JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. LAMÉ

Mémoire sur les variations des coordonnées curvilignes

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 16 (1851), p. 171-185.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1851_1_16__171_0>

MÉMOIRE

SUR

LES VARIATIONS DES COORDONNÉES CURVILIGNES;

PAR M. G. LAMÉ.

Lorsqu'on cherche à faciliter l'intégration des équations qui expriment l'équilibre et le mouvement de la chaleur, ou de l'élasticité, dans des corps solides homogènes de toutes formes, on est conduit à plusieurs questions générales, dont les solutions intéressent à la fois l'analyse des différences partielles, la géométrie, et la physique mathématique. De là sont venues la théorie des surfaces isothermes, celle des coordonnées curvilignes, et la théorie des surfaces isostatiques. C'est une autre question de même origine que je me propose de traiter aujourd'hui.

On sait que, dans la théorie analytique de la chaleur, l'équation aux différences partielles du premier ordre, appelée *équation à la surface,* contient généralement deux paramètres ou coordonnées variables. Les cas, très-particuliers, du parallélipipède rectangle, du prisme triangulaire régulier, de la sphère et du cylindre droit, sont les seuls où cette équation puisse se réduire à une relation entre des constantes; lesquelles constantes sont introduites par l'intégration de l'équation aux différences partielles du second ordre, qui régit la température de tous les points du solide. Ce sont aussi les seuls cas que l'on puisse traiter d'une manière complète, si le corps perd ou gagne sa chaleur par le rayonnement.

Deux propriétés du système de coordonnées que l'on emploie expliquent cette circonstance. D'abord la surface qui limite le corps s'exprime analytiquement en égalant à une constante l'une des coordonnées, c'est-à-dire que cette surface fait partie d'un système orthogonal. Ensuite le paramètre différentiel du premier ordre est aussi constant sur cette surface, c'est-à-dire qu'elle est partout également distante de la surface infiniment voisine de la même famille. On comprendra maintenant le but que je me suis proposé, en essayant de résoudre le problème suivant, dont la solution aiderait au progrès des théories de physique mathématique :

Une surface donnée fait partie d'un système orthogonal, mais dans lequel le paramètre différentiel du premier ordre de cette surface est variable; il s'agit de trouver tous les systèmes orthogonaux dont cette même surface fait partie, et dans lesquels le paramètre différentiel dont il s'agit est constant; ou, en d'autres termes, de trouver tous les systèmes, tels que la surface proposée y soit partout également distante de la surface infiniment voisine appartenant à la même famille.

On a de suite un système qui jouit de cette propriété, en prenant les surfaces parallèles à la surface proposée, et les deux groupes de surfaces développables formées par ses normales. Mais cet unique système est insuffisant. Il faut que les formules, qui donneront le système orthogonal cherché, contiennent toutes les fonctions arbitraires que comporte la solution, afin qu'on puisse en disposer pour simplifier d'autres intégrations, dans la question de physique mathématique qu'on a en vue; ou bien, pour faire en sorte que la famille de surfaces, à laquelle appartiendra la surface proposée, soit une famille de surfaces isothermes par exemple, ou qu'elle jouisse d'une certaine propriété.

Considéré sous un point de vue aussi étendu, le problème dont il s'agit n'est pas sans difficulté. La solution que j'ai trouvée a toute la généralité désirée; mais je ne suis pas encore parvenu à lui donner une forme commode pour les applications. Le système orthogonal primitif étant donné par les valeurs de trois coordonnées rectilignes, en fonction des trois anciens paramètres, j'obtiens les valeurs de ces mêmes coordonnées, dans le système cherché, par des séries développées suivant les puissances ascendantes de celui des trois nouveaux paramètres, dont la valeur zéro donne la surface proposée. Les termes successifs de ces séries contiennent des fonctions arbitraires, assujetties à vérifier une équation aux différences partielles, à deux variables, fournie par la théorie des surfaces orthogonales. Chaque terme introduit une fonction de cette nature, qui entre dans tous les termes suivants, soit directement, soit par ses dérivées partielles, soit par d'autres fonctions qui s'en déduisent à l'aide de l'intégration. On voit combien cette solution est générale; mais on comprend aussi que, pour l'utiliser, il faudrait sommer les trois séries, ou les présenter sous forme finie. Je ne suis parvenu à effectuer cette sommation, que dans le cas où l'on se borne à la première fonction introduite. Ce succès fait espérer que l'on parviendra à sommer le cas général.

