JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

OSSIAN BONNET

Thèse d'astronomie. Sur la théorie mathématique des cartes géographiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 17 (1852), p. 301-340.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1852_1_17__301_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

THÈSE D'ASTRONOMIE.

Sur la Théorie mathématique des Cartes géographiques;

Par M. Ossian BONNET.

INTRODUCTION.

Une carte géographique n'est autre chose qu'une représentation sur une surface déterminée, que l'on suppose ordinairement plane, de la surface de la terre ou de l'une de ses parties. Cette représentation peut être faite suivant une loi quelconque; toutefois, dans les premières cartes qu'on a construites, elle a toujours été soumise aux règles de la perspective. Les cartes étaient ainsi de simples projections coniques ou cylindriques, et les différences qui existaient entre elles, provenaient de la position donnée à l'œil et au plan de projection. On connaît ces différentes cartes, dont les plus remarquables sont dues à Ptolémée. Plus tard, quelques astronomes abandonnèrent le mode de représentation par perspective, qui avait dû se présenter tout naturellement à l'esprit, mais que rien n'obligeait à suivre, et ils regardèrent les lignes correspondantes aux méridiens et aux parallèles, comme des lignes tout à fait quelconques que l'on pouvait, dans chaque cas, choisir arbitrairement, suivant la destination de la carte. C'est ainsi que furent construites les cartes marines réduites ou par latitudes croissantes, dans lesquelles on s'imposait la condition que les rumbs de vent fussent représentés par des droites faisant entre elles les mêmes angles que ces rumbs faisaient dans la rose de compas. Enfin, Lambert envisagea la théorie des cartes géographiques sous un point de vue général extrêmement important. Il remarqua que le plus grand degré de perfection d'une carte était de reproduire la figure des différentes parties de la carte, de manière qu'il y eût constamment similitude entre une partie quelconque de la terre et la partie correspondante de la carte; mais cette condition étant généralement impossible à remplir, à moins de supposer à la surface de la carte une forme particulière, Lambert se proposa de déterminer les lignes des méridiens et des parallèles par la condition que la similitude eût lieu seulement entre les éléments infiniment petits. Sans doute, de cette manière, une portion finie de la terre était déformée sur la carte, mais les angles faits sur la carte étaient toujours égaux aux angles correspondants sur la surface du globe, propriété importante que l'on avait reconnue au système de représentation de Ptolémée. Lambert ne résolut pas d'une manière complète le problème général qu'il s'était posé; après lui, plusieurs géomètres, Euler, Lagrange, s'occupèrent avec succès de la question, mais en supposant toujours à la terre la forme d'une sphère ou tout au plus d'une surface de révolution; ce fut M. Gauss qui, dans un Mémoire couronné par l'Académie de Copenhague, résolut, le premier, le problème dans toute sa généralité et sans faire aucune hypothèse sur la surface de la terre et sur celle de la carte. Nous nous proposons, dans cette Thèse, d'exposer la théorie des cartes géographiques au point de vue indiqué par Lambert. Notre travail n'offre rien d'essentiellement nouveau. Nous n'avons eu d'autre but que de simplifier les solutions des questions traitées avant nous par Lagrange, Euler, M. Gauss.

---

1. Soient deux surfaces quelconques S et S′ représentant la surface de la terre et celle de la carte. Supposons que l'on ait exprimé les trois coordonnées x, y, z rectangulaires d'un point quelconque m de la surface S, en fonction de deux variables indépendantes u et v, et les coordonnées x', y', z' d'un point m' de la surface S′, au moyen de deux autres variables u' et v'; de telle sorte que la première surface soit définie par trois équations de la forme

$$(1)\qquad x = f(u, v),\quad y = f_1(u, v),\quad z = f_2(u, v),$$

et la seconde par trois équations telles que

$$(2)\qquad x' = \varphi(u', v'),\quad y' = \varphi_1(u', v'),\quad z' = \varphi_2(u', v');$$

il s'agira de faire correspondre les points m et m' ou de déterminer u'

et v' en fonction de u et de v, de façon qu'un élément $m'm'_1$ de la surface S' ait, avec l'élément correspondant mm_1 de la surface S, un rapport indépendant de la direction de ces éléments et variable seulement avec la position des points m et m'.

2. Différentiant les équations (1), on trouve aisément que l'élément de la surface S, qui se termine aux points (u, v), $(u + du, v + dv)$, est

$$ds = \sqrt{\mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2},$$

en posant

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2 = \mathrm{E},$$

$$\frac{dx}{du}\frac{dx}{dv} + \frac{dy}{du}\frac{dy}{dv} + \frac{dz}{du}\frac{dz}{dv} = \mathrm{F},$$

$$\left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dv}\right)^2 = \mathrm{G};$$

de même, l'élément de la surface S', qui se termine aux points (u', v'), $(u' + du', v' + dv')$, est

$$ds' = \sqrt{\mathrm{E}'\,du'^2 + 2\mathrm{F}'\,du'\,dv' + \mathrm{G}'\,dv'^2},$$

en posant

$$\left(\frac{dx'}{du'}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{du'}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{du'}\right)^2 = \mathrm{E}',$$

$$\frac{dx'}{du'}\frac{dx'}{dv'} + \frac{dy'}{du'}\frac{dy'}{dv'} + \frac{dz'}{du'}\frac{dz'}{dv'} = \mathrm{F}',$$

$$\left(\frac{dx'}{dv'}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dv'}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dv'}\right)^2 = \mathrm{G}'.$$

L'équation du problème devient ainsi

$$(3) \qquad \frac{\mathrm{E}'\,du'^2 + 2\mathrm{F}'\,du'\,dv' + \mathrm{G}'\,dv'^2}{\mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2} = n^2,$$

n^2 étant une certaine fonction de u et de v. Pour pouvoir déduire de cette équation les valeurs de u' et v', il faut d'abord la simplifier, en particularisant les variables u, v, u' et v'. Nous choisirons ces variables de manière que l'on ait

$$\mathrm{E} = 0, \quad \mathrm{G} = 0, \quad \mathrm{E}' = 0, \quad \mathrm{G}' = 0.$$

Mais prouvons d'abord qu'il existe de telles variables et montrons comment on peut les obtenir.

3. Je considère l'équation différentielle

$$(4)\qquad E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = 0,$$

et je suppose qu'on en ait déduit une intégrale contenant une constante arbitraire. Soit

$$F(u, v) = C$$

cette intégrale résolue par rapport à la constante. Évidemment la fonction $F(u, v)$ sera imaginaire, car les valeurs de $\frac{dv}{du}$ déduites de l'équation (4) sont imaginaires; nous pouvons donc poser

$$F(u, v) = U + V\sqrt{-1},$$

U et V étant des fonctions réelles de u et de v, et notre intégrale deviendra

$$U + V\sqrt{-1} = C.$$

Cette intégrale renfermant, par hypothèse, une constante arbitraire, si on la différentie et qu'on tire $\frac{dv}{du}$, on trouvera une valeur qui devra être identiquement égale, quels que soient u et v, à l'une des deux valeurs de $\frac{dv}{du}$, que l'on déduit de l'équation (4); quant à l'autre valeur, comme elle est conjuguée de la première, elle sera évidemment fournie par l'équation

$$dU - dV\sqrt{-1} = 0.$$

Nous pouvons conclure de là que l'on a identiquement

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = M(dU^2 + dV^2),$$

M étant une certaine fonction de u et de v. Posant maintenant

$$U + V\sqrt{-1} = \alpha, \quad U - V\sqrt{-1} = \beta,$$

α et β étant de nouvelles variables, on aura

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = \mu\,d\alpha\,d\beta,$$

μ étant ce que devient M quand on y remplace u et v par leurs valeurs en α et β.

Ainsi, en prenant les variables α et β, l'élément de la surface S a la forme que nous voulions obtenir. Appelant de même

$$U' + V'\sqrt{-1} = C'$$

une intégrale quelconque de l'équation

$$E'du'^2 + 2F'du'dv' + G'dv'^2 = 0, \tag{5}$$

nous verrions que le carré de l'élément de la surface S' peut se mettre sous la forme $M'(dU'^2 + dV'^2)$, et puis, en posant

$$U' + V'\sqrt{-1} = \alpha', \quad U' - V'\sqrt{-1} = \beta',$$

sous la forme voulue $\mu' d\alpha' d\beta'$; introduisant dans l'équation (3) les variables α, β, α', β', cette équation devient

$$\mu' d\alpha' d\beta' = n^2 \mu\, d\alpha d\beta,$$

et rien n'est plus simple maintenant que d'obtenir α' et β'.

4. En effet, remplaçons $d\alpha'$ par $\frac{d\alpha'}{d\alpha}\,d\alpha + \frac{d\alpha'}{d\beta}\,d\beta$, et $d\beta'$ par $\frac{d\beta'}{d\alpha}\,d\alpha + \frac{d\beta'}{d\beta}\,d\beta$, il vient

$$\frac{d\alpha'}{d\alpha}\frac{d\beta'}{d\alpha}d\alpha^2 + \frac{d\alpha'}{d\beta}\frac{d\beta'}{d\beta}d\beta^2 + \left(\frac{d\alpha'}{d\alpha}\frac{d\beta'}{d\beta} + \frac{d\alpha'}{d\beta}\frac{d\beta'}{d\alpha}\right)d\alpha d\beta = n^2\frac{\mu}{\mu'}\,d\alpha d\beta,$$

d'où

$$\frac{d\alpha'}{d\alpha}\frac{d\beta'}{d\alpha} = 0, \quad \frac{d\alpha'}{d\beta}\frac{d\beta'}{d\beta} = 0,$$

et, par conséquent,

$$\frac{d\alpha'}{d\beta} = 0, \quad \frac{d\beta'}{d\alpha} = 0,$$

ou

$$\frac{d\alpha'}{d\alpha} = 0, \quad \frac{d\beta'}{d\beta} = 0;$$

c'est-à-dire, en intégrant,

$$\alpha' = F(\alpha), \quad \beta' = F_1(\beta).$$

$$\alpha' = \Phi(\beta), \quad \beta' = \Phi_1(\alpha).$$

5. Nous aurions pu obtenir les résultats précédents en exprimant une autre propriété du système de représentation considéré, d'après laquelle l'angle de deux éléments quelconques de la surface S est toujours égal à l'angle des deux éléments correspondants de la surface S'.

