.)

2°. Trouver les conditions analytiques qui déterminent chaque terme séparément.

On verra, en outre, d'après la solution de ces questions, que les cas connus d'intégrabilité des différentielles binômes de la forme

$$x^s (a + bx^{s'})^{s''} dx,$$

sont les seuls où l'intégration de ces différentielles est possible par les signes algébriques et logarithmiques, s, s', s'' étant rationnels.

§ II.

Nous avons vu que les termes logarithmiques, dans la valeur de l'intégrale $\int \frac{fx}{Fx} \frac{dx}{\sqrt[m]{\theta x}}$, sont de la forme

$$A \log V,$$

où V est une fonction rationnelle de x et $\sqrt[m]{\theta x}$. Donc en faisant, pour abréger,

$$\sqrt[m]{\theta x} = \Delta,$$

et en désignant par

$$\varphi_0(\Delta), \quad \varphi_1(\Delta), \quad \varphi_2(\Delta), \quad \varphi_3(\Delta), \ldots,$$

des fonctions rationnelles de x et Δ, nous aurons l'équation suivante :

$$\int \frac{fx}{Fx} \frac{dx}{\Delta} = A^0 \log \varphi_0(\Delta) + A' \log \varphi_1(\Delta) + A'' \log \varphi_2(\Delta) + \ldots,$$

lorsque la valeur de l'intégrale $\int \frac{fx}{Fx} \frac{dx}{\Delta}$ ne contient plus de termes algébriques.

Si nous remplaçons, dans cette équation, Δ par $\alpha\Delta$, $\alpha^2\Delta, \ldots, \alpha^{m-1}\Delta$, et si nous la multiplions respectivement par 1, α, $\alpha^2, \ldots, \alpha^{m-1}$, α étant racine primitive de l'équation

$$x^m - 1 = 0,$$

nous trouvons une série d'équations, dont la somme donne

$$\begin{aligned} m\int\frac{fx}{Fx}\frac{dx}{\Delta} &= A^0 \log\left[\varphi_0(\Delta).\varphi_0^{\alpha}(\alpha\Delta).\varphi_0^{\alpha^2}(\alpha^2\Delta)\ldots\varphi_0^{\alpha^{m-1}}(\alpha^{m-1}\Delta)\right] \\ &+ A'\log\left[\varphi_1(\Delta).\varphi_1^{\alpha}(\alpha\Delta).\psi_1^{\alpha^2}(\alpha^2\Delta)\ldots\varphi_1^{\alpha^{m-1}}(\alpha^{m-1}\Delta)\right] \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$(1) \qquad \int\frac{fx}{Fx}\frac{dx}{\Delta} = A_0 \log W_0 + A_1 \log W_1 + A_2 \log W_2 + \ldots,$$

où W_0, W_1, $W_2, \ldots$, sont des fonctions de la forme

$$\varphi(\Delta)\varphi^{\alpha}(\alpha\Delta)\varphi^{\alpha^2}(\alpha^2\Delta)\ldots\varphi^{\alpha^{m-1}}(\alpha^{m-1}\Delta),$$

A_0, A_1, $A_2, \ldots$, des constantes.

C'est sous cette forme que nous allons examiner la valeur de l'intégrale $\int\frac{fx}{Fx}\frac{dx}{\Delta}$.

Nous commencerons par prouver que la valeur de l'intégrale $\int\frac{fx}{Fx}\frac{dx}{\Delta}$ étant réduite au minimum de termes, les coefficients A_0, A_1, $A_2, \ldots$, ne peuvent vérifier l'équation

$$N_0 A_0 + N_1 A_1 + N_2 A_2 + \ldots = 0,$$

dans laquelle N_0, N_1, $N_2, \ldots$, sont des nombres complexes de α.

En effet, si cette équation a lieu, nous trouvons

$$A_0 = -\frac{N_1}{N_0}A_1 - \frac{N_2}{N_0}A_2 - \ldots;$$

et, en substituant cette valeur de A_0 dans l'expression de l'intégrale $\int\frac{fx}{Fx}\frac{dx}{\Delta}$, nous la transformons dans celle-ci :

$$A_1 \log W_1 W_0^{-\frac{N_1}{N_0}} + A_2 \log W_2 W_0^{-\frac{N_2}{N_0}} + \ldots,$$

qui contient moins de termes que l'équation (1); et chacun de ces termes, comme nous allons le démontrer, peut se réduire aussi à la forme

$$A \log \left[\psi(\Delta) . \psi^{\alpha}(\alpha\Delta) . \psi^{\alpha^2}(\alpha^2\Delta) \ldots \psi^{\alpha^{m-1}}(\alpha^{m-1}\Delta)\right],$$

où $\psi(\Delta)$ est une fonction rationnelle de x et Δ.

Pour réduire ainsi le terme

$$A_1 \log W_1 W_0^{-\frac{N_1}{N_0}},$$

nous mettons $\frac{N_1}{N_0}$ sous la forme

$$\frac{n^0 + n'\alpha + n''\alpha^2 + \ldots}{n},$$

où n, n^0, n', n'',..., sont des nombres entiers réels (ce qui est toujours possible). D'après cela, le terme

$$A_1 \log W_1 W_0^{-\frac{N_1}{N_0}}$$

peut s'écrire ainsi :

$$\frac{A_1}{n} \log \left[W_1^n . W_0^{-n^0} . W_0^{-n'\alpha} . W_0^{-n''\alpha^2} \ldots\right],$$

où la quantité mise sous le signe log se décompose en facteurs et diviseurs de la forme

$$W^{\alpha^l} = \varphi^{\alpha^l}(\Delta) . \varphi^{\alpha^{l+1}}(\alpha\Delta) . \varphi^{\alpha^{l+2}}(\alpha^2\Delta)\ldots,$$

et que l'on réduit à celle-ci :

$$\varphi(\Delta)\varphi^{\alpha}(\alpha\Delta)\varphi \quad (\alpha^2\Delta)\ldots,$$

en remplaçant $\varphi(\Delta)$ par $\varphi(\alpha^l\Delta)$.

La même forme subsiste également après la multiplication et la division de ces quantités.