En résumé, au premier système orthogonal, où la surface donnée se trouve conjuguée aux deux groupes de surfaces développables formées par ses normales, j'en joins d'autres dans lesquels aucune surface n'est développable; et je fais voir qu'il existe une infinité de systèmes semblables, remplissant tous la condition posée, c'est-à-dire tels que la surface fixe forme, avec celle qui l'avoisine, une couche d'égale épaisseur. Cette couche infiniment mince est commune à tous les systèmes trouvés, lesquels sont en quelque sorte *tangents* entre eux, et c'est un genre de contact qui me semble se présenter ici pour la première fois. Ces résultats sont obtenus sans rien spécifier sur la nature de la surface donnée, et à l'aide des formules relatives aux coordonnées curvilignes. Ils donnent un nouvel exemple de l'utilité de ces formules, et des ressources qu'elles peuvent offrir aux géomètres.

On reconnaît aisément, dans beaucoup de travaux mathématiques de notre époque, une tendance à se débarrasser des coordonnées rectilignes et polaires, à leur substituer des paramètres, constants sur certains lieux géométriques, variables d'un de ces lieux à un autre de la même famille. C'est par des substitutions de cette nature qu'on est parvenu à étudier de plus près, et avec une simplicité merveilleuse, les propriétés des surfaces courbes, et celles des diverses lignes qu'elles peuvent contenir; à voyager, pour ainsi dire, sur toutes ces surfaces, avec la même facilité qu'autrefois sur le plan et sur la sphère. Le Mémoire actuel me paraît indiquer un nouveau pas à faire dans la même direction : car il ne s'agit plus seulement d'étudier tel système de coordonnées curvilignes, de l'utiliser pour en déduire les propriétés des surfaces et des lignes qui le composent; il s'agit de modifier ce système lui-même, de le transformer de telle manière, que, conservant certains éléments, il puisse jouir, en outre, de telle propriété qu'il n'avait pas d'abord. C'est une application, sous un point de vue nouveau, de l'idée fondamentale des variations, qui justifie le titre que je donne à ce Mémoire.

Nota. Pour abréger, je désigne à la fois, et séparément, les trois coordonnées x, y, z, par la seule lettre u. Ainsi, toute équation en u représentera un groupe de trois équations analogues, l'une en x, l'autre en y, la troisième en z. En outre, U étant une certaine expression par rapport à u, je désigne par SU la somme des trois formes que prend U, lorsqu'on y remplace successivement u par x, y, z. De même, u' désigne à la fois, et séparément, des coordonnées x', y', z'. La lettre [M] sert de renvoi pour indiquer la première partie de mon Mémoire sur les coordonnées curvilignes, inséré au tome V de ce Journal. Enfin, dans les formules [M] citées, il faut, le plus souvent, remplacer les ρ_i, h_i, par les lettres r_i, η_i, que j'adopte pour le Mémoire actuel.

1. Un système orthogonal, donné par les trois équations du groupe

$$u = \mathrm{U}(\rho, r_1, r_2), \tag{1}$$

contient une surface A, au paramètre $\rho = r$; les deux familles de surfaces aux paramètres r_1, r_2, traçant sur A ses lignes de courbure, r_1, r_2 sont aussi les paramètres de ces lignes elles-mêmes. D'après cela, un second système orthogonal, qui devra contenir la même surface A, sera représenté par un groupe de la forme

$$u' = \mathrm{U}'(\mathrm{R}, r_1, r_2), \tag{2}$$

où la surface A correspond au paramètre $\mathrm{R} = 0$; r_1, r_2 étant les paramètres de ses lignes de courbure.

