JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

P. SAINT-GUILHEM

Nouvelle étude sur la théorie des forces

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 16 (1851), p. 347-374.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1851_1_16__347_0>

NOUVELLE ÉTUDE SUR LA THÉORIE DES FORCES;

PAR M. P. SAINT-GUILHEM,

Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées.

I.

CONSIDÉRATIONS PRÉLIMINAIRES SUR LA COMPOSITION DES FORCES QUI SOLLICITENT UN CORPS SOLIDE.

1. Si les forces P_1, P_2, P_3,..., appliquées à divers points d'un corps solide, sont transportées parallèlement à elles-mêmes en un même point du corps, leur résultante P sera ce que nous nommerons la *résultante géométrique* des forces P_1, P_2, P_3,...; l'une quelconque de celles-ci sera le *complément* des autres *par rapport* à la force P.

Nous dirons que la droite D est la *résultante* des droites D_1, D_2, D_3,..., lorsque la droite D, considérée comme une force, sera la résultante des droites D_1, D_2, D_3,..., considérées aussi comme des forces.

On démontre facilement (*voir* la Note I, page 372) qu'une force quelconque P peut toujours se décomposer en deux autres, F et G, situées toutes deux dans le plan qui passe par la force P et par un point arbitraire o, l'une appliquée immédiatement au point o, l'autre suivant une droite arbitraire distante du point o d'une quantité égale à l'unité.

La force G a pour mesure, quelle que soit sa direction, le produit de la force P par sa distance au point o et tend à tourner autour du point o dans le même sens que la force P; la force F n'est autre chose que le complément de la force G par rapport à la force P.

Nous nommerons la force G le *moment* de la force P *autour* du point o; le point o, autour duquel on peut imaginer que le moment de la force P tend à faire tourner son point d'application, sera le *centre du moment* de la force P; le plan passant par la force P et par le point o sera le *plan du moment* de la force P.

Composition directe des moments et de leurs compléments.

2. Soient P_1, P_2, P_3,... des forces quelconques appliquées à divers points d'un corps solide; G_1, G_2, G_3,... leurs moments respectifs autour d'un point arbitraire o; F_1, F_2, F_3,... les compléments de ces moments par rapport aux forces P_1, P_2, P_3,... appliqués au point o.

Les moments G_1, G_2 pouvant affecter des directions arbitraires dans leurs plans, concevons qu'ils soient appliqués au même point suivant deux droites perpendiculaires à l'intersection de leurs plans; ils se composeront en une seule force G', laquelle, étant située à l'unité de distance du point o, se confondra avec son propre moment; les compléments F_1, F_2 se composeront également en une seule force F' qui sera évidemment le complément de G_1 et G_2 ou de G' par rapport à la résultante géométrique de P_1, P_2.

Appliquons maintenant les moments G' et G_3 au même point perpendiculairement à l'intersection de leurs plans; ils se composeront en un seul G''; les compléments F', F_3 (dont les directions et les intensités ont changé en même temps que les directions de G' et G_3) se composeront en un seul F'' qui sera le complément de G'' par rapport à la résultante géométrique de P_1, P_2, P_3.

En procédant toujours de même, on arrive à un dernier moment, qui sera le *moment résultant* du système, et à un dernier complément, qui sera le complément du moment résultant par rapport à la résultante géométrique du système.

Composition des moments par leurs axes.

3. Si, par le point o, on élève une perpendiculaire au plan du moment de la force P, cette perpendiculaire sera l'*axe du moment* de la force P; la *direction* de cet axe sera telle, qu'un spectateur, qui aurait les pieds sur le plan et le dos appuyé contre l'axe, verrait la force P dirigée de sa gauche à sa droite; sa *grandeur* sera la grandeur même du moment de la force.

De cette définition on déduit immédiatement ces deux corollaires :

Corollaire I. *L'angle des axes de deux moments est toujours égal (jamais son supplément) à l'angle des moments eux-mêmes appliqués au même point perpendiculairement à l'intersection de leurs plans.*

Corollaire II. *L'axe du moment résultant de deux forces est la diagonale du parallélogramme construit sur les axes des moments de ces forces.*

A l'aide de ces deux corollaires, on établit sans peine la relation suivante :

Quelles que soient les forces appliquées à un corps solide, l'axe du moment résultant est la résultante des axes des moments du système.

Détermination algébrique de l'axe du moment résultant.

4. Posons les deux lemmes suivants :

Lemme I. *Si l'on projette sur un plan plusieurs forces appliquées au même point et leur résultante, la projection de la résultante sera la résultante des projections.*

En effet, un parallélogramme se projette toujours sur un plan suivant un parallélogramme; donc le principe est vrai pour deux forces et leur résultante, donc il est général.

Lemme II. *A une force donnée on peut toujours substituer ses trois projections sur trois plans rectangulaires quelconques et une quatrième force appliquée à l'intersection commune des trois plans, égale, parallèle et contraire à la force donnée.*

En effet, soient o un point arbitraire; ox, oy, oz trois axes rectangulaires menés par ce point; P la force donnée. Si l'on suppose d'abord la force P dirigée suivant la perpendiculaire abaissée de son point d'application sur l'axe des x, elle pourra évidemment être remplacée par ses projections sur les plans des zx et des xy : d'ailleurs cette force étant parallèle au plan des yz et dirigée vers l'axe des x, elle se projettera sur le plan des xy dans sa véritable grandeur suivant une droite dirigée vers le point o; donc, dans ce cas, le principe est vrai.

En second lieu, si la force P a une direction quelconque, elle pourra toujours être décomposée en trois autres suivant les trois perpendiculaires abaissées de son point d'application sur les axes des x, des y, des z: le principe sera vrai pour chacune d'elles; donc il sera vrai pour leur résultante, puisque la projection de celle-ci sur chaque plan est la résultante des projections des composantes.

Nota. Le même raisonnement démontre que la force P peut toujours être remplacée par ses projections sur les trois plans coordonnés et par leur complément, par rapport à la force P, appliqué au point o.

5. Cela posé, soient o le centre des moments; ox, oy, oz trois axes rectangulaires menés par ce point; remplaçons chacune des forces données par ses projections sur les plans des yz, zx, xy et par une force égale, parallèle et contraire appliquée au point o; supposons que les forces situées dans les plans des yz, zx, xy aient les axes de leurs moments positifs ou négatifs, suivant qu'ils coïncident avec la partie positive ou négative de l'axe des x, des y, des z; supposons, en outre, que les moments eux-mêmes soient positifs ou négatifs suivant que leurs axes sont positifs ou négatifs; qu'ils soient positifs sur le plan des yz lorsqu'ils tendent à tourner, autour du point o, des y positives vers les z positives; que, par conséquent, ils soient positifs sur le plan des zx lorsqu'ils tendent à tourner des z positives vers les x positives; sur le plan des xy lorsqu'ils tendent à tourner des x positives vers les y positives.