Donc, à l'aide de l'équation

$$N_0 A_0 + N_1 A_1 + N_2 A_2 + \ldots = 0,$$

on peut diminuer le nombre de termes dans la valeur de l'intégrale

$\int \frac{fx}{Fx} \frac{dx}{\Delta}$ sans altérer leur forme principale, et, par conséquent, cette équation ne peut avoir lieu dès que la valeur de l'intégrale $\int \frac{fx}{Fx} \frac{dx}{\Delta}$ est réduite au minimum de termes, ce que nous supposerons toujours dans nos recherches.

§ III.

Soit x' une valeur de x qui rende W_0 égale à o ou ∞. Il n'est pas difficile de s'assurer qu'on trouvera une puissance de $x - x'$, dont le rapport à W_0 sera fini pour $x = x'$, et que l'exposant de cette puissance sera en général un nombre complexe de α. En effet, la fonction W_0, comme nous l'avons vu, est égale au produit

$$\varphi_0(\Delta) . \varphi\ (\alpha \Delta) . \varphi^{\alpha^2}(\alpha^2 \Delta) \ldots,$$

où φ_0 est une fonction algébrique. Or, si l'on développe les facteurs

$$\varphi_0(\Delta), \quad \varphi_0(\alpha\Delta), \quad \varphi_0(\alpha^2\Delta), \ldots$$

selon les puissances de $x - x'$, et qu'on désigne par n^0, n', n'',..., les exposants de $x - x'$ dans les premiers termes, les nombres n^0, n', n'',..., sont rationnels, et la somme

$$n^0 + n'\alpha + n''\alpha^2 + \ldots$$

est l'exposant de $x - x'$ dans le premier terme du développement de W_0. D'où il suit que, N'_0 étant égal au nombre complexe

$$n^0 + n'\alpha + n''\alpha^2 + \ldots,$$

le rapport $\frac{W_0}{(x - x')^{N'_0}}$ reste fini pour $x = x'$.

Soient N'_1, N'_2,... les nombres complexes qui jouent le même rôle par rapport à W_1, W_2,.... En prenant

$$\int \frac{A_0 N'_0 + A_1 N'_1 + A_2 N'_2 + \ldots}{x - x'} dx$$

$$= A_0 \log (x - x')^{N'_0} + A_1 \log (x - x')^{N'_1} + A_2 \log (x - x')^{N'_2} + \ldots,$$

et retranchant terme à terme de celle-ci,

$$\int \frac{fx}{\mathrm{F}x}\frac{dx}{\Delta} = \mathrm{A}_0 \log \mathrm{W}_0 + \mathrm{A}_1 \log \mathrm{W}_1 + \mathrm{A}_2 \log \mathrm{W}_2 + \ldots,$$

nous trouvons

$$\int \left[\frac{fx}{\mathrm{F}x\,\Delta} - \frac{\mathrm{A}_0 \mathrm{N}'_0 + \mathrm{A}_1 \mathrm{N}'_1 + \mathrm{A}_2 \mathrm{N}'_2 + \ldots}{x - x'}\right] dx$$

$$= \mathrm{A}_0 \log \frac{\mathrm{W}_0}{(x-x')^{\mathrm{N}'_0}} + \mathrm{A}_1 \log \frac{\mathrm{W}_1}{(x-x')^{\mathrm{N}'_1}} + \mathrm{A}_2 \log \frac{\mathrm{W}_2}{(x-x')^{\mathrm{N}'_2}} + \ldots.$$

La seconde partie de cette équation étant finie pour $x = x'$, nous concluons que cette valeur de x ne rend pas infinie l'intégrale

$$\int \left[\frac{fx}{\mathrm{F}x\,\Delta} - \frac{\mathrm{A}_0 \mathrm{N}'_0 + \mathrm{A}_1 \mathrm{N}'_1 + \mathrm{A}_2 \mathrm{N}'_2 + \ldots}{x - x'}\right] dx,$$

ce qui suppose que la limite de

$$(x - x')\left[\frac{fx}{\mathrm{F}x\,\Delta} - \frac{\mathrm{A}_0 \mathrm{N}'_0 + \mathrm{A}_1 \mathrm{N}'_1 + \mathrm{A}_2 \mathrm{N}'_2 + \ldots}{x - x'}\right],$$

pour $x = x'$, est égale à zéro, et, par conséquent,

$$\mathrm{N}'_0 \mathrm{A}_0 + \mathrm{N}'_1 \mathrm{A}_1 + \mathrm{N}'_2 \mathrm{A}_2 + \ldots = \lim \left[\frac{(x-x')fx}{\mathrm{F}x\,\Delta}\right]_{x=x'}.$$

Cette équation nous prouve que les termes de la valeur de l'intégrale $\int \frac{fx}{\mathrm{F}x}\frac{dx}{\Delta}$ ne peuvent devenir infinis que pour une valeur de x égale à l'une des racines de l'équation

$$\mathrm{F}x = 0;$$

car, d'après le § II, la somme

$$\mathrm{N}'_0 \mathrm{A}_0 + \mathrm{N}'_1 \mathrm{A}_1 + \mathrm{N}'_2 \mathrm{A}_2 + \ldots = 0$$

sera différente de zéro, tandis que $\lim \left[\frac{(x-x')fx}{\mathrm{F}x\,\Delta}\right]_{x=x'}$ ne reste fini que dans le cas où $\mathrm{F}x$ contient le facteur $x - x'$, le facteur Δ ne pouvant contenir $x - x'$ qu'à un degré inférieur à 1 (§ I, note).

Cette équation nous prouve aussi que la limite de $\frac{(x-x')fx}{\mathrm{F}x\,\Delta}$, pour $x = x'$, ne peut être infinie.

Supposons maintenant qu'on désigne par x', x'', x''', ..., $x^{(l)}$ toutes les racines de l'équation

$$Fx = 0,$$

et par K', K'', K''',..., $K^{(l)}$ la valeur de

$$\lim \left[\frac{(x-z)fx}{Fx\,\Delta}\right]_{x=z}$$

pour $z = x'$, x'', x''',..., $x^{(l)}$.