2. Si l'on désigne par η, η_1, η_2 les paramètres différentiels du premier ordre du système (1), par h, h_1, h_2 ceux du système (2), on

aura, en remplaçant ρ par r, pour plus d'uniformité, [M, (2), (2 *bis*) et (5)],

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
& \mathrm{S}\,\frac{du}{dr_1}\,\frac{du}{dr_2} = \mathrm{S}\,\frac{du}{dr_2}\,\frac{du}{dr} = \mathrm{S}\,\frac{du}{dr}\,\frac{du}{dr_1} = 0,\\
& \eta^2\,\mathrm{S}\left(\frac{du}{dr}\right)^2 = \eta_1^2\,\mathrm{S}\left(\frac{du}{dr_1}\right)^2 = \eta_2^2\,\mathrm{S}\left(\frac{du}{dr_2}\right)^2 = 1;
\end{aligned}
\right.
$$

et il faudra que l'on ait

$$
(4)\quad \left\{
\begin{aligned}
& \mathrm{S}\,\frac{du'}{dr_1}\,\frac{du'}{dr_2} = \mathrm{S}\,\frac{du'}{dr_2}\,\frac{du'}{d\mathrm{R}} = \mathrm{S}\,\frac{du'}{d\mathrm{R}}\,\frac{du'}{dr_1} = 0,\\
& h^2\,\mathrm{S}\left(\frac{du'}{d\mathrm{R}}\right)^2 = h_1^2\,\mathrm{S}\left(\frac{du'}{dr_1}\right)^2 = h_2^2\,\mathrm{S}\left(\frac{du'}{dr_2}\right)^2 = 1.
\end{aligned}
\right.
$$

Quand on déduit, du groupe u, le groupe u', le paramètre ρ ou r, qui était variable dans u, devient, dans u', la constante r, valeur particulière du paramètre ρ, pour la surface A.

3. Chacune des trois coordonnées rectilignes u, considérée comme une fonction des trois paramètres r, r_1, r_2, vérifie les six équations suivantes, qui servent de base à notre analyse :

$$
(5)\quad \left\{
\begin{aligned}
& \frac{d^2u}{dr\,dr_1} + \frac{1}{\eta}\,\frac{d\eta}{dr_1}\cdot\frac{du}{dr} + \frac{1}{\eta_1}\,\frac{d\eta_1}{dr}\cdot\frac{du}{dr_1} = 0,\\
& \frac{d^2u}{dr_2\,dr} + \frac{1}{\eta_2}\,\frac{d\eta_2}{dr}\cdot\frac{du}{dr_2} + \frac{1}{\eta}\,\frac{d\eta}{dr_2}\cdot\frac{du}{dr} = 0,\\
& \frac{d^2u}{dr_1\,dr_2} + \frac{1}{\eta_1}\,\frac{d\eta_1}{dr_2}\cdot\frac{du}{dr_1} + \frac{1}{\eta_2}\,\frac{d\eta_2}{dr_1}\cdot\frac{du}{dr_2} = 0,\\
& \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{\eta}\,\frac{d\eta}{dr}\,\frac{du}{dr} = \frac{\eta_1^2}{\eta^3}\,\frac{d\eta}{dr_1}\,\frac{du}{dr_1} + \frac{\eta_2^2}{\eta^3}\,\frac{d\eta}{dr_2}\,\frac{du}{dr_2},\\
& \frac{d^2u}{dr_1^2} + \frac{1}{\eta_1}\,\frac{d\eta_1}{dr_1}\,\frac{du}{dr_1} = \frac{\eta_2^2}{\eta_1^3}\,\frac{d\eta_1}{dr_2}\,\frac{du}{dr_2} + \frac{\eta^2}{\eta_1^3}\,\frac{d\eta_1}{dr}\,\frac{du}{dr},\\
& \frac{d^2u}{dr_2^2} + \frac{1}{\eta_2}\,\frac{d\eta_2}{dr_2}\,\frac{du}{dr_2} = \frac{\eta^2}{\eta_2^3}\,\frac{d\eta_2}{dr}\,\frac{du}{dr} + \frac{\eta_1^2}{\eta_2^3}\,\frac{d\eta_2}{dr_1}\,\frac{du}{dr_1}.
\end{aligned}
\right.
$$