Si l'on appelle P_1 une des forces données appliquée au point m_1; x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point m_1; X_1, Y_1, Z_1 les composantes de P_1 parallèles aux axes des x, y, z, il est facile de voir que, quelle que soit la position du point m_1, les moments des projections de la force P_1 sur les plans des yz, zx, xy seront respectivement

$$(1) \qquad Z_1 y_1 - Y_1 z_1, \quad X_1 z_1 - Z_1 x_1, \quad Y_1 x_1 - X_1 y_1.$$

Ces trois formules sont comprises dans la suivante :

Si l'on considère x_1, y_1, z_1 comme formant un groupe de lettres tournantes, en sorte que x_1 précède y_1, y_1 précède z_1 et z_1 précède x_1, le moment de la projection de la force P_1 sur le plan coordonné paral-

lèle à deux quelconques des coordonnées du point m_1, est égal à la première des deux coordonnées, multipliée par la composante de P_1 parallèle à la seconde, moins la seconde multipliée par la composante de P_1 parallèle à la première.

Si l'on désigne maintenant par L, M, N les composantes de l'axe du moment résultant, parallèles aux axes des x, des y, des z, on aura évidemment

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} L &= \Sigma(Z_1 y_1 - Y_1 z_1),\\ M &= \Sigma(X_1 z_1 - Z_1 x_1),\\ N &= \Sigma(Y_1 x_1 - X_1 y_1),\end{aligned}\right.$$

la sommation indiquée par le signe Σ s'étendant à tous les points du corps.

Comment varie le moment résultant lorsqu'on déplace le centre des moments.

6. Si l'on désigne par o' le nouveau centre des moments; par L_0, M_0, N_0 ce que deviennent L, M, N lorsqu'on transporte toutes les forces du système parallèlement à elles-mêmes au point o'; par L', M', N' ce que deviennent les mêmes quantités lorsqu'on prend pour centre des moments le point o' et que les axes coordonnés sont transportés parallèlement à eux-mêmes en ce point, on aura évidemment, en vertu des relations (2),

$$L = L' + L_0,\quad M = M' + M_0,\quad N = N' + N_0,$$

d'où l'on déduit immédiatement le théorème suivant :

Si par un point arbitraire de l'espace on mène trois droites A, A', B' *égales et parallèles, la première à l'axe du moment résultant relatif au point o; la deuxième à l'axe du moment résultant relatif au point o'; la troisième à l'axe du moment de la résultante géométrique du système appliqué au point o' par rapport au point o, la droite* A *sera la diagonale du parallélogramme construit sur* A' *et* B' (*voir* la Note II, page 373).

De là les conséquences suivantes :

1°. Si l'on déplace le centre des moments sur une parallèle à la résultante géométrique, l'axe du moment résultant conservera la même grandeur et la même direction ; en effet, dans cette hypothèse, la droite B′ est toujours nulle : donc, etc.

2°. Quel que soit le déplacement du centre des moments, l'axe du moment résultant, estimé suivant la résultante géométrique du système, conservera toujours la même grandeur et la même direction ; car la droite qui joint les extrémités de A et A′ est parallèle à la droite B′, laquelle est nécessairement perpendiculaire à la résultante géométrique.

3°. Parmi tous les axes des moments résultants relatifs aux divers points de l'espace, les plus petits sont parallèles à la résultante géométrique du système et égaux à la projection de l'axe du moment résultant relatif à un point quelconque sur cette résultante.

Le lieu des centres correspondants aux axes minima s'obtient aisément; en effet, si A′ est l'un de ces axes, A et A′ étant connus en grandeur et en direction, B′ l'est également; B′ étant connu, si l'on construit une force R égale et parallèle à la résultante géométrique et dont le moment par rapport au point o ait pour axe une droite égale et parallèle à la droite B′, la droite suivant laquelle agit la force R sera évidemment le lieu cherché. Cette droite est ce que l'on nomme l'*axe central*.

4°. Si A coïncide avec l'axe central, en appelant ρ la distance du point o' à l'axe central, on aura

$$B' = R\rho,$$

et, par conséquent,

$$A'^2 = A^2 + R^2\rho^2.$$

Conditions d'équilibre d'un corps solide sollicité par des forces quelconques.

7. Soient G le moment résultant des forces données par rapport à un point arbitraire o; F son complément appliqué au point o par rapport à la résultante géométrique du système; R cette résultante.

Les forces F et G ne pouvant être, par leur nature, directement opposées, on doit admettre comme un axiome qu'elles ne peuvent se faire équilibre, à moins qu'elles ne soient séparément nulles, c'est-à-dire que l'on n'ait

$$F = 0, \quad G = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$R = 0, \quad G = 0.$$

De ces deux conditions, on déduit facilement les six équations connues.

II.

RELATIONS ENTRE LES VITESSES DES DIVERS POINTS D'UN CORPS SOLIDE EN MOUVEMENT.

8. Nous appelons *milieu* un espace indéfini, fixe ou mobile, déterminé par des points géométriques dont chacun est situé à des distances invariables de tous les autres. Le milieu est *absolu* ou *relatif* suivant qu'il est en repos ou en mouvement.

Un milieu est *doué d'une vitesse donnée,* lorsque tous les points de ce milieu sont doués d'une vitesse égale et parallèle à la vitesse donnée.

Un point matériel est *doué à la fois* des vitesses $a, b, c, \ldots, k$ lorsque ce point, considéré comme situé à la fois dans autant de milieux qu'il possède de vitesses, est supposé doué de la vitesse a dans le premier milieu; ce premier milieu doué de la vitesse b dans un deuxième milieu; ainsi de suite; enfin l'avant-dernier milieu doué de la vitesse k dans le dernier milieu, qui est un milieu absolu.

De là on déduit immédiatement ce principe :

Si un point matériel est doué à la fois des vitesses $\mathbf{a}, b, c, \ldots, k$, *il est doué réellement dans l'espace d'une seule vitesse représentée en grandeur et en direction par la résultante des vitesses* $\mathbf{a}, b, c, \ldots, k$ *composées entre elles comme des forces.*

Un corps solide est *doué à la fois* des mouvements A, B, C,..., K lorsque ce corps, considéré comme situé à la fois dans autant de milieux qu'il possède de mouvements, est supposé doué du mouvement A dans le premier milieu; le premier milieu du mouvement B dans le deuxième milieu; etc.

Lorsqu'un corps solide est doué d'un mouvement de rotation autour d'un axe, nous supposerons que cet axe a une *direction positive* et une *direction négative;* la direction positive sera telle, qu'un spectateur qui serait placé le long de l'axe, les pieds du côté négatif, la tête du côté positif, verrait le mouvement du corps s'effectuer de sa gauche à sa droite.

Si sur l'axe de rotation et à partir d'une origine arbitraire on prend, du côté positif, une longueur Ω égale à la vitesse angulaire du corps, nous dirons que la portion de l'axe ainsi déterminée est la *caractéristique* Ω du mouvement de rotation.

Le *moment de la caractéristique par rapport à un point* sera le moment de la force représentée par cette caractéristique.

Première relation. *Si un corps solide se meut autour d'un point fixe, le mouvement qui a lieu peut être considéré pendant la durée de chaque instant comme un mouvement de rotation autour d'un axe fixe.*

Nous avons donné dans le tome Ier de ce Journal, page 310, une démonstration géométrique très-simple de cette relation; nous ne la reproduirons pas (*voir* la Note III, page 374).