Prenons, pour définir les différents points des deux surfaces S et S', les variables U, V et U', V'; de manière que pour l'une et l'autre surface, les lignes coordonnées forment deux systèmes orthogonaux, divisant la surface en carrés. Le cosinus de l'angle compris entre les éléments mm_1, mm_2 de la première surface, qui partent du point (U, V) et se terminent respectivement aux points $(U + dU, V + dV)$, $(U + \delta U, V + \delta V)$, sera, en laissant le signe de côté,

$$\frac{dV\,\delta U - dU\,\delta V}{\sqrt{(dU^2 + dV^2)(\delta U^2 + \delta V^2)}};$$

de même, le cosinus de l'angle formé par les éléments $m'm'_1$, $m'm'_2$ correspondants de la seconde surface, sera

$$\frac{dV'\,\delta U' - dU'\,\delta V'}{\sqrt{(dU'^2 + dV'^2)(\delta U'^2 + \delta V'^2)}};$$

nous aurons donc, pour l'équation du problème,

$$\frac{dV\,\delta U - dU\,\delta V}{\sqrt{(dU^2 + dV^2)(\delta U^2 + \delta V^2)}} = \frac{dV'\,\delta U' - dU'\,\delta V'}{\sqrt{(dU'^2 + dV'^2)(\delta U'^2 + \delta V'^2)}},$$

ou bien, en introduisant les variables α, β, α', β',

$$\frac{d\beta\,\delta\alpha - d\alpha\,\delta\beta}{\sqrt{d\alpha\, d\beta\,\delta\alpha\,\delta\beta}} = \frac{d\beta'\,\delta\alpha' - d\alpha'\,\delta\beta'}{\sqrt{d\alpha'\,d\beta'\,\delta\alpha'\,\delta\beta'}},$$

d'où

$$d\alpha'\,d\beta'\,\delta\alpha'\,\delta\beta'\,(d\beta\,\delta\alpha - d\alpha\,\delta\beta)^2 = d\alpha\, d\beta\,\delta\alpha\,\delta\beta\,(d\beta'\,\delta\alpha' - d\alpha'\,\delta\beta')^2.$$

Posons

$$\delta\alpha' = \frac{d\alpha'}{d\alpha}\delta\alpha + \frac{d\alpha'}{d\beta}\delta\beta, \quad \delta\beta' = \frac{d\beta'}{d\alpha}\delta\alpha + \frac{d\beta'}{d\beta}\delta\beta,$$

et supposant fixes les éléments mm_1, $m'm'_1$, faisons varier les éléments

mm_2, $m'm'_2$; c'est-à-dire, supposant $d\alpha$, $d\beta$, $d\alpha'$, $d\beta'$ constants, faisons varier $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\alpha'$, $\delta\beta'$. L'égalité ci-dessus étant une identité, il ne pourra y avoir dans le premier membre d'autres termes en $\delta\alpha$ et $\delta\beta$ que ceux qui se trouvent dans le second ; ainsi les termes en $\delta\alpha^4$ et $\delta\beta^4$ du premier membre devront disparaître, ce qui exige que

$$\frac{d\alpha'}{d\alpha}\,\frac{d\beta'}{d\alpha} = 0, \qquad \frac{d\alpha'}{d\beta}\,\frac{d\beta'}{d\beta} = 0,$$

d'où

$$\frac{d\alpha'}{d\beta} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\beta'}{d\alpha} = 0,$$

ou bien

$$\frac{d\alpha'}{d\alpha} = 0, \quad \frac{d\beta'}{d\beta} = 0;$$

et, en intégrant,

$$\alpha' = F(\alpha) \quad \text{et} \quad \beta' = F_1(\beta),$$

ou bien

$$\alpha' = \Phi(\beta) \quad \text{et} \quad \beta' = \Phi_1(\alpha),$$

comme nous l'avions déjà obtenu.

6. Avant de particulariser les fonctions F et F_1 ou Φ et Φ_1, pour déduire de ce qui précède quelques systèmes de représentation, il est nécessaire de faire deux remarques importantes.

7. Substituons à α, β, α' et β' leurs valeurs en U, V, U' et V'; les deux solutions de notre problème deviendront

$$\left\{\begin{aligned} U' + V'\sqrt{-1} &= F\left(U + V\sqrt{-1}\right), \\ U' - V'\sqrt{-1} &= F_1\left(U - V\sqrt{-1}\right), \end{aligned}\right. \tag{6}$$

et

$$\left\{\begin{aligned} U' + V'\sqrt{-1} &= \Phi\left(U - V\sqrt{-1}\right), \\ U' - V'\sqrt{-1} &= \Phi_1\left(U + V\sqrt{-1}\right). \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Or, U' et V' devant être réels comme U et V, les deux fonctions F_1 et Φ_1 ne peuvent pas être prises arbitrairement, une fois que les fonctions F et Φ ont été fixées. Il faut évidemment, si la fonction F est réelle, que F_1 soit la même fonction ; et si F est une fonction imaginaire, que F_1 soit la fonction imaginaire conjuguée obtenue en changeant $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$ dans la première; il en est de même de la fonction Φ_1 à l'égard de Φ. Ainsi chacune de nos solutions ne contient qu'une fonction arbitraire, qui peut toutefois être imaginaire aussi bien que réelle.

8. Nous avons obtenu deux solutions pour notre problème. Ces solutions conviennent toutes les deux, mais elles se distinguent l'une de l'autre en ce que l'une correspond à une similitude directe entre les éléments superficiels des deux surfaces, et l'autre à une similitude inverse. Entrons à ce sujet dans quelques développements. Une surface représentée, en général, par l'équation $f(x, y, z) = 0$, partage l'espace en deux régions : l'une, qu'on peut appeler extérieure à la surface pour laquelle $f(x, y, z)$, est positif; l'autre, que l'on nomme région intérieure, pour laquelle $f(x, y, z)$ est négatif. Si l'on se place dans la région extérieure, on voit les éléments de la surface issus d'un même point m disposés d'une certaine manière; et si l'on se place dans la région intérieure, on voit les mêmes éléments disposés d'une manière inverse; de telle sorte que si de deux éléments mm_1, mm_2, le second paraît à droite pour un spectateur situé dans la région externe de la surface, inversement pour un spectateur situé dans la partie intérieure, l'élément mm_2 paraîtra à gauche de mm_1. Ceci posé, plaçons-nous, par rapport à chacune des surfaces S et S', dans une région déterminée; soient mm_1, mm_2 deux éléments de la surface S partant du point m, et $m'm'_1$, $m'm'_2$ les deux éléments correspondants de la surface S', déterminés au moyen des solutions trouvées plus haut; pour les deux solutions on aura

$$\frac{mm_1}{m'm'_1} = \frac{mm_2}{m'm'_2}, \qquad \text{angle } m_1mm_2 = \text{angle } m'_1m'm'_2;$$

mais, pour l'une, $m'm'_2$ nous paraîtra à gauche ou à droite de $m'm'_1$, selon que mm_2 sera lui-même à gauche ou à droite de mm_1; et, pour l'autre, ce sera l'inverse, $m'm'_2$ nous paraîtra à droite ou à gauche de $m'm'_1$, selon que mm_2 sera à gauche ou à droite de mm_1. Ainsi, dans les deux cas, les deux triangles mm_1m_2, $m'm'_1m'_2$ sont semblables, mais la similitude est directe dans le premier cas, et inverse dans le second. Quant à la solution qui correspond à la similitude directe, on comprend qu'elle dépend uniquement de la manière dont on se place par rapport aux surfaces.

Démontrons la propriété que nous venons d'énoncer, et donnons un critérium certain pour reconnaître le genre de similitude qui correspond à une solution déterminée.

9. Appelons

$$f(x, y, z) = 0, \quad \varphi(x', y', z') = 0$$

les équations des surfaces S et S', et plaçons-nous, par rapport à chacune des surfaces, dans la région extérieure, c'est-à-dire dans la région pour laquelle le premier membre de son équation est positif. Enfin, supposons que l'on adopte la première solution obtenue au n° 5, c'est-à-dire qu'on lie les points de la première surface à ceux de la seconde par la relation

$$U' + V'\sqrt{-1} = F(U + V\sqrt{-1})$$

et par la relation conjuguée

$$U' - V'\sqrt{-1} = F_1(U - V\sqrt{-1}).$$

Pour pouvoir comparer plus facilement les figures formées par les points m ou (x, y, z) de la première surface aux figures formées par les points correspondants m' ou (x', y', z') de la seconde, nous considérerons six autres systèmes de points intermédiaires, tous situés dans le plan des xy : le système des points μ ayant pour coordonnées rectangulaires $(x, y, 0)$; le système des points ν ayant pour coordonnées rectangulaires $(u, v, 0)$; le système des points π ayant pour coordonnées $(U, V, 0)$; le système des points π' ayant pour coordonnées $(U', V', 0)$; le système des points ν' ayant pour coordonnées $(u', v', 0)$; enfin le système des points μ' ayant pour coordonnées $(x', y', 0)$. Ces nouveaux systèmes de points considérés entre eux, ou avec les systèmes de points m et m', ne donneront pas nécessairement des systèmes semblables dans leurs éléments infiniment petits, mais deux de ces systèmes pourront être semblablement ou inversement placés; je veux dire par là que, dans deux systèmes, les éléments linéaires issus d'un même point pourront paraître placés de la même manière ou d'une manière inverse. A ce point de vue, nous pourrons donc comparer le système des points m au système des points μ, le système des points μ au système des points ν, ainsi de suite; et cela nous permettra de décider si la similitude qui existe entre les éléments superficiels formés par les deux systèmes de points m et m' est directe ou inverse. Ajoutons, pour qu'il n'y ait aucune ambiguïté, que les systèmes de points situés dans le plan des xy sont toujours vus du côté où se trouvent les z positifs. En comparant les deux systèmes de points m et μ, on reconnaît aisément qu'ils paraissent semblablement ou inversement placés, selon que, pour passer de la surface S à sa région extérieure par un déplacement parallèle à l'axe des z, il faut augmenter ou diminuer le z du point de la surface, ou bien si $e\,dx + f\,dy + g\,dz$ est la différentielle totale du premier membre $f(x, y, z)$ de l'équation de S, selon que g est positif ou négatif; de même les systèmes des points m' et μ' paraissent semblablement ou inversement placés, selon que

$$g' = \frac{d\varphi(x', y', z')}{dz}$$

est positif ou négatif. Considérons maintenant les deux systèmes de points μ et ν. Soient ds la distance des deux points infiniment voisins (x, y), $(x + dx, y + dy)$ du premier système, et a l'angle positif que cette distance prolongée du premier vers le second point fait avec la partie positive des x, de manière que

$$dx = ds\cos a, \quad dy = ds\sin a.$$

Soient de même $d\sigma$ la distance des deux points correspondants (u, v), $(u + du, v + dv)$ du second système, et α l'angle positif que cette distance prolongée du premier vers le second point fait avec la partie positive des x, de manière que

$$du = d\sigma\cos\alpha, \quad dv = d\sigma\sin\alpha;$$

nous tirerons de là, en remarquant que x et y sont des fonctions connues de u et v,

$$ds\cos a = \left(\frac{dx}{du}\cos\alpha + \frac{dx}{dv}\sin\alpha\right)d\sigma,$$

$$ds\sin a = \left(\frac{dy}{du}\cos\alpha + \frac{dy}{dv}\sin\alpha\right)d\sigma;$$

d'où

$$\operatorname{tang} a = \frac{\frac{dy}{du}\cos\alpha + \frac{dy}{dv}\sin\alpha}{\frac{dx}{du}\cos\alpha + \frac{dx}{dv}\sin\alpha};$$

regardant x et y comme constantes, et a et α comme variables, la différentiation donne

$$\frac{da}{d\alpha} = \frac{\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}}{\left(\frac{dx}{du}\cos\alpha + \frac{dx}{dv}\sin\alpha\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\cos\alpha + \frac{dy}{dv}\sin\alpha\right)^2}$$

$$= \left(\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right)\frac{d\sigma^2}{ds^2}.$$