Les trois premières de ces six équations se déduisent du § V [M], par les formules (10 *bis*); les trois autres du § VIII [M], par la dernière du premier groupe de formules qu'il contient, laquelle donne la quatrième (5), lorsqu'on remplace $\frac{1}{\eta_1}\frac{dr_1}{du}$, $\frac{1}{\eta_2}\frac{dr_2}{du}$, par $\eta_1\frac{du}{dr_1}$, $\eta_2\frac{du}{dr_2}$ [M, (5)], aussi $\frac{d\frac{1}{\eta}\frac{dr}{du}}{dr}$ par $\frac{d\eta\frac{du}{dr}}{dr}$, ou par $\left(\eta\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{d\eta}{dr}\frac{du}{dr}\right)$, et qu'on divise par η.

4. La normale à la surface A fait avec l'axe des u un angle dont le cosinus est $\frac{1}{\eta}\frac{dr}{du}$, ou $\eta\frac{du}{dr}$; un point de cette normale, situé à une distance R de A, aura donc pour coordonnée

$$u' = u + R\eta\frac{du}{dr}. \tag{6}$$

Ce groupe (6) représente le système composé des surfaces parallèles à A, et des surfaces développables formées par ses normales. On trouvera facilement, soit par la différentiation, à l'aide des trois dernières (4) et des formules (5), soit directement par des considérations géométriques,

$$\frac{1}{h}=1,\quad \frac{1}{h_1}=\frac{1}{\eta_1}\left(1-\frac{\eta}{\eta_1}\frac{d\eta_1}{dr}R\right),\quad \frac{1}{h_2}=\frac{1}{\eta_2}\left(1-\frac{\eta}{\eta_2}\frac{d\eta_2}{dr}R\right). \tag{7}$$

On s'assurera de même que les trois premières équations (4) sont vérifiées. Ainsi le groupe (6) représente un système orthogonal, qui comprend la surface A pour $R = 0$, et tel que le paramètre différentiel h est partout égal à l'unité. Mais il s'agit de trouver tous les systèmes orthogonaux (2) comprenant A, et tels que h soit constant sur la surface A seulement.

5. La solution particulière, donnée par le groupe (6), indique une marche à suivre pour obtenir la solution générale du problème proposé. Si, dans le groupe (1), on change ρ en $r+\lambda$, λ étant une fonction de (R, r_1, r_2), chaque coordonnée u deviendra, par la formule de Taylor,

$$u' = u + \frac{du}{dr}\lambda + \frac{d^2u}{dr^2}\frac{\lambda^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dr^3}\frac{\lambda^3}{1.2.3} + \dots \tag{8}$$

Or les équations (5) donnent les six dérivées partielles du second ordre de u, en fonction linéaire des dérivées du premier; des différentiations successives, et des substitutions faites à l'aide des formules (5), conduiraient aux valeurs des dérivées d'ordres supérieurs, toujours en fonction linéaire des mêmes dérivées du premier ordre; enfin, ces valeurs étant substituées dans (8), u' pourra se mettre sous la forme

$$u' = u + m \cdot \eta \frac{du}{dr} + n \cdot \eta_1 \frac{du}{dr_1} + p \cdot \eta_2 \frac{du}{dr_2}, \tag{9}$$

m, n, p étant des fonctions de R, r_1, r_2. Si l'on parvient à déterminer généralement ces fonctions m, n, p, de telle sorte qu'elles s'évanouissent pour $R = 0$, et que u' (9), vérifiant les trois premières (4), donne $h = 1$ pour $R = 0$, le groupe (9) représentera évidemment le système cherché.