Deuxième relation. *Un corps solide en mouvement peut toujours être considéré comme doué d'un mouvement hélicoïdal le long d'un axe fixe ou mobile.*

En effet, si nous concevons le corps plongé dans un milieu doué d'un mouvement égal et parallèle à celui d'un quelconque de ses points m, il est évident que le corps tournera dans ce milieu autour du point m comme autour d'un point fixe. Soient v la vitesse du point m dans l'espace; D l'axe instantané dans le milieu relatif. Décomposons la vitesse v en deux autres v_1, v_2, l'une suivant la droite D, l'autre perpendiculaire à cette droite; menons par la droite D un plan perpendiculaire à v_2; tirons dans ce plan une droite D′ parallèle à la droite D et douée dans le milieu relatif d'une vitesse de rotation v' égale et contraire à v_2. Un point quelconque m' de cette droite sera doué dans l'espace de la vitesse v et de la vitesse v', ou des trois vitesses v_1, v_2 et v'. Mais v' est égal et contraire à v_2; donc le point m n'est doué que de la vitesse v_1 dirigée suivant la droite D' : il en est de même de tous les autres points de la droite D'. D'ailleurs chaque point de la droite D est doué dans l'espace d'une vitesse égale et parallèle à v, ou, ce qui revient au même, d'une vitesse égale et parallèle à v_1 suivant la droite D', et d'une vitesse de rotation égale à v_2 autour de la même droite; donc, etc.

Nota. Chaque point du corps détermine un axe qui jouit de la même propriété; par conséquent, il y a une infinité d'axes le long desquels le corps se meut à chaque instant d'un mouvement héliçoïdal.

Troisième relation. *Si un corps solide est doué à la fois de plusieurs mouvements de rotation dont les caractéristiques* Ω_1, Ω_2, Ω_3,... *convergent vers un même point, le corps sera doué d'un simple mouvement de rotation dont la caractéristique sera la résultante* Ω *des caractéristiques* Ω_1, Ω_2, Ω_3,....

En effet, soit o le point de concours des caractéristiques Ω_1, Ω_2, Ω_3,...; menons par ce point un plan perpendiculaire à la résultante Ω; prenons dans ce plan un point arbitraire m situé à l'unité de distance du point o. Le point m sera doué à la fois des vitesses ω_1, ω_2, ω_3,... telles, qu'en les considérant comme des moments, leurs axes seront les caractéristiques Ω_1, Ω_2, Ω_3,...; la vitesse résultante aura pour axe Ω; donc le point m sera doué réellement, autour de l'axe Ω, d'un mouvement de rotation dont la caractéristique sera Ω. Cela étant vrai pour tous les points situés à l'unité de distance du point o dans le plan perpendiculaire à Ω mené par ce point, cela est vrai pour le corps tout entier; donc, etc.

Quatrième relation. *Si un corps solide est doué à la fois de plusieurs mouvements de rotation dont les caractéristiques* Ω_1, Ω_2, Ω_3,... *aient des situations quelconques dans l'espace, on pourra toujours le considérer comme doué seulement de deux mouvements : d'un mouvement de translation dont la vitesse serait représentée en grandeur et en direction par l'axe du moment résultant des caractéristiques re-*

latif à un point arbitraire m, et d'un mouvement de rotation dont la caractéristique serait représentée par la résultante géométrique des caractéristiques, appliquée au point m.

En effet, les caractéristiques Ω_1, Ω_2, Ω_3,... pourront évidemment se composer entre elles exactement comme si elles représentaient des forces; par conséquent, elles pourront se réduire à deux F et G, l'une ayant pour origine le point m, l'autre dirigée suivant une droite distante du point m d'une quantité égale à l'unité, celle-ci étant le moment résultant des caractéristiques par rapport au point m; celle-là le complément de la caractéristique G par rapport à la résultante géométrique R des caractéristiques Ω_1, Ω_2, Ω_3,....

La caractéristique F pourra être décomposée en deux : l'une $-$ G égale, parallèle et contraire à la caractéristique G, l'autre égale et parallèle à la résultante R. On aura alors deux caractéristiques G, $-$ G égales, parallèles et opposées, et une troisième caractéristique R appliquée au point m. Or il est facile de voir que les deux rotations G, $-$ G produisent un simple mouvement de translation. En effet, soient m' un point de la caractérique $-$ G autre que le point m, m'' un point quelconque de la caractéristique G; il est visible qu'en vertu des deux rotations simultanées G, $-$ G, les trois points m, m', m'' auront des vitesses égales et parallèles à l'axe du moment de la caractéristique G relatif au point m; donc le plan déterminé par les caractéristiques G, $-$ G, et, par conséquent, le corps tout entier aura un mouvement de translation dont la vitesse sera égale et parallèle à l'axe du moment résultant des caractéristiques Ω_1, Ω_2, Ω_3,... relatif au point m; d'ailleurs il a un mouvement de rotation dont la caractéristique est R; donc, etc.

Nota. Si l'on prend, suivant les indications du n° 6, l'origine m de manière que l'axe du moment résultant des caractéristiques soit parallèle à la résultante géométrique de celle-ci, le corps aura un mouvement hélicoïdal le long d'un axe parallèle à cette résultante; la vitesse de translation sera alors un minimum, comme nous l'avons vu.

III.

DU MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE EN TENANT COMPTE DES FORCES QUI LE SOLLICITENT.

9. Un point matériel qui est soumis à des forces et à des liaisons quelconques peut toujours être considéré comme libre et soumis à une force unique : nous nommerons cette force unique la *force totale* qui sollicite le point matériel ; la résultante de toutes les forces qui sollicitent un point matériel sera la *force motrice*.

Si l'on décompose la force totale en deux, l'une suivant la tangente à la courbe décrite, l'autre suivant la normale, la première sera la *force tangentielle*, la seconde la *force infléchissante* ou *centripète*. Si l'on désigne par m la masse du point matériel que l'on considère ; par v sa vitesse au bout du temps t ; par ρ le rayon de courbure du petit arc décrit dans le temps dt ; la force tangentielle aura pour mesure $\frac{m\,dv}{dt}$: elle sera positive ou négative suivant qu'elle agira dans le sens du mouvement ou en sens contraire ; la force infléchissante aura pour mesure $\frac{mv^2}{\rho}$: elle tendra à *infléchir* le mouvement vers le centre de courbure.

Si l'on imagine une force appliquée à un point matériel suivant la direction de sa vitesse et ayant pour mesure sa masse multipliée par sa vitesse, on aura ce que l'on nomme la *quantité de mouvement* du point matériel.

Relation qui existe entre l'axe du moment résultant des forces infléchissantes et l'axe du moment résultant des quantités de mouvement.

10. Soient o le point fixe ; m la masse d'un point quelconque du corps ; P et Q sa force infléchissante et sa quantité de mouvement ; F et G les axes des moments des forces P et Q relatifs au point o ; F_r l'axe du moment résultant des forces infléchissantes ; G_r l'axe du moment résultant des quantités de mouvement ; soient d'ailleurs Ω la caractéristique du mouvement de rotation; ρ_0, ρ les distances du point m au point fixe et à la caractéristique; h_0 la projection de ρ_0 sur la caractéristique. On aura, comme on sait, les relations suivantes :

$$\mathrm{P} = m\Omega^2\rho, \quad \mathrm{Q} = m\Omega\rho, \quad \mathrm{F} = m\Omega^2\rho h_0, \quad \mathrm{G} = m\Omega\rho\rho_0.$$

Cela posé, menons par le point o trois axes rectangulaires ox, oy, oz tels, que l'axe oz coïncide avec la caractéristique du mouvement; que le point m soit dans l'angle xoz ou dans l'angle xoz', oz' étant le prolongement de oz; que le corps tourne des x positives vers les y positives.

