JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ANT. WINCKLER

Nouvelle démonstration d'un théorème de Legendre

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 16 (1851), p. 375-376.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1851_1_16__375_0>

NOUVELLE DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE LEGENDRE;

PAR M. ANT. WINCKLER,
Professeur à l'École Polytechnique de Carlsruhe.

Legendre a trouvé (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, année 1787, page 358) que le calcul d'un triangle sphérique, dont les côtés sont très-petits par rapport au rayon de la sphère, se ramène au calcul d'un triangle rectiligne des mêmes côtés, en retranchant le tiers de l'excès sphérique de chacun de ses angles.

Les démonstrations connues que Lagrange, dans le VI[e] cahier du *Journal de l'École Polytechnique,* et M. Gauss, dans le tome VI du présent Journal, page 273, ont donné de ce remarquable et utile théorème, peuvent être remplacées avantageusement, je crois, par la démonstration élémentaire et plus rapide que voici.

Soient a, b, c les côtés et α, β, γ les angles d'un triangle sphérique sur une sphère dont le rayon $= 1$; désignons par α^0, β^0, γ^0 les angles d'un triangle rectiligne des mêmes côtés : ces côtés a, b, c sont regardés comme des quantités très-petites du premier ordre, et le théorème de Legendre suppose qu'on néglige les quantités du quatrième ordre. Or, dans la formule

$$\tang\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{a+b-c}{2}\sin\frac{a-b+c}{2}}{\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{-a+b+c}{2}}},$$

développez en séries les sinus, et faites les multiplications, en négligeant les termes du quatrième ordre et des ordres supérieurs :

vous aurez

$$\tang\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{(a+b+c)(-a+b+c)}}\sqrt{\frac{1-\frac{1}{12}(a^2+b^2+c^2-2bc)}{1-\frac{1}{12}(a^2+b^2+c^2+2bc)}},$$

ou

$$\tang\frac{\alpha}{2}=\tang\frac{\alpha^0}{2}\sqrt{1+\frac{1}{3}bc};$$

et, si l'on extrait la racine,

$$\tang\frac{\alpha}{2}=\tang\frac{\alpha^0}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{6}bc\right),$$

d'où il suit

$$\sin\frac{\alpha-\alpha^0}{2}=\frac{1}{6}bc\,.\sin\frac{\alpha^0}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Il résulte de là que la différence $\alpha-\alpha^0$ est du second ordre. Partant, si l'on pose

$$\alpha-\alpha^0=\frac{1}{6}bc\sin\alpha^0,$$

cette équation sera exacte aux termes près du quatrième ordre. A ce degré d'approximation, on aura de même

$$\beta-\beta^0=\frac{1}{6}ac\sin\beta^0,\quad \gamma-\gamma^0=\frac{1}{6}ab\sin\gamma^0.$$

Mais les trois quantités $bc\sin\alpha^0$, $ac\sin\beta^0$, $ab\sin\gamma^0$ sont égales entre elles, en vertu du rapport qui lie les côtés d'un triangle rectiligne aux sinus des angles opposés. Donc les différences $\alpha-\alpha^0$, $\beta-\beta^0$, $\gamma-\gamma^0$ sont aussi égales; et comme leur somme fait l'excès sphérique, chacune d'elles en est le tiers: de là, comme conséquence immédiate, le théorème de Legendre.