Cela nous montre que les angles a et α varient dans le même sens ou en sens inverse, selon que $\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}$ est positif ou négatif; par conséquent, que les systèmes des points μ et ν paraissent semblablement ou inversement placés, selon que $\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}$ est positif ou négatif. On verrait, par un raisonnement analogue, que les systèmes des points ν et π paraissent semblablement ou inversement placés, selon que $\frac{dU}{du}\frac{dV}{dv} - \frac{dU}{dv}\frac{dV}{du}$ est positif ou négatif; que les systèmes des points π et π' paraissent semblablement ou inversement placés, selon que $\frac{dU'}{dU}\frac{dV'}{dV} - \frac{dU'}{dV}\frac{dV'}{dU}$ est positif ou négatif; que les systèmes des points π' et ν' paraissent semblablement ou inversement placés, selon que $\frac{dU'}{du'}\frac{dV'}{dv'} - \frac{dU'}{dv'}\frac{dV'}{du'}$ est positif ou négatif; enfin, que les systèmes des points μ' et ν' paraissent semblablement ou inversement placés, selon que $\frac{dx'}{du'}\frac{dy'}{dv'} - \frac{dx'}{dv'}\frac{dy'}{du'}$ est positif ou négatif. Réunissant tous ces résultats entre eux et à ceux qui ont été obtenus relativement aux systèmes de points m et μ, m' et μ', on voit qu'en définitive les deux systèmes de points m et m' sont semblablement ou inversement placés, selon que le produit

$$\frac{df\,d\varphi}{dz\,dz'}\left(\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv}-\frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{dx'}{du'}\frac{dy'}{dv'}-\frac{dx'}{dv'}\frac{dy'}{du'}\right)\left(\frac{d\mathrm{U}}{du}\frac{d\mathrm{V}}{dv}-\frac{d\mathrm{U}}{dv}\frac{d\mathrm{V}}{du}\right)\left(\frac{d\mathrm{U}'}{du'}\frac{d\mathrm{V}'}{dv'}-\frac{d\mathrm{U}'}{dv'}\frac{d\mathrm{V}'}{du'}\right)\left(\frac{d\mathrm{U}'}{d\mathrm{U}}\frac{d\mathrm{V}'}{d\mathrm{V}}-\frac{d\mathrm{U}'}{d\mathrm{V}}\frac{d\mathrm{V}'}{d\mathrm{U}}\right)$$

est positif ou négatif. On peut remarquer que, dans ce produit, les six premiers facteurs ne dépendent que des surfaces considérées et nullement de la liaison que l'on suppose exister entre les deux systèmes de points m et m' situés sur ces surfaces. Il suffira donc d'avoir égard au septième facteur $\frac{d\mathrm{U}'}{d\mathrm{U}}\frac{d\mathrm{V}'}{d\mathrm{V}}-\frac{d\mathrm{U}'}{d\mathrm{V}}\frac{d\mathrm{V}'}{d\mathrm{U}}$ pour connaître l'influence de cette liaison. Or, si l'on a

$$\mathrm{U}'+\mathrm{V}'\sqrt{-1}=\mathrm{F}\left(\mathrm{U}+\mathrm{V}\sqrt{-1}\right),$$

on trouve aisément

$$\frac{d\mathrm{U}'}{d\mathrm{U}}\frac{d\mathrm{V}'}{d\mathrm{V}}-\frac{d\mathrm{U}'}{d\mathrm{V}}\frac{d\mathrm{V}'}{d\mathrm{U}}=\left(\frac{d\mathrm{U}'}{d\mathrm{U}}\right)^2+\left(\frac{d\mathrm{U}'}{d\mathrm{V}}\right)^2,$$

et, par conséquent, un résultat positif. Si

$$\mathrm{U}'+\mathrm{V}'\sqrt{-1}=\Phi\left(\mathrm{U}-\mathrm{V}\sqrt{-1}\right),$$

on trouve

$$\frac{d\mathrm{U}'}{d\mathrm{U}}\frac{d\mathrm{V}'}{d\mathrm{V}}-\frac{d\mathrm{U}'}{d\mathrm{V}}\frac{d\mathrm{V}'}{d\mathrm{U}}=-\left(\frac{d\mathrm{U}'}{d\mathrm{U}}\right)^2-\left(\frac{d\mathrm{U}'}{d\mathrm{V}}\right)^2,$$

et, par conséquent, un résultat négatif. Cela montre, comme nous l'avions annoncé, que des deux solutions obtenues au n° 5, l'une donne une similitude directe, l'autre une similitude inverse. On voit, en même temps, que la première solution, quand on se place dans la région extérieure pour l'une et l'autre surface, correspond à la similitude directe ou à la similitude inverse, selon que le produit

$$\frac{df\,d\varphi}{dz\,dz'}\left(\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv}-\frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{dx'}{du'}\frac{dy'}{dv'}-\frac{dx'}{dv'}\frac{dy'}{du'}\right)\left(\frac{d\mathrm{U}}{du}\frac{d\mathrm{V}}{dv}-\frac{d\mathrm{U}}{dv}\frac{d\mathrm{V}}{du}\right)\left(\frac{d\mathrm{U}'}{du'}\frac{d\mathrm{V}'}{dv'}-\frac{d\mathrm{U}'}{dv'}\frac{d\mathrm{V}'}{du'}\right)$$

est positif ou négatif.

10. Reprenons les solutions générales du problème de Lambert obtenues au n° 5, et comme la seconde solution se déduit de la première, en changeant $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$ dans les seconds membres, bornons-nous à considérer la première :

$$(5)\qquad \begin{cases} U' + V'\sqrt{-1} = F(U + V\sqrt{-1}), \\ U' - V'\sqrt{-1} = F_1(U - V\sqrt{-1}), \end{cases}$$

où, d'après la remarque faite au n° **7**, F_1 représente la fonction conjuguée de F.

Proposons-nous de trouver le rapport d'agrandissement n en fonction de u et de v.

Différentiant les équations (5), on trouve aisément

$$dU'^2 + dV'^2 = F'(U + V\sqrt{-1})\, F'_1(U - V\sqrt{-1})(dU^2 + dV^2),$$

en appelant F' la dérivée de F et F'_1 celle de F_1. Or les carrés des éléments des surfaces S et S' sont respectivement

$$M(dU^2 + dV^2), \quad M'(dU'^2 + dV'^2),$$

M et M' étant des fonctions connues, la première de U et V, la seconde de U' et V'; donc le rapport des carrés de ces éléments ou n^2 sera

$$\frac{M'}{M} F'(U + V\sqrt{-1})\, F'_1(U - V\sqrt{-1});$$

par conséquent,

$$n = \sqrt{\frac{M'}{M} F'(U + V\sqrt{-1})\, F'_1(U - V\sqrt{-1})}.$$

Substituant dans M', à la place de U' et V', leurs valeurs déduites des équations (5), et puis exprimant U et V en u et v, la question se trouvera résolue.

11. Cherchons encore, avant de sortir des généralités, la relation qui existe entre les courbures géodésiques de deux courbes correspondantes tracées sur les surfaces S et S', relation qui nous sera utile dans la suite. Soient A une courbe quelconque tracée sur la surface S, et A' la courbe correspondante tracée sur la surface S'. Appelons ds l'élément de la première courbe, ds' l'élément correspondant de la seconde, de manière que

$$ds' = n\,ds.$$

Prenons les différentielles des deux membres, relatives à un déplacement normal aux courbes A et A′, et indiquons ces différentielles par la caractéristique δ; nous aurons

$$\delta ds' = n\delta ds + ds\delta n.$$

Mais, $\delta\sigma$ étant le déplacement infiniment petit, normal à la courbe A, qui a eu lieu sur la première surface, et $\delta\sigma'$ le déplacement correspondant, normal à la courbe A′, qui a eu lieu sur la seconde surface, on a

$$\delta\sigma' = n\,\delta\sigma;$$

on tire de là

$$\frac{\delta\, ds'}{ds'\,\delta\sigma'} = \frac{1}{n}\,\frac{\delta\, ds}{ds\,\delta\sigma} + \frac{1}{n^2}\,\frac{\delta n}{\delta\sigma}.$$

D'ailleurs, d'après une formule de notre Mémoire sur la théorie générale des surfaces, $\frac{\delta\, ds}{ds\,\delta\sigma}$, $\frac{\delta\, ds'}{ds'\,\delta\sigma'}$ sont, au signe près, les courbures géodésiques des courbes A et A′; en appelant $\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_s$, $\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_{s'}$ ces courbures géodésiques, on a donc

$$(6) \qquad \left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_{s'} = \frac{1}{n}\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_s - \frac{1}{n^2}\,\frac{\delta n}{\delta\sigma} = \frac{1}{n}\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_s + \frac{\delta\frac{1}{n}}{\delta\sigma}.$$

Remarquons, toutefois, que cette égalité n'a lieu avec les signes que nous avons affectés aux différents termes des deux membres, que sous certaines conditions. Ainsi il faut, 1° que la relation qui existe entre les points des surfaces S et S′ corresponde à une similitude directe entre les éléments superficiels, pour le cas où l'on se place dans la région extérieure de chaque surface; 2° que les déplacements infiniment petits normaux à la courbe A et indiqués par la caractéristique δ se trouvent du côté qui sert à fixer la courbure géodésique de cette courbe.