Il est visible que l'axe F sera toujours situé dans le plan de xy et coïncidera avec l'axe des y négatives ou des y positives [*] suivant que le point m sera dans l'angle xoz ou dans l'angle xoz'; que la projection de l'axe G sur le plan des xy coïncidera, dans les mêmes hypothèses, avec l'axe des x négatives ou des x positives. Donc l'axe F se trouvera toujours sur le plan des xy à 90 degrés à droite de la projection de l'axe G sur le même plan: d'ailleurs cette projection est égale à

$$m\Omega\rho \cdot \rho_0 \frac{h_0}{\rho_0} = m\Omega\rho\, h_0 = \mathrm{F} \cdot \frac{1}{\Omega};$$

donc, si l'on désigne par g_r la projection de G_r sur le plan des xy, cette projection sera située à 90 degrés à gauche de F_r, et l'on aura

$$g_r = \mathrm{F}_r \cdot \frac{1}{\Omega} \quad \text{ou} \quad \mathrm{F}_r = g_r \cdot \Omega.$$

Donc F_r est parallèle à la vitesse de l'extrémité de l'axe G_r et égale à cette vitesse; donc, *lorsqu'un corps solide tourne autour d'un point fixe, l'axe du moment résultant des forces infléchissantes est représenté en grandeur et en direction par la vitesse du point du corps situé à l'extrémité de l'axe du moment résultant des quantités de mouvement, le centre des moments étant le point fixe.*

---

[*] Suivant nos conventions, le moment d'une force tend toujours à tourner de gauche à droite autour de son axe.

Détermination de l'axe du moment résultant des quantités de mouvement.

11. Soient Ω la caractéristique du mouvement; m la masse d'un point quelconque du corps; ρ sa distance à la caractéristique; x, y, z ses trois coordonnées par rapport à trois axes rectangulaires menés par le plan fixe et assujettis aux conditions exprimées au n° **5**; p, q, r les trois composantes de la caractéristique suivant les axes des x, y, z.

Si l'on imagine que l'on ait mené par le point m une droite égale, parallèle et contraire à la caractéristique, il est visible que l'axe du moment de cette droite considérée comme une force sera égal et parallèle à la vitesse du point m; d'où il suit que les projections de la vitesse du point m sur les axes des x, y, z seront respectivement, d'après la formule du n° **5**, $qz - ry$, $rx - pz$, $py - qx$; que l'axe du moment de la quantité de mouvement du point m aura pour projections sur les mêmes axes les quantités

$$m[(py - qx)y - (rx - pz)z],$$
$$m[(qz - ry)z - (py - qx)x],$$
$$m[(rx - pz)x - (qz - ry)y].$$

Si nous posons, pour abréger,

$$\Sigma m(y^2 + z^2) = \mathrm{A}, \quad \Sigma m(z^2 + x^2) = \mathrm{B}, \quad \Sigma m(x^2 + y^2) = \mathrm{C},$$
$$\Sigma myz = \mathrm{D}, \qquad \Sigma mzx = \mathrm{E}, \qquad \Sigma mxy = \mathrm{F},$$

la sommation indiquée par le signe Σ s'étendant à tous les points du corps, et si nous désignons par L, M, N les projections de l'axe du moment résultant des quantités de mouvement sur les axes des x, y, z, on aura

$$(1) \quad \mathrm{L} = \mathrm{A}p - \mathrm{F}q - \mathrm{E}r, \quad \mathrm{M} = \mathrm{B}q - \mathrm{D}r - \mathrm{F}p, \quad \mathrm{N} = \mathrm{C}r - \mathrm{E}p - \mathrm{D}q.$$

Ces trois projections suffisent pour déterminer à chaque instant la grandeur et la direction de l'axe du moment résultant des quantités de mouvement.

Comment varie le moment d'inertie du corps par rapport à un axe dont la position change sans cesser de passer par le point fixe.

12. Si l'on appelle k le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe instantané, $k\Omega$ sera l'axe du moment résultant des quantités de mouvement estimé suivant la caractéristique, et l'on aura la relation

$$k\Omega = \mathrm{L}\frac{p}{\Omega} + \mathrm{M}\frac{q}{\Omega} + \mathrm{N}\frac{r}{\Omega},$$

ou bien, en observant que $\Omega^2 = p^2 + q^2 + r^2$,

$$(2) \qquad k(p^2 + q^2 + r^2) = \mathrm{L}p + \mathrm{M}q + \mathrm{N}r.$$

Si dans cette relation on considère p, q, r comme les coordonnées d'un point variable de la surface représentée par l'équation

$$\mathrm{L}p + \mathrm{M}q + \mathrm{N}r = 1,$$

ou, ce qui revient au même, par l'équation

$$(3) \qquad \mathrm{A}p^2 + \mathrm{B}q^2 + \mathrm{C}r^2 - 2\mathrm{D}qr - 2\mathrm{E}rp - 2\mathrm{F}pq = 1;$$

et si l'on désigne, en outre, par δ la longueur du rayon vecteur mené du point fixe au point p, q, r, on aura

$$k\delta^2 = 1;$$

d'où résulte cette relation très-simple :

Le moment d'inertie du corps relatif à un rayon vecteur quelconque de la surface (3) *est en raison inverse du carré de ce rayon vecteur.*

Le rayon vecteur ayant toujours, comme le moment d'inertie, une valeur finie, on voit que la surface (3) est nécessairement un ellipsoïde. Cet ellipsoïde se nomme l'*ellipsoïde central*.

L'ellipsoïde central jouit de deux propriétés très-remarquables qui se démontrent très-aisément à l'aide des formules précédentes :

1°. p, q, r étant les coordonnées d'un point variable de la surface (3), si l'on prend ces quantités proportionnelles aux composantes de la caractéristique suivant les axes des x, y, z, les quantités L, M, N seront proportionnelles aux cosinus des angles que l'axe du plan tangent au point p, q, r de la surface (3) fait avec les axes des x, y, z; donc *le plan tangent à l'ellipsoïde central au point où l'axe instantané rencontre cette surface est perpendiculaire à l'axe du moment résultant des quantités de mouvement.*

2°. On verra plus loin que lorsque le corps n'est sollicité par aucune force, la projection de la caractéristique sur l'axe du moment résultant des quantités de mouvement est une quantité constante; donc, dans les mêmes hypothèses que précédemment,

$$Lp + Mq + Nr = H,$$

H étant une quantité fixe. Si δ est la longueur du rayon vecteur qui aboutit au point p, q, r de l'ellipsoïde central, on aura évidemment

$$\frac{1}{\delta^2} = k = \frac{H}{\Omega^2} \quad \text{ou} \quad \Omega = \delta\sqrt{H};$$

d'où l'on voit que *la vitesse angulaire du corps est proportionnelle à la longueur du rayon vecteur qui coïncide avec l'axe instantané.*

Ces propriétés sont plus curieuses que réellement utiles.