L'équation que nous venons de trouver et celles qu'on obtient de la même manière en examinant les cas où $x = x''$, x''',..., $x^{(l)}$, pourront s'écrire ainsi :

$$(2)\qquad \sum_{i=0}^{i=t} N'_i A_i = K', \quad \sum_{i=0}^{i=t} N''_i A_i = K'', \ldots, \quad \sum_{i=0}^{i=t} N^{(l)}_i A_i = K^{(l)},$$

ou t est le nombre de termes de la valeur de l'intégrale $\int \frac{fx}{Fx}\frac{dx}{\Delta}$: N'_0, N''_0,..., $N^{(l)}_0$, N'_1, N''_1,..., $N^{(l)}_1$, etc., sont les nombres complexes choisis de manière que les rapports

$$\frac{W_0}{(x-x')^{N'_0}(x-x'')^{N''_0}\ldots(x-x^{(l)})^{N^{(l)}_0}},$$

$$\frac{W_1}{(x-x')^{N'_1}(x-x'')^{N''_1}\ldots(x-x^{(l)})^{N^{(l)}_1}},\ldots,$$

restent finis pour $x = x'$, x'', x''',..., $x^{(l)}$, et, par conséquent, pour toutes les valeurs finies de x; car, comme nous l'avons remarqué, les racines de l'équation

$$Fx = 0$$

sont les seules valeurs finies de x qui peuvent rendre les fonctions

$$W_0, W_1, W_2, \ldots,$$

infinies ou 0.

En changeant, dans l'équation

$$\int \frac{fx}{Fx}\frac{dx}{\Delta} = A_0 \log W_0 + A_1 \log W_1 + A_2 \log W_2 + \ldots,$$

x en $\frac{1}{z}$, et en traitant le cas de $z = 0$, nous trouvons de la même manière l'équation

$$(3) \qquad \sum_{i=0}^{i=\iota} \mu_i A_i = K^{(0)},$$

où $K^{(0)}$ est la limite de $\frac{xfx}{Fx\Delta}$ pour $x = \infty$, et $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots$, les degrés des fonctions $W_0, W_1, W_2, \ldots$.

Cette équation nous prouve, en outre, que la fonction $\frac{fx}{Fx\Delta}$ ne peut être d'un degré plus élevé que -1; car, autrement,

$$K^{(0)} = \lim \left[\frac{xfx}{Fx\Delta}\right]_{x=\infty}$$

serait infinie, ce qui ne peut avoir lieu d'après l'équation trouvée.

§ IV.

Supposons, maintenant, qu'en désignant par $M^0, M', M'', \ldots$, les nombres complexes de α, on cherche à vérifier l'équation

$$M^0 K^0 + M'K' + M''K'' + \ldots = 0,$$

et que l'on ne trouve que λ équations de cette forme qui ne soient pas identiques entre elles par rapport à $K^0, K', K'', \ldots, K^{(\iota)}$.

D'après ces équations, on pourra évidemment exprimer λ quantités de la série

$$K^0, K', K'', \ldots, K^{(\iota)}$$

en fonctions linéaires des autres, et ces fonctions auront pour coefficients des nombres complexes de α. Supposons donc qu'on parvienne à trouver

$$(4)\quad \begin{cases} K^0 = \sum_{i=0}^{i=l-\lambda} M_i^0 K^{(\lambda+i)}, \quad K' = \sum_{i=0}^{i=l-\lambda} M_i' K^{(\lambda+i)}, \ldots, \\ K^{(\lambda-1)} = \sum_{i=0}^{i=l-\lambda} M_i^{(\lambda-1)} K^{(\lambda+i)}. \end{cases}$$

Comme les quantités K^0, K', K'',..., $K^{(l)}$ ne peuvent vérifier plus de λ équations différentes de la forme

$$(5)\qquad M^0 K^0 + M' K' + M'' K'' + \ldots = 0,$$

les quantités

$$K^{(\lambda)}, \quad K^{(\lambda+1)}, \ldots, \quad K^{(l)},$$

prises séparément de

$$K^0, \quad K', \quad K'', \ldots, \quad K^{(\lambda-1)},$$

ne pourront vérifier une équation de cette forme; car, autrement, cette équation et les λ équations (4), évidemment non identiques entre elles, donneraient $\lambda + 1$ équations de la forme (5), ce qui est contraire à la supposition.

D'après cela, il est facile de s'assurer que le nombre de termes dans la valeur de l'intégrale $\int \frac{fx}{Fx} \frac{dx}{\Delta}$, ne peut être au-dessous de $l - \lambda + 1$; car, dans ce cas, le nombre des coefficients

$$A_0, \quad A_1, \quad A_2, \ldots,$$

serait aussi moindre que $l - \lambda + 1$; et alors les $l - \lambda + 1$ équations dernières de la série (2), après élimination de ces coefficients, donneraient au moins une équation entre $K^{(\lambda)}$, $K^{(\lambda+1)}$,..., $K^{(l)}$ qui serait de la forme (5), ce qui est impossible.

Le même résultat aurait lieu si l'une de $l - \lambda + 1$ dernières équations (2) était identique aux autres par rapport à toutes les quantités A_0, A_1, A_2,.... Donc, au moyen de ces équations, il est possible de trouver $l-\lambda+1$ quantités de la série

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ldots$$

en fonction des autres et des quantités $K^{(\lambda)}$, $K^{(\lambda+1)},\ldots, K^{(l)}$; ces fonctions seront linéaires et auront pour coefficients des nombres complexes de α.

Supposons qu'on parvienne ainsi à trouver les quantités

$$A_0,\ A_1,\ldots,\ A_{l-\lambda+1},$$

et qu'on porte leur valeur dans l'équation

$$\int \frac{fx}{Fx}\frac{dx}{\Delta} = A_0 \log W_0 + A_1 \log W_1 + A_2 \log W_2 + \ldots.$$

Après cette substitution, la valeur de l'intégrale $\int \frac{fx}{Fx}\frac{dx}{\Delta}$ contiendra plusieurs termes avec les coefficients

$$K^{(\lambda)},\ K^{(\lambda+1)},\ldots,\ K^{(l)},$$
$$A_{l-\lambda+1},\ A_{l-\lambda+2},\ldots,\ A_l.$$

Mais si l'on rassemble dans un seul terme tout ce qui contient le même coefficient, on n'aura que t termes, dont la forme générale sera

$$K^{(i)} \log Z \quad \text{ou} \quad A_i \log Z,$$

et dans lesquels

$$Z = W_0^{\frac{P_0}{Q_0}}.W_1^{\frac{P_1}{Q_1}}.W_2^{\frac{P_2}{Q_2}},\ldots,$$