12. Arrivons maintenant aux applications.

D'après la méthode exposée au n° **3**, on voit que le problème de Lambert, considéré dans toute sa généralité, n'offre d'autres difficultés que celles de mettre les carrés des éléments de la surface de la terre et de celle de la carte, sous la forme

$$ds^2 = M(dU^2 + dV^2), \quad ds'^2 = M'(dU'^2 + dV'^2),$$

ou, ce qui revient au même, de trouver pour ces deux surfaces deux systèmes de lignes orthogonales les divisant en carrés infiniment petits. Or on connaît de semblables lignes dans les surfaces développables, les surfaces de révolution, les surfaces du second ordre, les surfaces peu différentes d'une sphère; donc, en n'attribuant à la surface de la terre et à celle de la carte que l'une de ces formes, on saura résoudre le problème de Lambert. Il serait inutile de faire des applications pour les différents cas que l'on vient d'indiquer, ces applications ne peuvent offrir d'intérêt que comme exercices de calcul; nous supposerons donc immédiatement, comme on le fait toujours en géographie, que la terre soit une surface de révolution et que la surface de la carte soit un plan. Les équations représentées au n° **8** par

$$f(x, y, z) = 0, \quad \varphi(x', y', z') = 0$$

deviendront ainsi

$$z - f(\sqrt{x^2 + y^2}) = 0, \quad z' = 0,$$

en plaçant convenablement les surfaces par rapport aux axes des coordonnées x, y, z et x', y', z', ce qui peut toujours être fait. La première équation peut être remplacée par les trois suivantes :

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = f(u),$$

u étant positif et v compris entre $-\pi$ et π, et les lignes coordonnées

$$u = \text{const.}, \quad v = \text{const.}$$

sont alors évidemment les parallèles et les méridiens de la terre. De même, l'équation de la carte peut être remplacée par les trois équations

$$x' = u', \quad y' = v', \quad z' = 0;$$

de là on déduit

$$ds = \sqrt{du^2[1 + f'(u)^2] + u^2 dv^2}, \quad ds' = \sqrt{du'^2 + dv'^2}.$$

Intégrant, conformément à la méthode générale, les équations

$$ds = 0, \quad ds' = 0,$$

on trouve

$$U + V\sqrt{-1} = \int \frac{1}{u}\sqrt{1+f'(u)^2}\,du + v\sqrt{-1},$$

$$U' + V'\sqrt{-1} = u' + v'\sqrt{-1} = x' + y'\sqrt{-1}.$$

Ainsi

$$U = \int \frac{1}{u}\sqrt{1+f'(u)^2}\,du, \quad V = v,$$

$$U' = u' = x', \quad V' = v' = y';$$

et les formules obtenues au n° 5 donnent

$$x' + y'\sqrt{-1} = F\left(U + V\sqrt{-1}\right) = F\left(\int \frac{1}{u}\sqrt{1+f'(u)^2}\,du + v\sqrt{-1}\right),$$

$$x' - y'\sqrt{-1} = F_1\left(U - V\sqrt{-1}\right) = F_1\left(\int \frac{1}{u}\sqrt{1+f'(u)^2}\,du - v\sqrt{-1}\right),$$

et

$$x' + y'\sqrt{-1} = \Phi\left(U - V\sqrt{-1}\right) = \Phi\left(\int \frac{1}{u}\sqrt{1+f'(u)^2}\,du - v\sqrt{-1}\right),$$

$$x' - y'\sqrt{-1} = \Phi_1\left(U + V\sqrt{-1}\right) = \Phi_1\left(\int \frac{1}{u}\sqrt{1+f'(u)^2}\,du + v\sqrt{-1}\right).$$

13. Cherchons quelle est celle des deux solutions qui correspond à la similitude directe, quand on se place dans la région extérieure à chaque surface. Pour cela, formons l'expression

$$\frac{df}{dz}\frac{d\varphi}{dz'}\left(\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{dx'}{du'}\frac{dy'}{dv'} - \frac{dx'}{dv'}\frac{dy'}{du'}\right)\left(\frac{dU}{du}\frac{dV}{dv} - \frac{dU}{dv}\frac{dV}{du}\right)\left(\frac{dU'}{du'}\frac{dV'}{dv'} - \frac{dU'}{dv'}\frac{dV'}{du'}\right)$$

du n° 9, nous trouvons aisément

$$\sqrt{1+f'(u)^2},$$

c'est-à-dire un résultat positif; donc, d'après ce qui a été dit au n° 9, la similitude directe correspond à la première solution. Nous ne considérerons, en conséquence, que cette solution.

14. Dans le cas actuel, on a

$$M = u^2, \quad M' = 1;$$

donc le rapport n d'agrandissement est

$$n = \frac{\sqrt{F'(U + V\sqrt{-1})F'_1(U - V\sqrt{-1})}}{u}$$

$$= \frac{\sqrt{F'\left(\int \frac{1}{u}\sqrt{1+f'(u)^2}\,du + v\sqrt{-1}\right) F'_1\left(\int \frac{1}{u}\sqrt{1+f'(u)^2}\,du - v\sqrt{-1}\right)}}{u};$$

nous le mettrons sous la forme

$$n = \frac{1}{u\Omega},$$

en posant, pour simplifier,

$$\frac{1}{\sqrt{F'(U + V\sqrt{-1})F'_1(U - V\sqrt{-1})}} = \Omega.$$

15. Enfin, la relation générale qui lie les courbures géodésiques de deux courbes conjuguées devient

$$(7) \qquad \frac{1}{\rho'} = \frac{1}{n}\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_s + \frac{\delta\frac{1}{n}}{\delta\sigma},$$

ρ' étant le rayon de courbure de la courbe tracée sur la carte, précédé d'un signe qui se détermine d'ailleurs par la règle relative aux courbures géodésiques.

16. La relation précédente peut se mettre sous une forme plus simple quand la courbe A, tracée sur le globe terrestre, est un méridien ou un parallèle. En effet, supposons d'abord que la courbe A soit un méridien, c'est-à-dire une courbe pour laquelle v soit constant; on aura

$$\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_s = 0,$$

par conséquent

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{\delta\frac{1}{n}}{\delta\sigma}.$$

Mais

$$\frac{1}{n} = u\Omega;$$

donc

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{\delta u\Omega}{\delta\sigma} = \frac{u\,\delta\Omega}{\delta\sigma},$$

et en remarquant que $\delta\sigma = u dv = u d\mathrm{V}$,

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{d\Omega}{d\mathrm{V}}.$$

Supposons, en second lieu, que la courbe A soit un parallèle, c'est-à-dire une courbe pour laquelle u soit constant; on aura

$$\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_s = \frac{1}{u\sqrt{1+f'(u)^2}},$$

$$\frac{\delta\frac{1}{n}}{\delta\sigma} = \frac{\delta u\Omega}{\delta\sigma} = \Omega\frac{\delta u}{\delta\sigma} + u\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma} = -\frac{\Omega}{\sqrt{1+f'(u)^2}} - \frac{d\Omega}{d\mathrm{U}}.$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{\rho'_1} = -\frac{d\Omega}{d\mathrm{U}}.$$

Ces deux résultats, qui sont de Lagrange, peuvent s'établir directement comme il suit.

17. Prenons l'expression

$$\frac{dy'\,d^2x' - dx'\,d^2y'}{(dx'^2 + dy'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

de la courbure dans une courbe plane quelconque, rapportée aux coordonnées rectangulaires x' et y'; pour en déduire la courbure de la courbe transformée d'un méridien et celle de la transformée d'un parallèle, il faudra successivement considérer x' et y' comme fonctions de U seulement, ou de V seulement dans la relation générale

$$x' + y'\sqrt{-1} = \mathrm{F}(\mathrm{U} + \mathrm{V}\sqrt{-1}).$$

Or, on déduit de cette relation

$$dx' = \alpha d\mathrm{U} - \beta d\mathrm{V}, \quad dy' = \beta d\mathrm{U} + \alpha d\mathrm{V},$$

en appelant, pour simplifier, α la partie réelle et β le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans la dérivée, par rapport à U, de $\mathrm{F}(\mathrm{U} + \mathrm{V}\sqrt{-1})$. Pour les méridiens où V est constant, on aura donc

$$dx' = \alpha d\mathrm{U}, \quad dy' = \beta d\mathrm{U},$$

par suite

$$d^2x' = \frac{d\alpha}{dU}\,dU^2, \qquad d^2y' = \frac{d\beta}{dU}\,dU^2,$$

ce qui donne, en substituant dans l'expression générale de la courbure,

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{\beta\dfrac{d\alpha}{dU} - \alpha\dfrac{d\beta}{dU}}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Pour les parallèles, U est constant; on a donc

$$dx' = -\beta dV, \qquad dy' = \alpha dV,$$

$$d^2x' = -\frac{d\beta}{dV}\,dV^2, \qquad d^2y' = \frac{d\alpha}{dV}\,dV^2,$$

et, par suite, la courbure est

$$\frac{1}{\rho'_1} = \frac{\beta\dfrac{d\alpha}{dV} - \alpha\dfrac{d\beta}{dV}}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Je remarque maintenant que l'on a

$$\frac{d\alpha}{dV} = -\frac{d\beta}{dU}, \qquad \frac{d\beta}{dV} = \frac{d\alpha}{dU};$$

donc les expressions précédentes de $\frac{1}{\rho'}$ et de $\frac{1}{\rho'_1}$ peuvent se changer en celles-ci :

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{\beta\dfrac{d\beta}{dV} + \alpha\dfrac{d\alpha}{dV}}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \frac{1}{\rho'_1} = -\frac{\beta\dfrac{d\beta}{dU} + \alpha\dfrac{d\alpha}{dU}}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ou bien

$$\frac{1}{\rho'} = -\frac{d\dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}{dV}, \qquad \frac{1}{\rho'_1} = \frac{d\dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}{dU}.$$

Ces résultats coïncident, sauf un signe, qu'il serait, du reste, bien facile d'expliquer, avec ceux qui ont été obtenus plus haut. En effet, d'après la définition de α et de β, et la forme des fonctions F et F_1, il est clair que

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \sqrt{\mathrm{F}'(\mathrm{U}+\mathrm{V}\sqrt{-1})\,\mathrm{F}'_1(\mathrm{U}-\mathrm{V}\sqrt{-1})} = \frac{1}{\Omega}.$$

18. Reprenons les relations

$$x'+y'\sqrt{-1} = \mathrm{F}(\mathrm{U}+\mathrm{V}\sqrt{-1}), \qquad x'-y'\sqrt{-1} = \mathrm{F}_1(\mathrm{U}-\mathrm{V}\sqrt{-1}),$$

qui lient les différents points de la carte aux points correspondants du globe terrestre, et cherchons à déterminer les fonctions arbitraires F et F_1. Or je remarque que, si l'on fait $\mathrm{V}=0$, on a pour les coordonnées des points de la courbe qui représente le méridien initial,

$$x'+y'\sqrt{-1} = \mathrm{F}(\mathrm{U}), \qquad x'-y'\sqrt{-1} = \mathrm{F}_1(\mathrm{U});$$

ces deux égalités contenant deux fonctions arbitraires, savoir, la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ de F, on voit que le premier méridien peut être représenté par une courbe quelconque, et que la latitude peut varier sur ce méridien suivant une loi aussi quelconque. En effet, supposons que, pour ce méridien,

$$x' = \varphi(\mathrm{U}), \qquad y' = \psi(\mathrm{U}),$$

on aura

$$\mathrm{F}(\mathrm{U}) = \varphi(\mathrm{U}) + \sqrt{-1}\,\psi(\mathrm{U}), \qquad \mathrm{F}_1(\mathrm{U}) = \varphi(\mathrm{U}) - \sqrt{-1}\,\psi(\mathrm{U}),$$

et, par suite, les relations générales qui déterminent tous les points de la carte deviendront

$$x'+y'\sqrt{-1} = \varphi(\mathrm{U}+\mathrm{V}\sqrt{-1}) + \sqrt{-1}\,\psi(\mathrm{U}+\mathrm{V}\sqrt{-1}),$$
$$x'-y'\sqrt{-1} = \varphi(\mathrm{U}-\mathrm{V}\sqrt{-1}) - \sqrt{-1}\,\psi(\mathrm{U}-\mathrm{V}\sqrt{-1}).$$

19. Mais cette manière de déterminer les fonctions arbitraires, quoique la plus simple et la plus naturelle, n'est pas néanmoins celle qui convient le mieux à notre objet. En effet, il vaut mieux profiter de l'indétermination des deux fonctions qui entrent dans F et F_1, de manière à faire acquérir à la carte quelque nouvelle propriété qui rende sa construction facile ou son emploi commode.