13. On appelle *axes principaux du corps* les axes principaux de l'ellipsoïde central. Il résulte de cette définition que, si les axes coordonnés sont les axes principaux du corps, on a

$$D = 0, \quad E = 0, \quad F = 0;$$

par conséquent,

$$L = Aq, \quad M = Aq, \quad N = Cr,$$

relations qu'on peut traduire ainsi :

La projection de l'axe du moment résultant des quantités de mouvement sur l'un quelconque des axes principaux du corps est égale au moment d'inertie du corps relatif à ce dernier axe multiplié par la projection de la caractéristique sur le même axe.

Remarquons que si le corps tourne autour d'un axe principal, l'axe du moment résultant des quantités de mouvement coïncide avec l'axe de rotation, et l'axe du moment résultant des forces infléchissantes est nul. Ces propriétés pourraient servir de définition aux axes principaux; la première fournirait immédiatement les moyens de déterminer ces axes.

Détermination de l'axe du moment résultant des forces infléchissantes.

14. Soient toujours p, q, r les composantes de la caractéristique suivant les axes des x, y, z; L, M, N les composantes de l'axe du moment résultant des quantités de mouvement suivant les mêmes axes coordonnés; ϖ l'extrémité de l'axe du moment résultant des quantités de mouvement.

Si l'on imagine qu'on ait appliqué au point ϖ une force égale, parallèle et contraire à la caractéristique, l'axe du moment de cette force sera évidemment égal et parallèle à la vitesse du point ϖ; par conséquent, il coïncidera en grandeur et en direction avec l'axe du moment résultant des forces infléchissantes, ainsi que nous l'avons vu au n° **10**. Si donc nous appliquons au point ϖ une force dont les composantes suivant les axes des x, des y, des z soient $-p$, $-q$, $-r$, les coordonnées du point ϖ étant L, M, N, l'axe du moment de la force appliquée au point ϖ aura pour projections sur les axes des x, y, z les quantités $Nq - Mr$, $Lr - Np$, $Mp - Lq$. Ces quantités seront, par conséquent, les projections de l'axe du moment résultant des forces infléchissantes.

Si les axes coordonnés sont les axes principaux du corps, les projections de l'axe du moment résultant des forces infléchissantes seront respectivement

$$(C - B)qr, \quad (A - C)rp, \quad (B - A)pq.$$

Équations du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.

15. Dans tout système de forces il y a équivalence entre les forces motrices et les forces totales, ou bien entre les forces motrices d'une part, les forces tangentielles et infléchissantes d'autre part. Donc, dans le cas dont il s'agit, lorsque les points d'application des forces sont invariablement liés entre eux, le moment résultant des forces motrices par rapport à un axe quelconque [*] est égal à la somme des moments

[*] Nous appelons, suivant l'usage, *moment d'une force par rapport à une droite* le moment de la projection de la force sur un plan perpendiculaire à la droite, le plan et la droite passant par le centre des moments.

résultants des forces tangentielles et infléchissantes par rapport au même axe.

Évaluons chacun de ces moments au bout du temps t par rapport à trois axes rectangulaires ox, oy, oz menés par le point fixe o; nous supposerons que ces trois axes sont fixes dans le corps, et assujettis aux conditions exprimées au n° 5.

Moments résultants des forces motrices. Nous avons enseigné, dans le § I^er^, à évaluer le moment résultant d'un système quelconque de forces appliquées à un corps solide par rapport à une droite donnée; nous pouvons donc supposer que les moments résultants des forces motrices qui sollicitent le corps au bout du temps t par rapport aux axes ox, oy, oz sont connus et représentés par P, Q, R.

Moments résultants des forces tangentielles. Si l'on appelle L, M, N les moments résultants des quantités de mouvement au bout du temps t par rapport aux axes ox, oy, oz, il est évident que les moments résultants des forces tangentielles par rapport aux mêmes axes seront exprimés respectivement par $\frac{d\mathrm{L}}{dt}$, $\frac{d\mathrm{M}}{dt}$, $\frac{d\mathrm{N}}{dt}$.

Moments résultants des forces infléchissantes. Si l'on appelle p, q, r les composantes de la caractéristique au bout du temps t, les moments résultants des forces infléchissantes par rapport aux axes ox, oy, oz seront exprimés respectivement, comme nous l'avons vu au n° **14**, par les quantités $\mathrm{N}q - \mathrm{M}r$, $\mathrm{L}r - \mathrm{N}p$, $\mathrm{M}p - \mathrm{L}q$.

Cela posé, on aura, conformément à ce qui a été dit, les équations suivantes :

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{P} &= \frac{d\mathrm{L}}{dt} + \mathrm{N}q - \mathrm{M}r,\\ \mathrm{Q} &= \frac{d\mathrm{M}}{dt} + \mathrm{L}r - \mathrm{N}p,\\ \mathrm{R} &= \frac{d\mathrm{N}}{dt} + \mathrm{M}p - \mathrm{L}q. \end{aligned}\right.$$

Ces équations, jointes aux équations (1), feront connaître p, q, r.

Déterminons maintenant la position des axes ox, oy, oz mobiles avec le corps par rapport à trois axes fixes ox_1, oy_1, oz_1; à cet effet, remarquons que le corps tournant autour de l'axe instantané pendant l'instant dt avec une certaine vitesse angulaire occupe à la fin de cet instant, par rapport à l'un quelconque des axes fixes ox_1, oy_1, oz_1, la même position que si le corps était resté fixe et que l'axe fixe eût tourné autour de l'axe instantané avec une vitesse de rotation égale et contraire à celle qu'avait le corps.

Donc, si l'on prend sur l'un des axes ox_1, oy_1, oz_1 un point quelconque m', et qu'on mène par ce point une droite égale et parallèle à la caractéristique, l'axe du moment de cette droite (considérée comme une force) sera égal et parallèle à la vitesse de ce point; donc, si l'on appelle x', y', z' les coordonnées du point m' par rapport aux axes ox, oy, oz, on aura les relations

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx'}{dt} &= ry' - qz', \\ \frac{dy'}{dt} &= pz' - rx', \\ \frac{dz'}{dt} &= qx' - pq'. \end{aligned}\right.$$

Au moyen de ces relations on aura la position de chacun des axes ox_1, oy_1, oz_1 par rapport aux trois axes principaux, et, par conséquent, la position de chacun des axes principaux par rapport aux trois axes fixes ox_1, oy_1, oz_1. Les équations (5) étaient déjà connues, mais on n'y était parvenu que par des combinaisons d'équations plus ou moins pénibles.

Examen du cas où l'on a à la fois $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$.

16. Dans le cas particulier où l'on a à la fois

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0,$$

c'est-à-dire dans le cas où les forces motrices se font équilibre autour du point fixe, le problème qui a pour objet la détermination du mouvement du corps peut se résoudre plus simplement que par les équations (1), (4) et (5).

En effet, en prenant pour les axes mobiles ox, oy, oz les axes principaux du corps, on a d'abord

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &A\frac{dp}{dt} = (B - C)\,qr,\\ &B\frac{dq}{dt} = (C - A)\,rp,\\ &C\frac{dr}{dt} = (A - B)\,pq. \end{aligned}\right.$$

On déduit immédiatement de ces équations les deux suivantes :

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} &A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = K^2,\\ &Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = H, \end{aligned}\right.$$

H et K désignant deux constantes arbitraires.