$P_0, P_1, P_2,\ldots, Q_0, Q_1, Q_2,\ldots$, étant des nombres complexes de α. Or, d'après ce que nous avons montré § II, il est certain que, quelque compliquée que soit la forme de ces termes, ils pourront être réduits à une forme telle que celle-ci :

$$\frac{R^{(i)}}{n} \log W \quad \text{ou} \quad \frac{A_i}{n} \log W,$$

où n est un nombre entier réel, et W une fonction de la forme

$$\psi(\Delta).\psi^{\alpha}(\alpha\Delta).\psi^{\alpha^2}(\alpha^2\Delta)\ldots\psi^{\alpha^m}(\alpha^{m-1}\Delta).$$

Donc, après la substitution dont nous venons de parler, la forme principale des termes n'est pas altérée; mais les $l-\lambda+1$ coefficients

$$A_0,\ A_1,\ldots,\ A_{l-\lambda}$$

sont remplacés par

$$\frac{K^{(\lambda)}}{n_0},\quad \frac{K^{(\lambda+1)}}{n_1},\quad \frac{K^{(\lambda+2)}}{n_2},\ldots,\frac{K^{(l)}}{n_{l-\lambda}},$$

où $n_0,\ n_1,\ n_2,\ldots,\ n_{l-\lambda}$ sont des nombres entiers réels.

Dans la suite, nous supposerons toujours que cette transformation a été faite; et par conséquent, dans l'équation

$$\int\frac{fx}{Fx}\frac{dx}{\Delta}=A_0\log W_0+A_1\log W_1+A_2\log W_2+\ldots,$$

nous prendrons

$$(6)\qquad A_0=\frac{K^{(\lambda)}}{n_0},\quad A_1=\frac{K^{(\lambda+1)}}{n_1},\quad A_2=\frac{K^{(\lambda+2)}}{n_2},\ldots,A_{l-\lambda}=\frac{K^{(l)}}{n_{l-\lambda}},$$

où $n_0,\ n_1,\ n_2,\ldots,\ n_{l-\lambda}$ sont des nombres entiers réels.

Jusqu'à présent nous n'avons rien dit sur la forme des fonctions $\varphi_0(\Delta),\ \varphi_1(\Delta),\ldots$, qui entrent dans la composition de $W_0,\ W_1,\ldots$, et qui sont rationnelles par rapport à x et Δ; dans ce qui suit, nous les supposerons réduites à la forme la plus simple, c'est-à-dire

$$\frac{X_0+X_1\Delta+X_2\Delta^2+\ldots+X_{m-1}\Delta^{m-1}}{Y},$$

où $X_0,\ X_1,\ X_2,\ldots,\ X_{m-1}$, Y sont des fonctions entières de x. De plus, le dénominateur Y se détruit dans la valeur de

$$W=\varphi(\Delta).\varphi^{\alpha}(\alpha\Delta).\varphi^{\alpha^2}(\alpha^2\Delta)\ldots\varphi^{\alpha^{m-1}}(\alpha^{m-1}\Delta);$$

à cause de l'égalité

$$1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{m-1}=0,$$

nous pouvons prendre $Y=1$.

§ V.

Les équations (2), (3), (4) et (6), par l'élimination de

$$K^{\circ},\ K',\ K'',\ldots,\ K^{(l)},$$

nous donnent

$$\sum_{i=0}^{i=l-\lambda} M_i^0\, n_i A_i = \sum_{i=0}^{i=t} \mu_i A_i,$$

$$\sum_{i=0}^{i=l-\lambda} M_i'\, n_i A_i = \sum_{i=0}^{i=t} N_i' A_i,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{i=0}^{i=l-\lambda} M_i^{(\lambda-1)}\, n_i A_i = \sum_{i=0}^{i=t} N_i^{(\lambda-1)} A_i,$$

$$n_0 A_0 = \sum_{i=0}^{i=t} N_i^{(\lambda)} A_i,$$

$$n_1 A_1 = \sum_{i=0}^{i=t} N_i^{(\lambda+1)} A_i,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$n_{l-\lambda} A_{l-\lambda} = \sum_{i=0}^{i=t} N_i^{(l)} A_i,$$

où les nombres complexes désignés par $M_i^{i'}$ sont déterminés par les équations (4), qui donnent K°, K', K'',..., $K^{(\lambda-1)}$ en fonction de $K^{(\lambda)}$, $K^{(\lambda+1)}$,..., $K^{(l)}$; les nombres complexes désignés par $N_i^{i'}$ sont inconnus et jouissent, comme nous l'avons vu, de cette propriété que le rapport

$$\frac{W_i}{(x-x')^{N'_i}(x-x'')^{N''_i}\ldots}$$

reste fini pour toutes les valeurs finies de x; le nombre désigné par μ_i détermine le degré de la fonction W_i. Quant aux quantités $n_0, n_1, \ldots, n_{l-\lambda}$, ce sont des nombres entiers réels, également inconnus.

Or, comme les coefficients

$$A_0, A_1, A_2, \ldots,$$

ne peuvent vérifier aucune équation de la forme

$$N_0 A_0 + N_1 A_1 + N_2 A_2 + \ldots = 0;$$

$N_0, N_1, N_2, \ldots$, étant des nombres complexes de α, les équations que nous venons de trouver doivent être identiques par rapport à $A_0, A_1, A_2, \ldots$, ce qui suppose les égalités suivantes :

$$\mu_i = M_i^0 n_i,\quad N'_i = M'_i n_i,\quad N''_i = M''_i n_i, \ldots,\quad N_i^{(l-\lambda)} = M_i^{(l-\lambda)} n_i,$$

$$N_i^{(\lambda)} = 0,\quad N_i^{(\lambda+1)} = 0, \ldots,\quad N_i^{(\lambda+i-1)} = 0,\quad N_i^{(\lambda+i)} = n_i,$$

$$N_i^{(\lambda+i+1)} = 0, \ldots,\quad N_i^{l} = 0$$

pour $i = 0, 1, 2, \ldots, l-\lambda$, et

$$\mu_i = 0,\quad N'_i = 0,\quad N''_i = 0,\quad N'''_i = 0, \ldots$$

pour $i > l - \lambda$.