20. Voyons d'abord s'il est possible d'obtenir un mode de représentation pour lequel une portion finie quelconque de la terre soit toujours semblable à la partie correspondante de la carte. Il faut, pour cela, évidemment que le rapport d'agrandissement

$$n = \frac{\sqrt{F'(U+V\sqrt{-1})\,F'_1(U-V\sqrt{-1})}}{u}$$

soit constant, ce qui entraîne, comme condition nécessaire, mais non suffisante, que la fonction

$$\sqrt{F'(U+V\sqrt{-1})\,F'_1(U-V\sqrt{-1})}$$

ne dépende que de U. Or posons

$$F'(U+V\sqrt{-1}) = \rho(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi), \tag{8}$$

ρ et φ étant des fonctions réelles de U et de V. Comme F_1 est la fonction conjuguée de F, on aura

$$F'_1(U-V\sqrt{-1}) = \rho(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi);$$

donc

$$\sqrt{F'(U+V\sqrt{-1})\,F'_1(U-V\sqrt{-1})} = \rho.$$

Différentions maintenant, d'abord par rapport à U, puis par rapport à V, les deux membres de l'égalité (8); il viendra

$$F''(U+V\sqrt{-1}) = \frac{d\rho}{dU}(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) + \rho(-\sin\varphi + \sqrt{-1}\cos\varphi)\frac{d\varphi}{dU},$$

$$\sqrt{-1}\,F''(U+V\sqrt{-1}) = \rho(-\sin\varphi + \sqrt{-1}\cos\varphi)\frac{d\varphi}{dV},$$

en appelant F″ la dérivée seconde de la fonction F; donc,

$$\frac{d\rho}{dU}\cos\varphi - \rho\sin\varphi\frac{d\varphi}{dU} = \rho\cos\varphi\frac{d\varphi}{dV},$$

$$\frac{d\rho}{dU}\sin\varphi + \rho\cos\varphi\frac{d\varphi}{dU} = \rho\sin\varphi\frac{d\varphi}{dV},$$

d'où

$$\frac{d\varphi}{dV} = \frac{\frac{d\rho}{dU}}{\rho}; \quad \frac{d\varphi}{dU} = 0.$$

Ces égalités montrent que $\frac{\frac{d\rho}{dU}}{\rho}$ doit être une constante, et par conséquent que ρ est de la forme ae^{mU}, a et m étant des constantes. Jusqu'ici nous avons exprimé seulement que ρ était fonction de U, c'est-à-dire que le rapport d'agrandissement avait la même valeur pour tous les points d'un même parallèle; pour que ce rapport soit constant, il faut de plus que ρ soit le produit de u par une constante. Or, de l'égalité

$$e^{mU} = au,$$

qui exprime cette propriété, on tire

$$dU = \frac{1}{m}\frac{du}{u};$$

mais

$$dU = \frac{1}{u}\sqrt{1 + f'(u)^2}du;$$

donc

$$\sqrt{1 + f'(u)^2} = \frac{1}{m}.$$

Ainsi $f'(u)$ est constant, et le méridien de la surface de révolution qui représente la surface de la terre et dont l'équation, par rapport à l'axe des z et à un axe des u perpendiculaire au premier, est $z = f(u)$, devient une ligne droite. Ce n'est donc que dans le cas où l'on supposerait la terre cylindrique ou conique, que le rapport d'agrandissement pourrait être constant.

21. Proposons-nous, en second lieu, de déterminer les fonctions arbitraires par la condition qu'une série de points de la surface du globe occupent une position déterminée sur la surface de la carte. On peut ici supposer la fonction F réelle, et alors F_1 étant égal à F, on n'a plus qu'une seule fonction à considérer. Cette fonction doit avoir des valeurs connues pour une série de valeurs de u et de v ou de la variable $U + V\sqrt{-1}$ dont elle dépend; donc, au moyen des formules d'interpolation, on pourra toujours la déterminer.

22. On pourrait aussi assujettir le rapport d'agrandissement n à avoir une même valeur déterminée pour une série de points du globe terrestre; au moyen des formules d'interpolation, on trouverait encore aisément les fonctions arbitraires : mais toutes ces déterminations, qui ont d'ailleurs leur importance en géographie, n'offrent aucune difficulté.

23. Passons à une question beaucoup plus difficile et proposons-nous, avec Lagrange, de déterminer les fonctions arbitraires, de telle sorte qu'il en résulte pour les méridiens et pour les parallèles des courbes d'une nature donnée. Le problème posé ainsi, dans toute sa généralité, offre des difficultés peut-être insurmontables, nous nous bornerons à considérer le cas où les courbes données sont des cercles. Du reste, on peut remarquer que ce cas, qui comprend les projections stéréographiques et les cartes marines, est suffisant pour les besoins de la géographie; car il est naturel que dans la construction des cartes on préfère toujours le cercle à toute autre courbe, à cause de la facilité et de l'exactitude avec laquelle on peut le tracer.

24. Nous avons vu au n° **16** que le rayon de courbure de la courbe des méridiens était donné par la formule

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{d\Omega}{dV}.$$

Si l'on veut que la courbe des méridiens soit un cercle, il faudra que cette courbure ne varie que d'un méridien à un autre et soit par conséquent fonction de V seul; donc $\frac{d^2\Omega}{dV\,dU}$ sera nul. Il résulte d'abord de là cette conséquence importante, que par cela même que les méridiens sont représentés par des cercles, les parallèles le sont aussi. En effet, la condition $\frac{d^2\Omega}{dU\,dV} = 0$ montre que la courbure $\frac{d\Omega}{dU}$ des parallèles est fonction de U seul, par conséquent constante pour tous les points d'un même parallèle. On prouverait de la même manière que si les lignes des parallèles sont des cercles, les lignes des méridiens le sont aussi; et la condition commune à la circularité des uns et des autres est $\frac{d^2\Omega}{dU\,dV} = 0$. Voyons donc quelle doit être la forme des fonctions arbitraires pour que cette condition soit remplie.

25. Posons, pour simplifier,

$$\frac{1}{\sqrt{F'(z)}} = \varphi(z), \quad \frac{1}{\sqrt{F'_1(z)}} = \psi(z),$$

ce qui donne

$$\Omega = \varphi(U + V\sqrt{-1})\,\psi(U - V\sqrt{-1}).$$

La condition

$$\frac{d^2\Omega}{dU\,dV} = 0$$

deviendra

$$\varphi''(U + V\sqrt{-1})\,\psi(U - V\sqrt{-1}) - \psi''(U - V\sqrt{-1})\,\varphi(U + V\sqrt{-1}) = 0,$$

en appelant φ'' et ψ'' les dérivées secondes des fonctions φ et ψ.

L'égalité précédente peut se mettre sous la forme

$$\frac{\varphi''(U + V\sqrt{-1})}{\varphi(U + V\sqrt{-1})} = \frac{\psi''(U - V\sqrt{-1})}{\psi(U - V\sqrt{-1})}.$$

Or le second membre, d'après la nature des fonctions φ et ψ, se déduisant du premier par l'échange de $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$, cette égalité ne peut exister que si les deux membres se réduisent à une même constante réelle k; on a donc

$$\frac{\varphi''(U + V\sqrt{-1})}{\varphi(U + V\sqrt{-1})} = k,$$

d'où

$$\varphi(U + V\sqrt{-1}) = Ae^{\sqrt{k}(U + V\sqrt{-1})} + Be^{-\sqrt{k}(U + V\sqrt{-1})},$$

A et B étant des constantes quelconques, réelles ou imaginaires; et, par conséquent,

$$F(U + V\sqrt{-1}) = P + \frac{e^{-\sqrt{k}(U + V\sqrt{-1})}}{Me^{\sqrt{k}(U + V\sqrt{-1})} + Ne^{-\sqrt{k}(U + V\sqrt{-1})}},$$

M, N, P étant des nouvelles constantes de même nature que A et B.

Quant à la constante $\sqrt{k}$, comme son carré peut être aussi bien négatif que positif, elle peut de même être réelle ou imaginaire; mais on peut remarquer que la valeur que reçoit le second membre de l'égalité précédente pour une valeur de k négative et égale à $-c^2$, se déduit de la valeur que l'on obtient pour $k=c^2$, en changeant seulement U en V et V en $-$ U. Cela étant, nous nous contenterons d'attribuer une valeur positive c^2, il viendra ainsi

$$\mathrm{F}\left(\mathrm{U}+\mathrm{V}\sqrt{-1}\right),$$

ou bien

$$x'+y'\sqrt{-1}=\mathrm{P}+\frac{e^{-c\left(\mathrm{U}+\mathrm{V}\sqrt{-1}\right)}}{\mathrm{M}e^{c\left(\mathrm{U}+\mathrm{V}\sqrt{-1}\right)}+\mathrm{N}e^{-c\left(\mathrm{U}+\mathrm{V}\sqrt{-1}\right)}}. \tag{9}$$

Ce résultat peut être considérablement simplifié.