La première de ces relations exprime que l'axe du moment résultant des quantités de mouvement est constant en grandeur. Il est facile de voir, à priori, que cet axe est constant non-seulement en grandeur, mais encore en direction. En effet, l'axe du moment résultant des quantités de mouvement se compose à chaque instant avec l'axe du moment résultant des forces totales pour former l'axe du moment résultant des quantités de mouvement qui a lieu l'instant d'après. Or, puisque les forces motrices se font équilibre, les forces totales se font aussi équilibre; donc l'axe du moment résultant de ces dernières est nul à chaque instant; donc l'axe du moment résultant des quantités de mouvement est constant en grandeur et en direction. On l'appelle, par ce motif, l'*axe invariable*. Le plan mené par le point fixe perpendiculairement à l'axe invariable est le *plan invariable*.

La seconde des relations (7), mise sous la forme

$$\frac{Ap}{K}\cdot p + \frac{Bq}{K}\cdot q + \frac{Cr}{K}\cdot r = \frac{H}{K},$$

exprime que la projection de la caractéristique sur l'axe invariable est une quantité constante [*], comme nous l'avons dit au n° **12**.

---

[*] Cette relation peut aussi se démontrer directement. En effet, puisque les forces totales se font équilibre, l'axe du moment résultant des forces tangentielles est égal et contraire à l'axe du moment résultant des forces infléchissantes; or ce dernier est per-

Les équations (7), combinées avec une des équations (6), donneront les valeurs de p, q, r. On déduit, en effet, des équations (7) :

$$(8) \qquad \begin{cases} q = \pm\sqrt{\dfrac{K^2 - CH + (C-A)Ap^2}{(B-C).B}}, \\ r = \pm\sqrt{\dfrac{K^2 - BH + (B-A)Ap^2}{(C-B).C}}. \end{cases}$$

En substituant ces valeurs dans la première des équations (6), on la met sous la forme

$$(9) \qquad dt = \frac{\pm\sqrt{BCA}\,dp}{\sqrt{[Ap^2(A-C)+CH-K^2][Ap^2(B-A)+C^2-BH]}}.$$

Au moyen des Tables des fonctions elliptiques on trouvera facilement la valeur de p, qui correspond, dans cette équation, à une valeur donnée de t; connaissant p, les équations (8) donneront les valeurs de q et r.

Les équations (6) et les valeurs initiales de p, q, r feront cesser complétement l'ambiguïté du double signe $\pm$ dans les équations (8) et (9).

Il reste à trouver la position des axes principaux au bout du temps t. A cet effet, menons par le point fixe trois axes fixes dans l'espace ox_1, oy_1, oz_1, dont le premier coïncide avec l'axe invariable; appelons θ l'angle que l'axe ox fait avec l'axe ox_1, c'est-à-dire avec l'axe invariable; ψ l'angle que la projection de l'axe ox sur le plan des y_1, z_1 fait avec l'axe des y_1, cet angle étant compté des y_1 positives vers les z_1 positives. Il est évident que ces deux angles détermineront complétement la position de l'axe ox.

---

pendiculaire à la caractéristique; donc l'autre l'est aussi; donc on a la relation

$$A\,dp.p + B\,dq.q + C\,dr.r = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$Ap.dp + Bq.dq + Cr.dr = 0.$$

Donc la composante élémentaire dont les projections sur les axes principaux sont dp, dq, dr, est perpendiculaire à l'axe du moment résultant des quantités de mouvement; donc la projection de la caractéristique sur l'axe invariable est constante.

On sait déjà que l'axe ox_1 fait avec l'axe ox un angle dont le cosinus est $\frac{Ap}{K}$; donc

$$(10) \qquad \cos\theta = \frac{Ap}{K}.$$

Il reste à trouver l'angle ψ. Or, si l'on désigne par x_1, y_1, z_1 les coordonnées d'un point m_1 situé sur l'axe ox par rapport aux axes ox_1, oy_1, oz_1, on aura évidemment

$$\psi = \operatorname{arc\,tang} \frac{z_1}{y_1};$$

d'où

$$(11) \qquad \frac{d\psi}{dt} = \frac{y_1 \frac{dz_1}{dt} - z_1 \frac{dy_1}{dt}}{y_1^2 + z_1^2}.$$

Exprimons les deux termes de cette fraction au moyen de p, q, r.

1°. Le terme $y_1 \frac{dz_1}{dt} - z_1 \frac{dy_1}{dt}$ n'est autre chose que la projection de l'axe du moment de la vitesse du point m_1 sur l'axe des x_1; or, si le point m_1 est situé sur l'axe ox à une distance du point fixe égale à l'unité, il est visible que l'axe du moment de la vitesse du point m_1 se trouve à l'intersection du plan des yz et du plan mené par l'axe ox et la caractéristique; que sa grandeur est

$$\Omega\sqrt{1 - \frac{p^2}{\Omega^2}} = \sqrt{\Omega^2 - p^2};$$

que, par conséquent, il coïncide en grandeur et en direction avec la projection de la caractéristique sur le plan des yz : donc les projections de l'axe du moment de la vitesse du point m_1 sur les axes ox, oy, oz seront respectivement égales à o, q, r. D'ailleurs l'axe ox_1 fait avec les axes ox, oy, oz des angles dont les cosinus sont $\frac{Ap}{K}$, $\frac{Bq}{K}$, $\frac{Cr}{K}$: donc on a

$$y_1 \frac{dz_1}{dt} - z_1 \frac{dy_1}{dt} = \frac{Bq^2 + Cr^2}{K}.$$

2°. On a

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1, \quad x_1 = \frac{Ap}{K};$$

donc

$$y_1^2 + z_1^2 = \frac{K^2 - A^2p^2}{K^2}.$$

Cela posé, la relation (11) devient

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{Bq^2 + Cr^2}{K^2 - A^2p^2} \cdot K,$$

ou bien

$$(12) \qquad d\psi = \frac{H - Ap^2}{K^2 - A^2p^2} \cdot K\,dt.$$

Si l'on remplace dt par sa valeur prise dans la formule (9), cette équation fera connaître, au moyen des Tables des fonctions elliptiques, la valeur de ψ correspondante à une valeur de p, et, par conséquent, à une valeur donnée de t.