D'après cela, en ayant égard au rapport qui existe entre la fonction W_i et les nombres μ_i, N'_i, $N''_i, \ldots$, nous concluons :

1°. Toutes les fonctions $W_{l-\lambda+1}$, $W_{l-\lambda+2}$, $W_{l-\lambda+3}, \ldots$ sont du degré 0, et aucune valeur de x ne peut les rendre ni nulles, ni infinies.

2°. Pour $i = 0, 1, 2, \ldots, l-\lambda$, le degré de W_i est $M_i^0 n_i$; et la fonction dont le rapport à W_i reste fini, tant que x n'est pas infini, se présente sous cette forme :

$$\left[(x-x')^{M'_i}.(x-x'')^{M''_i}.(x-x''')^{M'''_i}\ldots(x-x^{(\lambda-1)})^{M_i^{(\lambda-1)}}.(x-x^{(\lambda+i)})\right],$$

expression où il ne reste d'inconnu que le nombre entier et réel n_i.

Telles sont les propriétés des fonctions

$$W_0,\ W_1,\ W_2,\ W_3,\ldots,$$

qui entrent dans l'équation

$$\int \frac{fx}{Fx}\frac{dx}{\Delta} = A_0 \log W_0 + A_1 \log W_1 + A_2 \log W_2 + \ldots,$$

quand cette équation se trouve transformée par la méthode que nous avons donnée § IV. De plus, les équations (6) nous donnent l'égalité

$$A_i = \frac{K^{(\lambda+i)}}{n_i},$$

i étant égal à $0,\ 1,\ 2,\ldots,\ l-\lambda$.

§ VI.

D'après ce que nous venons de trouver par rapport aux fonctions

$$W_{l-\lambda+1},\quad W_{l-\lambda+2},\quad W_{l-\lambda+3},\ldots,$$

il n'est pas difficile de s'assurer qu'elles se réduisent à des quantités constantes.

En effet, si la fonction W ne devient ni 0 ni ∞ pour $x=a$, l'exposant de $x-a$ dans le premier terme du développement de W, selon les puissances de $x-a$, doit être zéro. Or, pour

$$W = \varphi(\Delta).\varphi^{\alpha}(\alpha\Delta).\varphi^{\alpha^2}(\alpha^2\Delta)\ldots\varphi^{\alpha^{m-1}}(\alpha^{m-1}\Delta),$$

cet exposant (§ II) est égal à la somme

$$n^0 + n'\alpha + n''\alpha^2 + \ldots + n^{(m-1)}.\alpha^{m-1},$$

où $n^0,\ n',\ n'',\ldots,\ n^{(m-1)}$ sont des nombres réels rationnels, désignant le degré de $x-a$ dans les premiers termes du développement de

$$\varphi(\Delta),\quad \varphi(\alpha\Delta),\quad \varphi(\alpha^2\Delta),\ldots\quad \varphi(\alpha^{m-1}\Delta),$$

et α une racine primitive de l'équation

$$x^m - 1 = 0.$$

Or cette somme ne peut se réduire à zéro, à moins qu'on n'ait

$$n^0 = n' = n'' = \ldots = n^{(n-1)};$$

c'est-à-dire à moins que le développement de

$$\varphi(\Delta),\quad \varphi(\alpha\Delta),\quad \varphi(\alpha^2\Delta),\ldots,\quad \varphi(\alpha^{m-1}\Delta)$$

ne contienne dans ses premiers termes la même puissance de $x - a$; et alors nous trouvons que pour $x = a$, q et p étant des nombres entiers, le rapport $\frac{\varphi(\alpha^p\Delta)}{\varphi(\alpha^q\Delta)}$ reste fini.

Donc, si la fonction W reste finie pour toutes les valeurs finies de x, la même chose doit avoir lieu pour la fraction $\frac{\varphi(\alpha^p\Delta)}{\varphi(\alpha^q\Delta)}$.

De la même manière, on parvient à conclure que le degré de la fonction $\frac{\varphi(\alpha^p\Delta)}{\varphi(\alpha^q\Delta)}$ est 0, et, par conséquent, qu'elle reste finie pour $x = \infty$.

D'après cela, nous trouvons que le produit

$$\frac{\varphi(\alpha^p\Delta)}{\varphi(\Delta)}\cdot\frac{\varphi(\alpha^p\Delta)}{\varphi(\alpha\Delta)}\cdot\frac{\varphi(\alpha^p\Delta)}{\varphi(\alpha^2\Delta)}\cdots\frac{\varphi(\alpha^p\Delta)}{\varphi(\alpha^{m-1}\Delta)}$$

reste fini pour toutes les valeurs de x.

Mais ce produit se réduit à $\frac{\varphi^m(\alpha^p\Delta)}{S}$, où S, indépendante de α^p, est une fonction entière de x; car

$$S = \varphi(\Delta)\cdot\varphi(\alpha\Delta)\cdot\varphi(\alpha^2\Delta)\ldots\varphi(\alpha^{m-1}\Delta)$$

est une fonction symétrique des racines de l'équation

$$\Delta^m = \text{à une fonction entière},$$

et $\varphi(\Delta)$, comme nous avons vu, est une fonction entière de x et Δ. Quant à $\varphi^m(\alpha^p\Delta)$, cette fonction sera évidemment de même forme que $\varphi(\Delta)$. (*Voir* § IV.)

Donc, en faisant

$$\frac{\varphi^m(\alpha^p\Delta)}{S} = \psi(\alpha^p\Delta), \tag{7}$$

nous trouvons que $\psi(\alpha^p\Delta)$ est une fonction déterminée par l'équation

$$\psi(\alpha^p\Delta) = \frac{X_0}{S} + \frac{X_1}{S}\Delta + \frac{X_2}{S}\Delta^2 + \ldots + \frac{X_{m-1}}{S}\Delta^{m-1},$$

où S, X_0, X_1, X_2,..., X_{m-1} sont des fonctions entières de x, et qui reste finie pour toutes les valeurs de x. Or nous allons prouver que cela ne peut avoir lieu, à moins que tous les termes de la valeur de $\psi(\alpha^p\Delta)$ ne soient constants.