26. Je remarque d'abord que l'on peut toujours supposer nulle la constante P, car cela revient à ajouter une simple constante à x' et y', c'est-à-dire à transporter les axes des x' et des y' parallèlement à eux-mêmes. De plus, les constantes M et N que nous avons dit être réelles ou imaginaires peuvent être supposées réelles et même positives. En effet, on peut, dans tous les cas, poser $\mathrm{M}=me^{\alpha\sqrt{-1}}$, $\mathrm{N}=ne^{\beta\sqrt{-1}}$, m et n étant positifs, et notre formule devient

$$x'+y'\sqrt{-1}=\frac{e^{-c\left(\mathrm{U}+\mathrm{V}\sqrt{-1}\right)}}{me^{c\left[\mathrm{U}+\left(\mathrm{V}+\frac{\alpha}{c}\right)\sqrt{-1}\right]}+ne^{-c\left[\mathrm{U}+\left(\mathrm{V}-\frac{\beta}{c}\right)\sqrt{-1}\right]}}.$$

Multiplions le premier membre par $\cos\beta+\sqrt{-1}\sin\beta$, et le second par $e^{\beta\sqrt{-1}}$, puis posons

$$x'\cos\beta-y'\sin\beta=x'_1,\quad x'\sin\beta+y'\cos\beta=y'_1;$$

nous aurons

$$x'_1+y'_1\sqrt{-1}=\frac{e^{-c\left[\mathrm{U}+\left(\mathrm{V}-\frac{\beta}{c}\right)\sqrt{-1}\right]}}{me^{c\left[\mathrm{U}+\left(\mathrm{V}+\frac{\alpha}{c}\right)\sqrt{-1}\right]}+ne^{-c\left[\mathrm{U}+\left(\mathrm{V}-\frac{\beta}{c}\right)\sqrt{-1}\right]}}.$$

Or, x_1 et y'_1 sont évidemment les coordonnées correspondantes à x'

et y' dans un système d'axes rectangulaires (OX'_1, OY'_1) que l'on obtient en faisant tourner de l'angle β le système des axes (OX', OY'); le second membre de la dernière équation ne diffère du second membre de l'équation (9), après qu'on y a fait $P=0$, $M=m$, $N=n$, qu'en ce que $V+\frac{\alpha-\beta}{c}$ est mis à la place de V, comme on le voit aisément, en réduisant ces seconds membres au même numérateur 1. Donc, si l'on prend d'avance les axes des (X'_1, Y'_1) pour axes des (X', Y') et si l'on recule le méridien initial à partir duquel se comptent les longitudes V, de l'angle $\frac{\alpha-\beta}{c}$, la dernière équation se confondra avec l'équation (9). On peut donc toujours supposer réelles et positives les constantes M et N.

27. Pour déduire de l'équation (9) simplifiée, comme il vient d'être dit, les valeurs de x' et y' en U et V, multiplions, dans le second membre, haut et bas par $Me^{c(U-V\sqrt{-1})}+Ne^{-c(U-V\sqrt{-1})}$, il viendra

$$x'+y'\sqrt{-1}=\frac{Me^{-2cV\sqrt{-1}}+Ne^{-2cU}}{M^2e^{2cU}+2MN\cos 2cV+N^2e^{-2cU}},$$

et en égalant séparément les parties réelles et les parties imaginaires,

$$x'=\frac{M\cos 2cV+Ne^{-2cU}}{M^2e^{2cU}+2MN\cos 2cV+N^2e^{-2cU}},$$

$$y'=\frac{-M\sin 2cV}{M^2e^{2cU}+2MN\cos 2cV+N^2e^{-2cU}}.$$

28. Si entre ces équations, on élimine U, on obtiendra une relation entre x, y, V, qui représentera tous les cercles répondant aux différents méridiens, et, réciproquement, si l'on élimine V, on aura une équation en x, y, U, qui sera l'équation commune à tous les cercles répondant aux différents parallèles. Pour faciliter les éliminations, il convient de faire d'abord la somme des carrés des deux équations; on trouve

$$x'^2+y'^2=\frac{e^{-2cU}}{M^2e^{2cU}+2MN\cos 2cV+N^2e^{-2cU}},$$

et cela permet de mettre les équations sous la forme plus simple

$$\frac{x'}{x'^2 + y'^2} = N + Me^{2cU} \cos 2cV,$$

$$\frac{y'}{x'^2 + y'^2} = -Me^{2cU} \sin 2cV.$$

29. Éliminant, maintenant, la variable U, on a

$$(10) \qquad x'^2 + y'^2 - \frac{y'}{N} \operatorname{cotang} 2cV - \frac{x'}{N} = 0.$$

La circonférence représentée par cette équation passe par l'origine O des coordonnées et par le point A de OX, qui a $\frac{1}{N}$ pour abscisse; de plus, elle coupe l'axe des x, au point O, sous un angle égal à $\pi - 2cV$ ou à $-2cV$ suivant que $V = v$ est positif ou négatif; ajoutons que, dans le premier cas, on ne doit prendre que le segment situé du côté des y négatifs, et, dans le second, que le segment situé du côté des y positifs.

30. Éliminons, en second lieu, la variable V; on trouve

$$(11) \qquad x'^2 + y'^2 + \frac{2Nx'}{M^2 e^{4cU} - N^2} - \frac{1}{M^2 e^{4cU} - N^2} = 0.$$

La circonférence représentée par cette équation a l'axe des x pour diamètre. Pour achever de la définir, je vais chercher un système de deux points situés sur l'axe des x, et tels que leurs distances à un point quelconque de la circonférence soient dans un rapport constant. A cet effet, je prends l'équation

$$(x' - a)^2 + y'^2 = k^2 [(x' - a')^2 + y'^2],$$

qui représente le lieu des points dont les distances à deux points situés sur l'axe des x, et ayant pour abscisses a et a', ont un rapport k, et j'identifie avec l'équation ci-dessus; il vient

$$\frac{-2a + 2a'k^2}{1 - k^2} = \frac{2N}{M^2 e^{4cU} - N^2}, \quad \frac{k^2 a'^2 - a^2}{1 - k^2} = \frac{1}{M^2 e^{4cU} - N^2}.$$

On vérifie ces deux équations en posant

$$a' = 0, \quad a = \frac{1}{N}, \quad k = \frac{M}{N} e^{2cU};$$

donc les circonférences représentant les différents parallèles du globe terrestre, sont les lieux de points dont les distances aux deux points fixes A et O déjà obtenus au n° **29**, sont dans un rapport constant et égal à $\frac{M}{N}e^{2cU}$.

31. Il convient de transporter l'origine des coordonnées au milieu de OA, afin de simplifier les équations (10) et (11); on trouve ainsi, en posant $OA = \frac{1}{N} = 2a$,

$$x'^2 + y'^2 - 2a \operatorname{cotang} 2cV \,.\, y' = a^2 \tag{12}$$

pour l'équation des méridiens, et

$$x'^2 + y'^2 + 2a\frac{4a^2M^2e^{4cU}+1}{4a^2M^2e^{4cU}-1}x' = -a^2$$

pour celle des parallèles.

Cette dernière équation peut se mettre sous une forme plus élégante : faisant $4a^2M^2 = e^{4ch}$, le coefficient de x' deviendra

$$2a\frac{e^{4cU+4ch}+1}{e^{4cU+4ch}-1} = 2a\frac{e^{2c(U+h)}+e^{-2c(U+h)}}{e^{2c(U+h)}-e^{-2c(U+h)}}$$

$$= -2a\sqrt{-1} \operatorname{cotang} 2c\frac{(U+h)}{\sqrt{-1}},$$

et l'équation sera

$$x'^2 + y'^2 - 2a\sqrt{-1} \operatorname{cotang} 2cU_1\, x' = -a^2, \tag{13}$$

en posant

$$U + h = U_1\sqrt{-1}.$$

On doit remarquer que la constante h qui entre dans l'expression de U_1 n'a aucune influence sur la solution trouvée, et qu'elle ne sert qu'à fixer le parallèle terrestre qui correspond à un cercle déterminé de la série représentée par l'équation (13). Ainsi il n'y a, en réalité, dans notre solution, que deux constantes arbitraires c et a.

32. Il est utile de connaître les valeurs de x' et de y', en fonction de U_1 et de V. Or, reprenons les valeurs

$$x' = \frac{M\cos 2cV + Ne^{-2cU}}{M^2 e^{2cU} + 2MN\cos 2cV + N^2 e^{-2cU}},$$

$$y' = -\frac{M\sin 2cV}{M^2 e^{2cU} + 2MN\cos 2cV + N^2 e^{-2cU}},$$

obtenues au n° **27**. Changeons dans la première x' en $x' + \frac{1}{2N}$, pour tenir compte du déplacement d'origine opéré plus haut; ce qui donne

$$x' = \frac{N^2 e^{-2cU} - M^2 e^{2cU}}{2N\left(M^2 e^{2cU} + 2MN\cos 2cV + N^2 e^{-2cU}\right)},$$

puis introduisons les nouvelles notations, il viendra

$$x' = a\frac{e^{-2c(U+h)} - e^{2c(U+h)}}{e^{2c(U+h)} + 2\cos 2cV + e^{-2c(U+h)}} = -a\sqrt{-1}\,\frac{\sin 2cU_1}{\cos 2cU_1 + \cos 2cV},$$

$$y' = -a\frac{\sin 2cV}{\cos 2cU_1 + \cos 2cV}.$$

33. De là on tire encore

$$x' + y'\sqrt{-1} = -a\sqrt{-1}\,\frac{\sin 2cU_1 + \sin 2cV}{\cos 2cU_1 + \cos 2cV} = -a\sqrt{-1}\,\operatorname{tang} c(U_1 + V),$$

par conséquent,

$$\begin{aligned} F\left(U + V\sqrt{-1}\right) &= -a\sqrt{-1}\,\operatorname{tang} c\,(U_1 + V),\\ F_1\left(U - V\sqrt{-1}\right) &= -a\sqrt{-1}\,\operatorname{tang} c\,(U_1 - V); \end{aligned}$$

donc Ω, qui est égal à

$$\frac{1}{\sqrt{F'\left(U + V\sqrt{-1}\right)F_1'\left(U - V\sqrt{-1}\right)}},$$

devient

$$\Omega = \frac{\cos c(U_1 + V)\cos c(U_1 - V)}{ac}.$$

34. On peut obtenir une autre valeur de Ω d'une forme assez remarquable. Soient r et r' les distances d'un point quelconque (x', y')

aux points A et A′ situés sur l'axe des x et à la distance a de l'origine; nous aurons

$$r^2 = x'^2 + y'^2 + 2ax' + a^2, \quad r'^2 = x'^2 + y'^2 - 2ax' + a^2,$$

ou bien, d'après l'équation (13),

$$r^2 = 2ax'\left(1 + \sqrt{-1}\,\mathrm{cotang}\, 2c\mathrm{U}_1\right),$$
$$r'^2 = 2ax'\left(-1 + \sqrt{-1}\,\mathrm{cotang}\, 2c\mathrm{U}_1\right),$$