A l'exemple de M. Poinsot et de quelques savants professeurs, nous appellerons généralement l'angle qu'une droite passant par le point fixe fait avec l'axe invariable, la *nutation* de cette droite; l'angle que la projection de cette droite sur le plan invariable fait avec un axe fixe situé dans ce plan, la *précession* de la droite. (Il serait peut-être plus convenable d'appeler ces quantités les *distances polaire et azimutale de la droite.*)

Ces définitions admises, désignons par θ', θ'', θ''', Θ les nutations des axes ox, oy, oz et de la caractéristique; par ψ', ψ'', ψ''', Ψ les précessions des mêmes droites comptées à partir de l'axe des y_1 et déterminons successivement ces huit quantités; on aura

$$(13) \qquad \cos\theta' = \frac{Ap}{K}, \quad \cos\theta'' = \frac{Bq}{K}, \quad \cos\theta''' = \frac{Cr}{K}.$$

Multipliant ces cosinus respectivement par $\frac{p}{\Omega}$, $\frac{q}{\Omega}$, $\frac{r}{\Omega}$ et ajoutant les produits, la somme représentera évidemment la nutation de la caractéristique; donc

$$(14) \qquad \cos\Theta = \frac{H}{K\Omega}.$$

Les raisonnements à l'aide desquels on a établi l'équation (12) conduisent aux relations suivantes :

$$(15) \quad d\psi' = \frac{H - Ap^2}{K^2 - A^2p^2} K\,dt, \quad d\psi'' = \frac{H - Bq^2}{K^2 - B^2q^2} K\,dt, \quad d\psi''' = \frac{H - Cr^2}{K^2 - C^2r^2} K\,dt.$$

Mettant pour dt sa valeur en p, ou q, ou r, ces équations font connaître, à l'aide des fonctions elliptiques, les quantités ψ', ψ'', ψ'''.

Pour trouver la valeur de Ψ, on considérera la pyramide triangulaire qui a pour arêtes les axes des x_1, des x et la caractéristique; alors la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique donne sans calcul

$$\cos(\Psi - \psi') = \frac{\frac{p}{\Omega} - \cos\theta'\cos\Theta}{\sin\theta'\sin\Theta} = \frac{K^2 - AH}{AH}\cot\theta'\cot\Theta.$$

On trouverait de même

$$\cos(\Psi - \psi'') = \frac{K^2 - BH}{BH}\cot\theta''\cot\Theta.$$

Divisant ces deux dernières équations l'une par l'autre et posant

$$\frac{B(K^2 - AH)\cot\theta'}{A(K^2 - BH)\cot\theta''} = \delta,$$

on aura

$$(16) \qquad \tang\Psi = -\frac{\cos\psi' - \delta\cos\psi''}{\sin\psi' - \delta\sin\psi''}.$$

La précession de l'axe instantané peut être déterminée d'une autre manière qui mérite d'être remarquée.

Nous avons vu que l'axe du moment résultant des forces infléchissantes est toujours représenté en grandeur et en direction par la vitesse de l'extrémité de l'axe du moment résultant des quantités de mouvement; donc il est perpendiculaire, dans le cas qui nous occupe, à l'axe instantané et à l'axe invariable; donc il coïncide avec l'intersection de deux plans menés par le point fixe, l'un perpendiculaire à l'axe instantané, l'autre perpendiculaire à l'axe invariable: donc la précession de l'axe instantané a pour mesure l'angle que l'axe du moment résultant des forces infléchissantes fait avec sa position initiale, en supposant que cette position coïncide avec l'axe des y_1.

Appelons p_0, q_0, r_0, Ω_0 les valeurs initiales de p, q, r, Ω, et observons que

$$\begin{aligned}(A - B)^2 p^2 q^2 + (A - C)^2 p^2 r^2 + (B - C)^2 q^2 r^2 \\ = (A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2)(p^2 + q^2 + r^2) - (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)^2,\end{aligned}$$

nous aurons, d'après les valeurs que nous avons trouvées pour les projections de l'axe du moment résultant des forces infléchissantes sur les axes ox, oy, oz,

$$\cos\Psi = \frac{(B-C)^2 q_0 r_0 qr + (C-A)^2 r_0 p_0 rp + (A-B)^2 p_0 q_0 pq}{\sqrt{(K^2\Omega^2 - H^2)(K^2\Omega_0^2 - H^2)}}.$$

Cette valeur montre qu'*on peut toujours au moyen des quantités p, q, r, par conséquent au moyen d'une seule intégration, déterminer, à une époque quelconque, la position de l'axe instantané dans l'espace et dans le corps.*

IV.

MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL DANS UN MILIEU RELATIF.

17. Le mouvement absolu d'un point matériel plongé dans un milieu relatif peut être considéré comme composé à chaque instant de deux mouvements : du *mouvement d'entraînement*, c'est-à-dire du mouvement qu'aurait le point matériel s'il restait en coïncidence avec le point du milieu relatif qu'il occupe actuellement, et du *mouvement relatif*, c'est-à-dire du mouvement qu'il a dans ce milieu. La vitesse et la force totale correspondantes au mouvement d'entraînement seront la *vitesse* et la *force d'entraînement ;* la vitesse et la force totale correspondantes au mouvement relatif seront la vitesse et la force *relatives*.

Lorsqu'un point matériel est en mouvement dans un milieu relatif, si plusieurs quantités a, a', a'',..., b, b', b'',... changent avec la position de ce point, mais les unes a, a', a'',... avec le mouvement d'entraînement seulement ; les autres b, b', b'',... avec le mouvement relatif seulement ; nous désignerons la dérivée totale d'une fonction u de ces quantités par Du ; la dérivée par rapport à a, a', a'',... qui ne changent qu'avec le mouvement d'entraînement, par $D_e u$; la dérivée par rapport à b, b', b'',... qui ne changent qu'avec le mouvement relatif, par $D_r u$; la dérivée du second ordre suivant les indices e et r, par $D^2_{e,r} u$.

D'après ces notations, on aura, quel que soit u,

$$(17) \qquad Du = D_e u + D_r u,$$

$$(18) \qquad D^2 u = D^2_{e,e} u + D^2_{r,r} u + 2D^2_{e,r} u.$$

Cela posé, soient x, y, z les coordonnées d'un point matériel m par rapport à trois axes rectangulaires fixes dans l'espace. Si l'on remplace u, dans les équations (17) et (18), successivement par x, y, z, les trois équations provenant de l'équation (17) montrent que la vitesse absolue du point m est la résultante de la vitesse d'entraînement et de la vitesse relative, ce que l'on savait à priori; les trois équations provenant de l'équation (18) montrent que si l'on désigne par F la force totale absolue du point m; par F_e la force d'entraînement; par F_r la force relative; par F′ la force qui a pour projections sur les axes des x, des y, des z; les quantités

$$2\,D^2_{e,r}\,x,\quad 2\,D^2_{e,r}\,y,\quad 2\,D^2_{e,r}\,z;$$

la force F est la résultante des trois forces F_e, F_r et F′.

Voyons ce que c'est que F′. Soient o' un point arbitraire du milieu relatif; $o'x'$, $o'y'$, $o'z'$ trois axes rectangulaires fixes dans le milieu relatif menés par le point o'; x', y', z' les coordonnées du point m au bout du temps t par rapport à ces axes; a, b, c les cosinus des angles que ces mêmes axes font avec l'axe des x; α l'ordonnée du point o' relative au plan des y, z. On aura évidemment la relation

$$x = \alpha + ax' + by' + cz',$$

de laquelle on déduira, en observant que α, a, b, c ne dépendent que du mouvement d'entraînement, tandis que x', y', z' ne dépendent que du mouvement relatif,

$$D^2_{e,r}\,x = D_e a\,D_r x' + D_e b\,D_r y' + D_e c\,D_r z'.$$

On aurait une relation semblable par rapport à y et une autre par rapport à z.