En effet, d'après la valeur de $\psi(\alpha^p\Delta)$, pour $i < m$, nous trouvons

$$\begin{aligned}\psi(\alpha^p\Delta) + \alpha^{-i}\psi(\alpha^{p+1}\Delta) + \alpha^{-2i}\psi(\alpha^{p+2}\Delta) + \ldots \\ + \alpha^{-(m-1)i}\varphi(\alpha^{p+m-1}\Delta) = m\frac{X_i}{S}\Delta^i,\end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\left[\begin{aligned}\psi(\alpha^p\Delta) + \alpha^{-i}\psi(\alpha^{p+1}\Delta) + \alpha^{-2i}\psi(\alpha^{p+2}\Delta) + \ldots \\ + \alpha^{-(m-1)i}\psi(\alpha^{p+m-1}\Delta)\end{aligned}\right]^m = m^m\left(\frac{X_i}{S}\right)^m\Delta^{mi}.$$

La première partie de cette équation étant composée de la fonction ψ reste finie pour toutes les valeurs de x; mais la seconde $m^m\left(\frac{X_i}{S}\right)^m\Delta^{mi}$, tant qu'on ne la suppose pas constante, sera infinie ou pour certaines valeurs de x, ou bien pour $x = \infty$, selon que la fonction rationnelle $m^m\left(\frac{X_i}{S}\right)^m\Delta^{mi}$ se réduira à une fraction simple ou à une fonction entière.

Donc on ne pourra supposer aucun terme de la fonction $\psi(\alpha^p\Delta)$ variable, et par conséquent, d'après (7), on aura

$$\varphi(\alpha^p\Delta) = C_p\sqrt[m]{S},$$

où C_p est une constante et S une fonction indépendante de α^p. Or, si l'on prend, d'après cette équation, la valeur des fonctions

$$\varphi(\Delta),\quad \varphi(\alpha\Delta),\quad \varphi(\alpha^2\Delta),\ldots,\quad \varphi(\alpha^{m-1}\Delta),$$

et qu'on les porte dans la formule

$$W = \varphi(\Delta) \,.\, \varphi^{\alpha}(\alpha\Delta) \,.\, \varphi^{\alpha^2}(\alpha^2\Delta) \ldots \varphi^{\alpha^{m-1}}(\alpha^{m-1}\Delta),$$

on trouve

$$W = C_0 \,.\, C_1^{\alpha} \,.\, C_2^{\alpha^2} \ldots C_{m-1}^{\alpha^{m-1}} \,.\, S^{\frac{1+\alpha^2+\alpha^3+\ldots+\alpha^{m-1}}{m}}.$$

Mais la somme

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{m-1}$$

se réduit à o; donc W a une valeur constante.

§ VII.

Ayant démontré que dans la valeur de l'intégrale $\int \frac{fx}{Fx}\frac{dx}{\Delta}$, toutes les fonctions

$$W_{l-\lambda+1}, \quad W_{l-\lambda+2}, \ldots,$$

ne peuvent être que constantes, nous en déduisons que les seuls termes variables sont

$$A_0 \log W_0, \quad A_1 \log W_1, \ldots, \quad A_{l-\lambda} \log W_{l-\lambda},$$

et comme, d'après (6), les coefficients de ces termes sont de la forme

$$\frac{K^{(\lambda+i)}}{n_i},$$

où n_i est un nombre entier, nous concluons que leur nombre ne peut surpasser celui des termes de la série

$$K^0, \quad K', \quad K'', \ldots, \quad K^l,$$

différents de zéro.

En remarquant que l est le nombre des racines de l'équation

$$Fx = o,$$

et que

$$K^0 = \lim \left(\frac{xfx}{Fx\Delta}\right)_{x=\infty}$$

se réduit à o, si le degré de $\frac{fx}{Fx}$ est inférieur à -1, nous parvenons à établir les théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — *Soient $\frac{fx}{Fx}$ une fraction rationnelle, θx un polynôme dont les facteurs sont d'un degré moins élevé que m. Si la valeur de l'intégrale $\int \frac{fx}{Fx} \frac{dx}{\sqrt[m]{\theta x}}$ ne contient que les termes logarithmiques, l'intégrale $\int \frac{fx}{Fx} \frac{dx}{\sqrt[m]{\theta x}}$ est égale à une somme de termes de la forme suivante :*

$$A \log \left[\varphi (\sqrt[m]{\theta x}) \cdot \varphi^{\alpha} (\alpha^2 \sqrt[m]{\theta x}) \cdot \varphi^{\alpha^2} (\alpha^2 \sqrt[m]{\theta x}) \ldots \varphi^{\alpha^{m-1}} (\alpha^{m-1} \sqrt[m]{\theta x}) \right],$$

où $\varphi (\sqrt[m]{\theta x})$ est une fonction entière de x et $\sqrt[m]{\theta x}$; α est une racine primitive de l'équation

$$x^m - 1 = 0,$$

et le nombre de ces termes, suffisants pour donner la valeur de l'intégrale $\int \frac{fx}{Fx} \frac{dx}{\sqrt[m]{\theta x}}$, ne surpassera pas le degré de Fx, la fonction $\frac{fx}{Fx \sqrt[m]{\theta x}}$ étant d'un degré moindre que -1; dans le cas contraire, le nombre de ces termes ne surpassera le degré de Fx que d'une unité.

Dans le cas où $Fx = 1$, le théorème précédent se réduit à celui-ci :

THÉORÈME II. — *Si fx, θx étant des fonctions entières, θx ne contient que des facteurs de degrés inférieurs à m, l'intégrale $\int \frac{fx}{\sqrt[m]{\theta x}} dx$ s'exprimant d'ailleurs par les seuls termes logarithmiques, sera réductible à la formule*

$$A \log \left[\varphi (\sqrt[m]{\theta x}) \cdot \varphi^{\alpha} (\alpha \sqrt[m]{\theta x}) \cdot \varphi^{\alpha^2} (\alpha^2 \sqrt[m]{\theta x}) \ldots \varphi^{\alpha^{m-1}} (\alpha^{m-1} \sqrt[m]{\theta x}) \right],$$

où $\varphi (\sqrt[m]{\theta x})$ est une fonction entière de x et $\sqrt[m]{\theta x}$, et α est une racine primitive de l'équation

$$x^m - 1 = 0.$$

Dans le cas de $m = 2$, nous obtenons le théorème de M. Abel, cité dans le § I.