et, en substituant à x' sa valeur en U_1 et V,

$$r^2 = 2a^2\frac{\cos 2c\mathrm{U}_1 - \sqrt{-1}\sin 2c\mathrm{U}_1}{\cos 2c\mathrm{U}_1 + \cos 2c\mathrm{V}}, \quad r'^2 = 2a^2\frac{\cos 2c\mathrm{U}_1 + \sqrt{-1}\sin 2c\mathrm{U}_1}{\cos 2c\mathrm{U}_1 + \cos 2c\mathrm{V}};$$

de là on déduit

$$rr' = \frac{a^2}{\cos c(\mathrm{U}_1 + \mathrm{V})\cos c(\mathrm{U}_1 - \mathrm{V})},$$

donc on a

$$\Omega = \frac{a}{crr'}.$$

35. Jusqu'à présent, nous n'avons fait aucune hypothèse sur la figure des méridiens terrestres; mais, pour pouvoir appliquer nos formules à la construction des cartes géographiques, il est nécessaire de connaître quelle fonction de la latitude est la variable u. Or, si l'on suppose la terre sphérique, ainsi qu'on le fait communément en géographie, et qu'on prenne, pour plus de simplicité, le rayon de la terre pour unité, on aura, s étant le complément de la latitude, $u = \sin s$; de plus, la fonction de u représentée par $f(u)$ dans le n° **12** sera ici $\cos s$; donc U, qui est égal en général à $\int \frac{1}{u}\sqrt{1 + f'(u)^2}\,du$, deviendra

$$\mathrm{U} = \int \frac{ds}{\sin s} = \log \mathrm{tang}\frac{s}{2}.$$

Si, au lieu de supposer la terre sphérique, on supposait qu'elle fût un sphéroïde elliptique aplati par les pôles, en appelant σ le complément de la latitude, ou l'angle de la normale avec l'axe des pôles, on trouverait

$$U = \log\left[\operatorname{tang}\frac{\sigma}{2}\left(\frac{1+\varepsilon\cos\sigma}{1-\varepsilon\cos\sigma}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}\right],$$

ε étant l'excentricité de l'ellipse méridienne; de manière qu'en appelant σ_1 un angle tel que

$$\operatorname{tang}\frac{\sigma_1}{2} = \operatorname{tang}\frac{\sigma}{2}\left(\frac{1+\varepsilon\cos\sigma}{1-\varepsilon\cos\sigma}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}},$$

l'expression de U aurait la même forme que dans le cas de la terre sphérique.

On sait que si l'on néglige les quantités de l'ordre ε^4, la relation précédente revient à cette autre

$$\sigma_1 = \sigma - \frac{\varepsilon^2}{2}\sin 2\sigma,$$

de manière qu'il est alors très-facile de tenir compte de l'aplatissement de la terre.

36. Résumons les règles qui résultent de ce qui précède, pour la construction d'une carte du système considéré, lorsqu'on suppose d'ailleurs la terre sphérique. Après avoir fixé la constante c, qui est, en quelque sorte, l'exposant de la carte, on prend sur une horizontale les points A et A' où viennent se couper tous les méridiens, c'est-à-dire les pôles de la carte, en ayant soin de placer à droite le pôle boréal A; on connaît ainsi le méridien AA' correspondant à $V = 0$, et le parallèle BB', perpendiculaire au milieu de AA', correspondant à $U_1 = 0$. Ce méridien et ce parallèle peuvent se rapporter à un lieu quelconque du globe terrestre, qui devient alors le centre de la carte. De la connaissance de ce lieu résulte celle du méridien, à partir duquel se comptent les longitudes, et celle de la constante h. Car, puisque pour le centre de la carte on a $V = 0$, $U_1 = 0$, d'après la valeur de V, le méridien à partir duquel se comptent les longitudes est précisément celui qui passe par le centre de la carte; et, d'après la valeur de U_1, si l'on appelle s_0 la valeur du complément de la latitude pour le centre de la carte, et par conséquent $\log\operatorname{tang}\frac{s_0}{2}$ la valeur de U pour ce même point, on a

$$h + \log\operatorname{tang}\frac{\sigma_0}{2} = 0, \quad \text{d'où} \quad h = -\log\operatorname{tang}\frac{\sigma_0}{2}.$$

Maintenant, pour obtenir la représentation du méridien correspondant à une longitude v, on décrit, avec AA′ pour base, un segment capable de l'angle $\pi - 2cv$, au-dessus de AA′, c'est-à-dire du côté des y négatifs, si v est positif, ou bien, un segment capable de $\pi + 2cv$, au-dessous de AA′, si v est négatif; et pour avoir la représentation du parallèle correspondant à la latitude $\frac{\pi}{2} - s$, et par conséquent à la valeur $\log \operatorname{tang} \frac{s}{2}$ de U, on décrit le cercle lieu des points dont le rapport des distances aux points A et A′ est égal à

$$\frac{M}{N} e^{2cU} = e^{2c(U+h)} = \frac{\left(\operatorname{tang} \frac{s}{2}\right)^{2c}}{\left(\operatorname{tang} \frac{s_0}{2}\right)^{2c}}.$$

On peut ainsi obtenir la représentation des différents méridiens et des différents parallèles, et, par conséquent, placer sur la carte tel lieu que l'on veut.

37. On voit que dans la construction de nos cartes il y a, comme indéterminées, d'abord la distance $AA' = 2a$, dont dépend la grandeur ou l'échelle de la carte, puis la constante c, et enfin la position du lieu de la terre, que l'on prend comme centre de la carte. Nous allons nous proposer de fixer ces indéterminées, de manière à diminuer le plus possible l'altération causée par la représentation dans la grandeur des différents lieux de la terre. Cherchons le point pour lequel le rapport d'agrandissement, désigné ci-dessus par n, est un minimum, ou bien le point dans le voisinage duquel n est le moins altéré. La formule (7) du n° **15** nous permet de résoudre très-simplement cette question. En effet, si l'on applique cette formule à un méridien, elle nous montre immédiatement que les lieux dont la grandeur est la moins altérée en longitude sont ceux qui sont situés sur le méridien rectiligne AA′ de la carte, car pour ces points on a

$$\frac{\partial \frac{1}{n}}{\partial \sigma} = 0, \qquad \left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)_s = 0,$$

et, par conséquent, $\frac{1}{\rho'}$ doit aussi être nul. Supposons, en second lieu, que la formule se rapporte aux parallèles, on aura

$$\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_s = \frac{\cos s}{u}, \qquad \frac{1}{n} = u\Omega,$$

et si l'on veut que

$$\frac{\delta \frac{1}{n}}{\delta\sigma} = 0,$$

c'est-à-dire que la déformation du lieu en latitude soit également minimum, il faudra que

$$\frac{1}{\rho'} = \Omega \cos s;$$

mais le rayon ρ' de la courbe transformée d'un parallèle est, en tenant compte du signe,

$$\frac{a\sqrt{-1}}{\sin 2c\mathrm{U}_1};$$

Ω, qui a pour valeur générale

$$\frac{\cos c(\mathrm{U}_1+\mathrm{V})\cos c(\mathrm{U}_1-\mathrm{V})}{ac},$$

se réduit ici à

$$\frac{\cos^2 c\mathrm{U}_1}{ac} = \frac{1+\cos 2c\mathrm{U}_1}{2ac},$$

puisque, d'après la condition déjà trouvée, $\mathrm{V} = 0$. Donc notre formule devient

$$\frac{2c\sqrt{-1}\sin 2c\mathrm{U}_1}{1+\cos 2c\mathrm{U}_1} = -\cos s. \tag{14}$$

38. Nous pouvons obtenir un résultat beaucoup plus simple. Nommons k le rapport du point cherché aux points A et A′, on sait que

$$k = e^{2c(\mathrm{U}+h)} = \cos 2c\,\mathrm{U}_1 + \sqrt{-1}\sin 2c\,\mathrm{U}_1,$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{k} = \cos 2c\,\mathrm{U}_1 - \sqrt{-1}\sin 2c\,\mathrm{U}_1;$$

donc

$$\sqrt{-1}\sin 2c\,\mathrm{U}_1 = \frac{1}{2}\left(k - \frac{1}{k}\right),$$
$$\cos 2c\,\mathrm{U}_1 = \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right).$$

Substituant dans l'égalité (14), il vient

$$\frac{2c(k^2-1)}{2k+k^2+1} = -\cos s;$$

d'où

$$k = \frac{2c-\cos s}{2c+\cos s}.$$

Ainsi le point cherché, pour lequel la déformation de la carte est la moindre possible, est le point situé sur le méridien rectiligne AA′ qui partage ce méridien en parties proportionnelles à $2c - \cos s$ et à $2c + \cos s$. On voit qu'en supposant ce point désigné sur le globe terrestre, ce qui fait connaître s, on peut encore le placer arbitrairement sur l'axe AA′ de la carte, et que l'exposant $2c$ se trouve seulement alors déterminé.

39. Puisqu'il reste encore une indéterminée, assujettissons la seconde variation de $\frac{1}{n}$ dans le sens du méridien à être nulle; nous aurons

$$\frac{d\frac{1}{\rho'}}{dU} = \frac{1}{n}\,\frac{d\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_s}{dU},$$

$\frac{1}{\rho'}$ et $\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_s$ se rapportant à un parallèle. Or

$$\frac{d\frac{1}{\rho'}}{dU} = -\frac{2c}{a}\cos 2c\,U_1,$$

puis, en supposant la terre sphérique, ce que nous n'avions pas fait encore,

$$\frac{d\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_s}{dU} = \frac{d\,\text{cotang}\,s}{dU} = -\frac{1}{\sin s}, \quad \frac{1}{n} = \sin s\,\frac{1+\cos 2c\,U_1}{2ac};$$

donc, en substituant, on a

$$4c^2\cos 2c\,U_1 = 1+\cos 2c\,U_1,$$

d'où

$$4c^2 = \frac{(k+1)^2}{k^2+1},$$

et, à cause de la valeur de k obtenue plus haut,

$$2c = \sqrt{1+\sin^2 s},$$

ce qui détermine $2c$, quand s est connu.

40. Ainsi, après avoir pris un lieu important M de la surface de la terre pour le point dans le voisinage duquel les lieux doivent être le moins altérés possible, on déterminera l'exposant de la carte par la condition $2c = \sqrt{1+\sin^2 s_1}$, s_1 étant le complément de la latitude du point M, puis on prendra les pôles A et A', de façon que le rapport des distances de ces points au point M', qui représente le point M de la terre, soit $\frac{2c - \cos s_1}{2c + \cos s_1}$; enfin le coefficient h qui, en appelant s_0 le complément de la latitude du centre de la carte, est égal à log tang $\frac{s_0}{2}$, se déduira de ce que le rapport des distances M'A et M'A' ou $\frac{2c - \cos s_1}{2c + \cos s_1}$ doit être $\frac{\left(\tang \frac{s_1}{2}\right)^{2c}}{\left(\tang \frac{s_0}{2}\right)^{2c}}$, et la carte se trouvera entièrement déterminée, sauf l'échelle qui doit évidemment rester quelconque.

