JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J.-A. SERRET

Sur un théorème relatif aux courbes à double courbure

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 16 (1851), p. 499-500.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1851_1_16__499_0>

Sur un théorème relatif aux courbes à double courbure;

PAR M. J.-A. SERRET.

Dans un Mémoire publié au tome précédent de ce Recueil, M. Bertrand a démontré que les normales *principales* d'une courbe à double courbure donnée ne peuvent être les normales principales d'une autre courbe, à moins qu'il n'existe une relation linéaire entre les deux courbures de la courbe donnée. On démontre ce théorème d'une manière très-simple et très-élégante en faisant usage des formules que j'ai données dans un Mémoire qui fait partie du présent volume (page 193).

Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires de la courbe donnée; α, β, γ; λ, μ, ν; ξ, υ, ζ les angles formés avec les axes par la tangente, par l'axe du plan osculateur, et par la normale principale respectivement; ds la différentielle de l'arc de la courbe; ρ le rayon de la première courbure; et r le rayon de la deuxième courbure ou le rayon de torsion. On a (*voyez* le Mémoire cité plus haut)

$$(1)\qquad d\cos\alpha = \frac{ds}{\rho}\cos\xi,\quad d\cos\lambda = \frac{ds}{r}\cos\xi,\quad d\cos\xi = -\frac{ds}{\rho}\cos\alpha - \frac{ds}{r}\cos\lambda.$$

Des formules semblables ont lieu à l'égard des deux autres axes coordonnés.

Cela posé, cherchons la condition pour que les normales principales de la courbe donnée soient aussi celles d'une autre courbe. Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées de cette deuxième courbe, ds_1 la différentielle de l'arc, et $d\omega$ l'angle de contingence. On doit avoir, a étant une constante,

$$(2)\qquad x_1 = x + a\cos\xi \qquad \text{et} \qquad (3)\qquad d\frac{dx_1}{ds_1} = \cos\xi\, d\omega.$$

Différentiant l'équation (2), il vient, à cause de $dx = ds\cos\alpha$,

$$dx_1 = \left[\left(1 - \frac{a}{\rho}\right)\cos\alpha - \frac{a}{r}\cos\lambda\right]ds;$$

de cette équation et des deux autres semblables relatives aux axes des y et des z, on déduit

$$ds_1 = \sqrt{\left(1 - \frac{a}{\rho}\right)^2 + \frac{a^2}{r^2}}\, ds = \mathrm{R}\, ds;$$

on a, d'après cela,

$$\frac{dx_1}{ds_1} = \frac{1}{\mathrm{R}}\left[\left(1 - \frac{a}{\rho}\right)\cos\alpha - \frac{a}{r}\cos\lambda\right];$$

différentiant cette dernière équation et comparant le résultat avec l'équation (3), il vient

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}&\left[\frac{1}{\rho} - a\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right) - \mathrm{R}\frac{d\omega}{ds}\right] ds\cos\xi - \left[a d\frac{1}{\rho} + \left(1-\frac{a}{\rho}\right)\frac{d\mathrm{R}}{\mathrm{R}}\right]\cos\alpha\\ &\qquad - \left(ad\frac{1}{r} - \frac{a}{r}\frac{d\mathrm{R}}{\mathrm{R}}\right)\cos\lambda = 0.\end{aligned}\right.$$

Il est évident que cette équation aura lieu encore si l'on remplace α, λ, ξ par 6, μ, ν ou par γ, ν, ζ respectivement; d'où il suit que les coefficients de $\cos\xi$, $\cos\alpha$, $\cos\lambda$ sont nuls. On a donc

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}&d\omega = \left[\frac{1}{\rho} - a\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)\right]\frac{ds}{\mathrm{R}},\\ &ad\frac{1}{\rho} + \left(1-\frac{a}{\rho}\right)\frac{d\mathrm{R}}{\mathrm{R}} = 0,\\ &d\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\frac{d\mathrm{R}}{\mathrm{R}} = 0.\end{aligned}\right.$$

Ces équations (5) sont le résultat de l'élimination de x_1, y_1, z_1, entre les équations (2), (3) et les quatre semblables relatives aux axes des y et des z. Les deux dernières ne contiennent que ρ et r, car

$$\mathrm{R} = \sqrt{\left(1-\frac{a}{\rho}\right)^2 + \frac{a^2}{r^2}},$$

et elles conduisent au même résultat par l'intégration. On déduit de l'une ou de l'autre

$$(6)\quad \frac{a}{\rho} + \frac{b}{r} = 1,$$

b désignant la constante arbitraire. Telle est la condition à laquelle doit satisfaire la courbe donnée pour que ses normales principales appartiennent à une autre courbe. Quant à la première des équations (5), elle fait connaître l'angle de contingence $d\omega$ de la seconde courbe.

FIN DU SEIZIÈME VOLUME.

PARIS. — IMPRIMERIE DE BACHELIER, rue du Jardinet, 12.