JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BERTRAND

Note sur l'intégration des équations différentielles

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 17 (1852), p. 175-176.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1852_1_17__175_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

Note sur l'intégration des équations différentielles;

Par M. J. BERTRAND.

L'intégrale générale d'une équation différentielle de la forme

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y)$$

doit fournir l'expression de y en fonction de x et d'une constante arbitraire C. La détermination de cette intégrale équivaut donc à la recherche d'une fonction de deux variables. Mais lorsque, par la nature de l'équation, on peut prévoir de quelle manière la constante figure dans l'expression générale de y, il ne reste plus qu'une fonction d'une seule variable à déterminer, et le problème se ramène, en général, aux quadratures.

Cette remarque conduit d'une manière simple à l'intégration des équations différentielles que l'on prend le plus ordinairement pour exemples dans les Traités de calcul intégral.

Soit une équation homogène

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right);$$

on démontre, bien facilement, que l'intégrale représente une série de courbes semblables ayant pour centre de similitude l'origine et ayant une équation générale de la forme

$$x = \mathrm{CF}\left(\frac{y}{x}\right), \quad \text{ou} \quad \log x = \log \mathrm{C} + \log \mathrm{F}\left(\frac{y}{x}\right),$$

d'où l'on déduit

$$\frac{dx}{x} = \frac{\mathrm{F}'\left(\frac{y}{x}\right) d.\frac{y}{x}}{\mathrm{F}\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

Si l'on pose $\log x = \mathrm{U}$, $\frac{y}{x} = z$, cette équation deviendra

$$d\mathrm{U} = \frac{\mathrm{F}'(z)\,dz}{\mathrm{F}(z)},$$

et les variables seront séparées.

Soit l'équation linéaire

$$\frac{dy}{dx} + y\varphi(x) + \psi(x) = 0;$$

l'intégrale est évidemment de la forme

$$y = \varphi_1(x) + C\psi_1(x), \quad \text{ou} \quad \frac{y}{\psi_1(x)} = \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)} + C,$$

ce qui donne, par la différentiation,

$$\frac{d.\dfrac{y}{\psi_1(x)}}{dx} = \frac{d.\dfrac{\varphi_1}{\psi_1}}{dx}.$$

Si donc on pose $\frac{y}{\psi_1(x)} = z$, les variables seront séparées; et l'on est conduit de cette manière à représenter y par le produit de deux fonctions inconnues de x, ce qui est, comme on sait, le procédé ordinaire d'intégration.

On peut démontrer d'une manière analogue le théorème fondamental de la théorie des équations linéaires. Soit

$$\frac{d^m y}{du^m} + P_1\frac{d^{m-1}y}{du^{m-1}} + \ldots + P_m y = 0$$

une équation linéaire. On établit bien facilement que son intégrale est de la forme

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{y}{y_1} = C_1 + C_2\frac{y_2}{y_1} + \ldots + C_n\frac{y_n}{y_1},$$

d'où

$$\frac{d.\left(\dfrac{y}{y_1}\right)}{dx} = C_2\frac{d.\left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)}{dx} + \ldots + C_n\frac{d.\left(\dfrac{y_n}{y_1}\right)}{dx};$$

ce qui montre que $\frac{d.\frac{y}{y_1}}{dx}$ est l'intégrale générale d'une équation linéaire d'ordre $n-1$. Si donc on connaît y_1, en posant $\frac{y}{y_1} = u$, et prenant $\frac{du}{dx}$ pour inconnue, on sera conduit à une équation linéaire d'ordre $n-1$, en sorte que la connaissance d'une intégrale permet d'abaisser d'une unité l'ordre de l'équation différentielle sans lui faire perdre sa forme linéaire.