THÉORÈME III. — *L'intégrale* $\int \frac{fx}{\sqrt[m]{\theta x}} dx$ *n'est pas réductible aux fonctions algébrique et logarithmique, si* θx *n'a pas de facteur multiple d'un degré plus élevé que* $m - 1$, *et si la fonction* fx *est d'un degré moins élevé que* $\frac{\sqrt[m]{\theta x}}{x}$.

En effet, si l'on suppose que $\int \frac{fx}{\sqrt[m]{\theta x}} dx$ est réductible aux fonctions algébrique et logarithmique, d'après le § I, on parvient à conclure que sa valeur n'a point de terme algébrique. La même chose a lieu par rapport aux termes logarithmiques; car la différentielle $\frac{fx}{\sqrt[m]{\theta x}} dx$ n'a pour dénominateur que $\sqrt[m]{\theta x}$, et le degré de $\frac{fx}{\sqrt[m]{\theta x}}$ est moins élevé que -1; mais dans ce cas, d'après le théorème I, le nombre de termes logarithmiques suffisant pour donner la valeur de $\int \frac{fx}{\sqrt[m]{\theta x}}$ est o. Donc, si l'on suppose que l'intégrale $\int \frac{fx}{\sqrt[m]{\theta x}} dx$ est réductible aux fonctions algébrique et logarithmique, on sera forcé de conclure que sa valeur est une constante.

Dans le cas de $m = 2$, cela se réduit au théorème donné par M. Liouville.

§ VIII.

A l'aide des théorèmes que nous venons de donner, on peut résoudre entièrement la question de l'intégration en signes algébriques et logarithmiques des différentielles binômes

$$x^s (a + bx^{s'})^{s''} dx,$$

où s, s', s'' sont des nombres rationnels.

L'intégrale de ces différentielles se réduit facilement à la forme

$$\int x^{p-1} (1 + x^q)^{\frac{m'}{m}} dx,$$

où p, q, m, m' sont des nombres entiers et $q > 0$, et l'on trouve, par les méthodes connues, la valeur de cette intégrale, si l'une des deux quantités $\frac{p}{q}$, $\frac{p}{q} + \frac{m'}{m}$ est un nombre entier. Dans le cas contraire, cette intégrale se réduit à la forme

$$\mathrm{U}_0 + \int \frac{x^{p'-1}}{(1+x^q)^{\frac{m''}{m}}}\,dx,$$

où U_0 est une fonction algébrique, p' est le plus petit nombre positif congru à p selon le module q, et m'' le plus petit nombre congru à $-m'$ selon le module m, ce qui suppose

$$p' < q, \quad m'' < m.$$

Pour trouver le terme algébrique dans la valeur de l'intégrale $\int \frac{x^{p'-1}}{(1+x^q)^{\frac{m''}{m}}}\,dx$, d'après le § I, on cherche le plus grand commun diviseur entre les fonctions $(1-x^q)^{m''}$ et $\frac{d(1+x^q)^{m''}}{dx}$. Ce diviseur étant $(1+x^q)^{m''-1}$, on conclut que le terme algébrique doit avoir pour dénominateur la fonction $(1+x^q)^{m''-1}$.

Mais, en examinant les fonctions

$$\frac{x^{p'-1}(1+x^q)^{m''-1}}{(1+x^q)^{m''}}, \qquad \frac{(1+x^q)^{m''-1}}{x(1+x^q)^{m''.\frac{m-1}{m}}},$$

où, comme nous avons vu, $p' < q$, $m'' < m$, $q < 0$, on trouve que leur degré est au-dessous de -1; ce qui, d'après le § I, prouve qu'il n'y a pas de terme algébrique dans la valeur de l'intégrale $\int \frac{x^{p'-1}}{(1+x^q)^{\frac{m''}{m}}}\,dx$.

Donc il ne reste plus qu'à chercher l'expression de sa valeur à l'aide des seuls termes logarithmiques. Mais une telle expression, d'après le

§ III, n'est possible que dans le cas où le degré de $\dfrac{x^{p'-1}}{(1+x^q)^{\frac{m''}{m}}}$ ne se trouve pas au-dessus de -1, et, par suite, du dernier théorème que nous venons de montrer, ce degré ne doit pas être au-dessous de -1. Par conséquent, l'intégration de $\dfrac{x^{p'-1}}{(1+x^q)^{\frac{m''}{m}}}dx$, à l'aide des signes algébriques et logarithmiques, n'est pas possible, à moins que la fonction $\dfrac{x^{p'-1}}{(1+x^q)^{\frac{m''}{m}}}$ ne soit précisément du degré -1; ce qui entraîne cette équation entre les exposants p', q, $\dfrac{m''}{m}$:

$$\frac{p'}{q}-\frac{m''}{m}=0;$$

Mais en passant au nombre p et m', dont le premier est congru à p' selon le module q, et le second à $-m'$ selon le module m, nous trouvons que l'équation précédente suppose que $\dfrac{p}{q}+\dfrac{m'}{m}$ est un nombre entier. Donc, outre ce cas et celui où p est divisible par q, l'intégrale

$$\int x^{p-1}(1+x^q)^{\frac{m'}{m}}dx$$

présente une transcendante particulière; c'est ce qu'il s'agissait de démontrer pour être sûr que les méthodes ordinaires de l'intégration des différentielles binômes avec les exposants rationnels, comprennent tous les cas où cette intégration est possible en signes algébriques et logarithmiques.

§ IX.