41. Nous terminerons en remarquant que le système général de représentation obtenu précédemment donne, comme cas particuliers, les cartes réduites et les cartes stéréographiques, et qu'il suffit pour cela de supposer l'exposant $2c$ de la carte égal à 0 ou à 1. En effet, si dans les valeurs de x' et y' du n° **32** on fait

$$c = 0,$$

et, en même temps,

$$a = \frac{m}{c} = \infty,$$

pour que les valeurs de x' et y' ne se réduisent pas à zéro, on trouve aisément

$$x' = -mh - mU, \quad y' = -mV;$$

par conséquent, en supposant la terre sphérique,

$$x' = -mh - m \log \operatorname{tang} \frac{1}{2} s, \quad y' = -mv.$$

Ainsi les méridiens sont représentés par des droites parallèles à l'axe des x, et dont les distances à cet axe croissent proportionnellement à la longitude, et les parallèles sont des droites parallèles à l'axe des y, dont les distances à cet axe croissent proportionnellement aux logarithmes de la tangente de la moitié du complément de la latitude. C'est le système de Mercator ou des cartes réduites.

En faisant $2c = 1$, on a

$$x' = -a\sqrt{-1}\,\frac{\sin U_1}{\cos U_1 + \cos V}, \qquad y' = -a\,\frac{\sin V}{\cos U_1 + \cos V},$$

pour les valeurs de x' et y' en U_1 et V; et

$$(15) \qquad \begin{aligned} &x'^2 + y'^2 - 2a \operatorname{cotang} V\, y' = a^2, \\ &x'^2 + y'^2 - 2a\sqrt{-1} \operatorname{cotang} U_1\, x' = -a^2, \end{aligned}$$

pour les équations des circonférences représentant les méridiens et les parallèles. Nous aurons démontré que ces résultats conviennent au mode de représentation de Ptolémée, si nous faisons voir qu'en supposant la terre sphérique, à tout cercle tracé sur la terre correspond un cercle sur la carte. Or un cercle de la sphère est représenté, en v et s, par une équation de la forme

$$A \sin s \cos v + B \sin s \sin v + C \cos s = D,$$

A, B, C, D étant des constantes; d'ailleurs

$$v = V,$$

puis

$$\log \operatorname{tang} \frac{s}{2} = U,$$

d'où

$$\sin s = \frac{2e^{U}}{1 + e^{2U}}, \quad \cos s = \frac{1 - e^{2U}}{1 + e^{2U}},$$

et, par conséquent,

$$\sin s = \frac{1}{\cos(U_1 + h\sqrt{-1})}, \quad \cos s = \sqrt{-1}\,\frac{\sin(U_1 + h\sqrt{-1})}{\cos(U_1 + h\sqrt{-1})};$$

donc l'équation d'un cercle de la terre est, en U_1 et V,

$$A\cos V + B\sin V + C\sqrt{-1}\sin(U_1 + h\sqrt{-1}) = D\cos(U_1 + h\sqrt{-1}),$$

ou plus simplement,

$$A\cos V + B\sin V + C_1\sqrt{-1}\sin U_1 + D_1\cos U_1 = 0,$$

C_1 et D_1 étant des nouvelles constantes. Maintenant les équations (15) nous donnent

$$\cos V = \frac{x'^2 + y'^2 - a^2}{\sqrt{[(x'-a)^2 + y'^2][(x'+a)^2 + y'^2]}},$$

$$\sin V = \frac{2ay'}{\sqrt{[(x'-a)^2 + y'^2][(x'+a)^2 + y'^2]}},$$

$$\cos U_1 = \frac{x'^2 + y'^2 + a^2}{\sqrt{[(x'-a)^2 + y'^2][(x'+a)^2 + y'^2]}},$$

$$\sqrt{-1}\sin U_1 = \frac{-2ax'}{\sqrt{[(x'-a)^2 + y'^2][(x'+a)^2 + y'^2]}};$$

donc, en substituant, il vient, pour l'équation de la projection du cercle de la terre,

$$A(x'^2 + y'^2 - a^2) + 2aBy' + D_1(x'^2 + y'^2 + a^2) - 2aC_1 y' = 0,$$

ce qui est bien l'équation d'un cercle.

Nota. Au lieu de se donner comme condition que les angles formés sur la carte soient toujours égaux aux angles correspondants sur la surface du globe, on pourrait exiger que les différentes parties de la terre conservassent la même étendue, en se déformant d'ailleurs. On sait que plusieurs cartes, entre autres celles de Flamsteed, ont été construites d'après cette condition. Or, en supposant d'abord la surface de la terre et celle de la carte tout à fait quelconques, et exprimant les coordonnées des points de chaque surface au moyen de deux variables, comme nous l'avons fait au n° **1**, on trouve aisément que l'aire du triangle infiniment petit, tracé sur la première surface, et ayant pour sommets les points (u, v), $(u + du, v + dv)$, $(u + \delta u, v + \delta v)$, est égale à

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{EG - F^2}\,(du\,\delta v - \delta u\,dv),$$

E, F et G étant les trois fonctions de u et de v, qui entrent dans l'expression de l'élément de la surface. De même l'aire du triangle correspondant tracé sur la seconde surface, et ayant pour sommets les points (u', v'), $(u' + du', v' + dv')$, $(u' + \delta u', v' + \delta v')$, est

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{E'G' - F'^2}\,(du'\,\delta v' - \delta u'\,dv');$$

donc la condition énoncée s'exprime par l'équation

$$\sqrt{E'G' - F'^2}\,(du'\,\delta v' - \delta u'\,dv') = \sqrt{EG - F^2}\,(du\,\delta v - \delta u\,dv);$$

ou bien, en posant

$$du = \frac{du}{du'}\,du' + \frac{du}{dv'}\,dv',$$

$$\delta u = \frac{du}{du'}\,\delta u' + \frac{du}{dv'}\,\delta v',$$

$$dv = \frac{dv}{du'}\,du' + \frac{dv}{dv'}\,dv',$$

$$\delta v = \frac{dv}{du'}\,\delta u' + \frac{dv}{dv'}\,\delta v',$$

et substituant,

$$\frac{du}{du'}\frac{dv}{dv'} - \frac{du}{dv'}\frac{dv}{du'} = \frac{\sqrt{E'G' - F'^2}}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Pour déduire de cette équation les valeurs de u et v, on se donnera arbitrairement v en fonction de u' et de v', et la détermination de u dépendra de l'intégration d'une équation aux différences partielles, linéaire et du premier ordre, qui dans beaucoup de cas se ramènera immédiatement aux quadratures.

Supposons la terre sphérique et la carte plane; faisons en conséquence $u' = x$, $v' = y$, $u = s$, $v = v$, s étant le complément de la latitude et v la longitude; nous aurons

$$\frac{ds}{dx}\frac{dv}{dy} - \frac{ds}{dy}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{\sin s},$$

ou bien, en posant $\cos s = S$,

$$\frac{dS}{dx}\frac{dv}{dy} - \frac{dS}{dy}\frac{dv}{dx} = -1.$$

Comme nous avons deux inconnues et une seule condition, nous pouvons imposer à notre système de représentation une autre propriété; nous pouvons exiger, par exemple, que les lignes des méridiens et des parallèles se coupent à angle droit. A l'équation précédente nous devons alors joindre celle-ci :

$$\frac{dS}{dx}\frac{dv}{dx} + \frac{dS}{dy}\frac{dv}{dy} = 0.$$

Des deux équations on tire aisément

$$\frac{dS}{dx} = \frac{-\frac{dv}{dy}}{\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dy}\right)^2},$$

$$\frac{dS}{dy} = \frac{\frac{dv}{dx}}{\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dy}\right)^2}.$$

Différentiant la première de ces dernières équations par rapport à y, la seconde par rapport à x et égalant, on trouve

$$(1) \qquad (p^2 - q^2)(t - r) - 4\,pqs = 0,$$

en posant, pour simplifier,

$$\frac{dv}{dx} = p, \quad \frac{dv}{dy} = q, \quad \frac{d^2v}{dx^2} = r, \quad \frac{d^2v}{dx\,dy} = s, \quad \frac{d^2v}{dy^2} = t.$$

Cette équation aux différences partielles du second ordre se ramène à la forme linéaire par la méthode de Legendre. Soit

$$v = px + qy - v_1,$$

et regardons v_1 comme une fonction inconnue de p et de q; nous aurons

$$\frac{dv_1}{dp} = x, \quad \frac{dv_1}{dq} = y, \quad \frac{d^2v_1}{dp^2} = \frac{t}{rt - s^2}, \quad \frac{d^2v_1}{dp\,dq} = \frac{-s}{rt - s^2}, \quad \frac{d^2v_1}{dq^2} = \frac{r}{rt - s^2},$$

d'où, en substituant dans l'équation (1), il vient

$$(a) \qquad (p^2 - q^2)\left(\frac{d^2 v_1}{dp^2} - \frac{d^2 v_1}{dq^2}\right) + 4pq\,\frac{d^2 v_1}{dp\,dq} = 0.$$

Si maintenant on peut tirer de cette équation la valeur de v_1 en fonction de p et de q, on aura ensuite aisément x et y, puis v, puis S, qui est égal à

$$\int \frac{pdy - qdx}{p^2 + q^2}.$$

Nous n'entrerons dans aucun détail ni sur l'intégration de l'équation (a), ni sur les applications que l'on peut faire relativement au système de représentation qui précède. Nous nous proposons de revenir en détail sur ce sujet dans une autre occasion.

Note de M. Liouville.

J'aurais à présenter plusieurs remarques au sujet des deux Thèses précédentes. L'analyse dont l'auteur fait usage dans la première, ou du moins la partie de cette analyse qui lui sert à compléter l'ancien travail de Poisson, est tirée d'une méthode générale que j'ai donnée dans ce Journal pour développer certaines fonctions V et démontrer la convergence de séries procédant suivant de telles fonctions. Les questions traitées dans la seconde Thèse ont été un des objets de mes leçons au Collége de France au premier semestre de l'année scolaire 1850-1851, leçons que j'espère un jour publier, et dont j'avais d'ailleurs déjà donné d'avance, pour ainsi dire, une partie dans les Notes de l'*Application de l'Analyse à la Géométrie*, par Monge (cinquième édition). M. J. Dienger a bien voulu citer mon travail en écrivant à son tour sur ce sujet dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* de MM. Terquem et Gerono. Ces Notes contiennent même la solution complète de la question du *tracé géographique à trois dimensions*, qui semblait au premier abord offrir de grandes difficultés. Mais l'occasion se présentera plus tard de revenir sur tout cela. Et en attendant j'applaudis à ce que M. Bonnet a pu ajouter de neuf aux travaux de ses devanciers.