Or, si l'on tire du point o' une droite parallèle à la vitesse relative du point m et égale au double de cette vitesse, l'extrémité m_1 de cette droite aura pour coordonnées les quantités

$$2\,D_r x',\quad 2\,D_r y',\quad 2\,D_r z';$$

donc, si x_1 est la valeur de x correspondante au point m_1, on aura

$$D_e x_1 = D_e \alpha + 2\,D_r x'\,D_e a + 2\,D_r y'\,D_e b + 2\,D_r z'\,D_e c.$$

et, par conséquent,

$$2\,D_{e,r}^2\,x = D_e\,x_1 - D_e\,\alpha.$$

Mais si l'on observe que le mouvement d'entraînement du point m_1 peut être considéré comme composé d'un mouvement de translation égal et parallèle à celui du point o' et d'un certain mouvement de rotation autour de ce point, on en conclura que la force F' n'est autre chose que la vitesse de rotation du point m_1 autour du point o'. On a donc le théorème suivant :

La force totale absolue qui sollicite le point m est la résultante de trois forces : de la force d'entraînement, de la force relative et d'une troisième force égale et parallèle à la vitesse de rotation d'un certain point m_1 appartenant au milieu relatif, autour d'un point arbitraire o' de ce milieu, le point m_1 étant lié aux points o' et m par la condition que $o'm_1$ soit parallèle à la vitesse relative du point m et égale au double de cette vitesse.

A l'aide de ce théorème on aura immédiatement la force totale qui sollicite le point m dans le milieu relatif lorsque les trois autres forces seront connues.

NOTE I.

Sur la définition des moments par rapport à un point.

Soient O un point arbitraire d'un corps solide ; P une force appliquée à l'un des points du corps ; D une droite arbitraire située dans le plan qui passe par le point O et par la force P ; P' la force P transportée parallèlement à elle-même au point m où sa direction vient rencontrer la droite D.

Le point m étant lié invariablement au point d'application de la force P, il est évident que la force P' sera équivalente à la force P ; or la force P' peut se décomposer, à l'aide du parallélogramme des forces, en deux autres F et G, l'une dirigée suivant la droite mO, l'autre suivant la droite D : la première sera le complément de la force G par rapport à P, et pourra être considérée comme agissant au point O. Pour déterminer l'intensité de la force G et le sens dans lequel elle agit, on observera que la droite qui joint les extrémités des forces G et P' étant parallèle à mO, les deux triangles qui ont pour sommet commun le point O et pour bases les forces G et P', ou bien les forces G et P, sont équivalents; d'où il suit que les forces G et P sont en raison inverse de leurs distances au point O : il est évident, d'ailleurs, que la force G tend toujours à tourner autour du point O dans le même sens que la force P.

Donc la force P peut toujours se décomposer en deux autres F et G : l'une appliquée au point O, l'autre suivant la droite D : la première est le complément de la force G par rapport à la force P ; la seconde, comparée à la force P, est en raison inverse de sa distance au point O et tend à tourner dans le même sens autour de ce point.

Nous avons supposé que la direction de la force P rencontrait la droite D; si elle lui était parallèle, la même loi de décomposition subsisterait encore, car cette loi existe, quelque petit que soit l'angle de la force P avec la droite D, par conséquent lorsque cet angle est égal à zéro. On peut, au reste, le démontrer directement d'une manière très-facile à l'aide d'une double décomposition ; nous ne nous y arrêterons pas.

Lorsqu'on suppose la droite D distante du point O d'une quantité égale à l'unité, la force G est égale au produit de la force P par sa distance au point O. Dans cette hypothèse, nous appelons la force G le *moment* de la force P *par rapport* au point O.

Nous rentrons ainsi dans la notion des moments, telle que l'avait conçue Galilée. « Galilée, dit Lagrange dans la première section de la *Mécanique analytique*, entend » par moment d'un poids ou d'une puissance appliquée à une machine, l'effort, l'action, l'énergie, l'*impetus* de cette puissance pour mouvoir la machine, de manière qu'il y ait équilibre entre deux puissances lorsque leurs moments pour mouvoir la machine en sens contraires sont égaux. Je ne vois pas, ajoute Lagrange, pourquoi on a abandonné cette notion pour y en substituer une autre qui exprime seulement la valeur du moment dans certains cas. »

Nota. La notion des moments, considérés comme efforts, peut facilement être appliquée à un système assujetti à des liaisons complètes quelconques ; elle donne lieu à une démonstration très-simple du principe des vitesses virtuelles. (*Voir* les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Toulouse*, année 1850.)

NOTE II.

Sur une autre démonstration de la loi suivant laquelle varie l'axe du moment résultant lorsqu'on déplace le centre des moments.

Soient o et o' l'ancien et le nouveau centre des moments ; m un point auquel est appliquée la force P ; m' un point tel, que la figure $oo'mm'$ soit un parallélogramme ayant om pour diagonale ; P′, Q′ deux forces égales et parallèles à la force P appliquées aux points m', o'.

Si du point o on abaisse des perpendiculaires sur les forces P, P′, Q′, ces perpendiculaires feront évidemment entre elles les mêmes angles que les axes des moments de ces forces, et seront proportionnelles à ces axes. D'ailleurs, ces perpendiculaires étant les projections sur un même plan des droites om, om', oo' qui forment la diagonale et les côtés d'un parallélogramme, il est clair que la première de ces perpendiculaires est la diagonale du parallélogramme construit sur les deux autres ; donc l'axe du moment de la force P est la résultante des axes des moments des forces P', Q'

Mais l'axe du moment de la force P' est égal et parallèle à l'axe du moment de la force P par rapport au point o' ; l'axe du moment de la force Q' est l'axe du moment de la force P transportée parallèlement à elle-même au point o' par rapport au point o.

Donc, en considérant à la fois toutes les forces qui sollicitent un corps solide, on aura le théorème suivant :

Si par un point quelconque de l'espace on mène trois droites A, A', B', *l'une égale et parallèle à l'axe du moment résultant du système relatif au point o, la seconde, etc.*

NOTE III.

Sur une démonstration de l'existence de l'axe instantané.

La démonstration citée dans le texte peut être modifiée comme il suit : Soient o le point fixe ; m un point quelconque du corps ; M un plan mené par ce point perpendiculairement à sa vitesse ; il passera par le point o, puisque le point m décrit un arc de cercle autour du point o. Démontrons que la vitesse d'un point quelconque m' du plan M est aussi perpendiculaire à ce plan ; il suffit pour cela, puisque cette vitesse est déjà perpendiculaire à om', de prouver qu'elle est perpendiculaire à une seconde droite mm' située dans le plan M. Or, quel que soit le mouvement du point m' dans le premier instant, puisque ce point reste à une distance constante du point m, on peut le considérer comme doué de deux mouvements à la fois : d'un mouvement de translation égal et parallèle à celui du point m, et d'un certain mouvement de rotation autour de ce point. Ces deux mouvements infiniment petits étant l'un et l'autre perpendiculaires à mm', le mouvement résultant est nécessairement perpendiculaire à mm'.

Donc, si la vitesse d'un point appartenant à un plan mené par le point o est perpendiculaire à ce plan, il en sera de même des vitesses de tous les autres points du plan. De là il suit que, si par deux points quelconques du corps dont les vitesses ne sont pas parallèles, on mène deux plans perpendiculaires à ces vitesses, l'intersection de ces plans sera immobile pendant un instant.