D'après ce que nous avons trouvé dans les §§ IV, V et VI, on conclut qu'en général le nombre de termes logarithmiques suffisant pour donner la valeur de l'intégrale $\int\frac{fx}{Fx}\frac{dx}{\Delta}$ est $l-\lambda+1$, où l indique le degré de Fx, et λ le nombre des équations (4). De plus, nous avons vu que l'intégrale $\int \frac{fx}{Fx} \frac{dx}{\Delta}$ peut être réduite de manière que, dans l'équation

$$\int \frac{fx}{Fx} \frac{dx}{\Delta} = A_0 \log W_0 + A_1 \log W_1 + A_2 \log W_2 + \ldots,$$

tous les termes soient de la forme

$$\frac{K^{(\lambda+i)}}{n_i} \log W_i,$$

où n_i est un nombre entier non complexe;

$$W_i = \varphi_i(\Delta) \cdot \varphi_i^{\alpha}(\alpha\Delta) \cdot \varphi_i^{\alpha^2}(\alpha^2\Delta) \ldots \varphi^{\alpha^{m-1}}(\alpha^{m-1}\Delta)$$

est du degré $M_i^0 . n_i$, et, pour toutes les valeurs finies de x, reste en rapport fini avec la fonction

$$\left[(x-x')^{M_i'} . (x-x'')^{M_i''} . (x-x''')^{M_i'''} \ldots (x-x^{(\lambda-1)})^{M_i^{(\lambda-1)}} . (x-x^{(\lambda+i)})\right]^{n_i}.$$

Quant aux nombres $M_i^0, M_i', M_i'', M_i''', \ldots, M_i^{(\lambda-1)}$, ils sont connus d'après les équations (4).

Il n'est pas difficile de s'assurer que, d'après cela, chaque terme de la valeur de l'intégrale $\int \frac{fx}{Fx} \frac{dx}{\Delta}$ est complétement déterminé, c'est-à-dire que, si l'on trouve les nombres

$$n_0, \quad n_1, \quad n_2, \ldots, n_{l-\lambda}$$

et les fonctions

$$W_0, \quad W_1, \quad W_2, \ldots, \quad W_{l-\lambda}$$

qui puissent remplir les conditions mentionnées, la somme

$$\frac{K^{(\lambda)}}{n_0} \log W_0 + \frac{K^{(\lambda+1)}}{n_1} \log W_1 + \frac{K^{(\lambda+2)}}{n_2} \log W_2 + \ldots + \frac{K^{(l)}}{n_{l-\lambda}} \log W_{l-\lambda}$$

sera la valeur de l'intégrale $\int \frac{fx}{Fx} \frac{dx}{\Delta}$, lorsqu'elle peut être exprimée à l'aide des termes logarithmiques.

En effet, si cette somme n'est pas la valeur de l'intégrale $\int \frac{fx}{Fx}\frac{dx}{\Delta}$, supposons que

$$B_0 \log W^0, \quad B_1 \log W', \quad B_2 \log W'', \ldots, \quad B_s \log W^{(s)}$$

soient les termes qu'il faut y ajouter pour la rendre égale à $\int \frac{fx}{Fx}\frac{dx}{\Delta}$.

On aura

$$\int \frac{fx}{Fx}\frac{dx}{\Delta} =$$

$$\frac{K^{(\lambda)}}{n_0}\log W_0 + \frac{K^{(\lambda+1)}}{n_1}\log W_1 + \frac{K^{(\lambda+2)}}{n_2}\log W_2 + \ldots + \frac{K^{(l)}}{n_{l-\lambda}}\log W_{l-\lambda}$$
$$+ B_0 \log W^0 + B_1 \log W' + B_2 \log W'' + \ldots + B_s \log W^{(s)}.$$

Pour cette valeur de l'intégrale $\int \frac{fx}{Fx}\frac{dx}{\Delta}$, les équations (2) et (3) donnent

$$K^0 = \sum_{i=0}^{i=l-\lambda} \mu_i \frac{K^{(\lambda+i)}}{n_i} + \sum_{i=0}^{i=s} \nu_i \, B_i,$$

$$K' = \sum_{i=0}^{i=l-\lambda} N'_i \frac{K^{(\lambda+i)}}{n_i} + \sum_{i=0}^{i=s} P'_i \, B_i,$$

$$K'' = \sum_{i=0}^{i=l-\lambda} N''_i \frac{K^{(\lambda+i)}}{n_i} + \sum_{i=0}^{i=s} P''_i \, B_i,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$K^{(l)} = \sum_{i=0}^{i=l-\lambda} N^{(l)}_i \frac{K^{(\lambda+i)}}{n_i} + \sum_{i=0}^{i=s} P^{(l)}_i \, B_i,$$

où ν_i, P'_i, P''_i, $P'''_i, \ldots,$ $P^{(l)}_i$ sont les nombres complexes de α qui jouent le même rôle par rapport à la fonction W^i, que les nombres μ_i, N'_i, N''_i, $N'''_i, \ldots,$ $N^{(l)}_i$ par rapport à la fonction W_i.

Mais pour les valeurs trouvées de μ_i, N'_i, N''_i, N'''_i, ..., $N_i^{(l)}$ (§ V), on a, comme il n'est pas difficile de s'en assurer, les égalités suivantes :

$$K^0 = \sum_{i=0}^{i=l-\lambda} \mu_i \frac{K^{(\lambda+i)}}{n_i},$$

$$K^{(1)} = \sum_{i=0}^{i=l-\lambda} N'_i \frac{K^{(\lambda+i)}}{n_i},$$

$$K^{(2)} = \sum_{i=0}^{i=l-\lambda} N''_i \frac{K^{(\lambda+2)}}{n_i},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$K^{(l)} = \sum_{i=0}^{i=l-\lambda} N_i^{(l)} \frac{K^{(\lambda+l)}}{n_i}.$$

Par conséquent, les équations précédentes donnent

$$\sum_{i=0}^{i=s} \nu_i B_i = 0, \qquad \sum_{i=0}^{i=s} P'_i B_i = 0,$$

$$\sum_{i=0}^{i=s} P''_i B_i = 0, \ldots, \qquad \sum_{i=0}^{i=s} P_i^{(l)} B_i = 0,$$

qui doivent être identiques par rapport à B_0, B_1, B_2, ..., B_s, lorsque la somme

$$B_0 \log W^0 + B_1 \log W' + B_2 \log W'' + \ldots + B_s \log W^{(s)}$$

est réduite au plus petit nombre de termes (§ II). Donc on aura

$$\nu_i = 0, \quad P'_i = 0, \quad P_i = 0, \ldots, \quad P_i^{(l)} = 0,$$

ce qui, d'après le § VI, nous fait conclure que chacun des termes

$$B_0 \log W_0, \quad B_1 \log W_1, \quad B_2 \log W_2, \ldots, \quad B_s \log W_s$$

ne peut être que constant.