6. Supposons les fonctions m, n, p développées suivant les puissances ascendantes de R; il suffira que ces séries ne contiennent pas de terme indépendant de R pour que le système (9) comprenne A. Si l'on différentie u' (9) par rapport à R, on aura

$$\frac{du'}{dR} = \frac{dm}{dR} \cdot \eta \frac{du}{dr} + \frac{dn}{dR} \cdot \eta_1 \frac{du}{dr_1} + \frac{dp}{dR} \cdot \eta_2 \frac{du}{dr_2},$$

d'où l'on conclut, par les formules (3), et l'une des équations (4),

$$\frac{1}{h^2} = \left(\frac{dm}{dR}\right)^2 + \left(\frac{dn}{dR}\right)^2 + \left(\frac{dp}{dR}\right)^2.$$

D'après cette valeur, pour que h devienne l'unité quand $R = 0$, il faut et il suffit que la série m ait pour premier terme R, sans autre coefficient que l'unité, et qu'en même temps les séries n et p n'aient pas de terme en R^1. On va voir que ces dernières séries ne peuvent non plus contenir de terme en R^2, c'est-à-dire qu'elles doivent être divisibles par R^3.

7. Si l'on différentie u' (9) par rapport à r_1, qu'on remplace les dérivées partielles du second ordre de u, par leurs valeurs déduites des formules (5), et qu'on pose, pour simplifier,

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dm}{dr_1} + \frac{\eta}{\eta_1^2}\frac{d\eta_1}{dr} n = M_1, \\ \frac{1}{\eta_1} + &\frac{dn}{dr_1} - \frac{\eta}{\eta_1^2}\frac{d\eta_1}{dr} m - \frac{\eta_2}{\eta_1^2}\frac{d\eta_1}{dr_2} p = N_1, \\ &\frac{dp}{dr_1} + \frac{\eta_2}{\eta_1^2}\frac{d\eta_1}{dr_2} n = P_1, \end{aligned}\right. \tag{10}$$

on aura

$$(11)\qquad \frac{du'}{dr_1} = \mathrm{M}_1 . \eta \frac{du}{dr} + \mathrm{N}_1 . \eta_1 \frac{du}{dr_1} + \mathrm{P}_1 . \eta_2 \frac{du}{dr_2}.$$

Pareillement, si l'on différentie u' par rapport à r_2, et qu'on pose

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dm}{dr_2} + \frac{\eta}{\eta_2^2}\frac{d\eta_2}{dr} p = \mathrm{M}_2, \\ &\frac{dn}{dr_2} + \frac{\eta_1}{\eta_2^2}\frac{d\eta_2}{dr_1} p = \mathrm{N}_2, \\ &\frac{1}{\eta_2} + \frac{dp}{dr_2} - \frac{\eta}{\eta_2^2}\frac{d\eta_2}{dr} m - \frac{\eta_1}{\eta_2^2}\frac{d\eta_2}{dr_1} n = \mathrm{P}_2, \end{aligned}\right.$$

on aura

$$(13)\qquad \frac{du'}{dr_2} = \mathrm{M}_2 . \eta \frac{du}{dr} + \mathrm{N}_2 . \eta_1 \frac{du}{dr_1} + \mathrm{P}_2 . \eta_2 \frac{du}{dr_2}.$$

Enfin, pour la symétrie, posons

$$(14)\qquad \frac{dm}{d\mathrm{R}} = \mathrm{M}, \quad \frac{dn}{d\mathrm{R}} = \mathrm{N}, \quad \frac{dp}{d\mathrm{R}} = \mathrm{P},$$

on aura, comme plus haut,

$$(15)\qquad \frac{du'}{d\mathrm{R}} = \mathrm{M} . \eta \frac{du}{dr} + \mathrm{N} . \eta_1 \frac{du}{dr_1} + \mathrm{P} . \eta_2 \frac{du}{dr_2}.$$

8. Les groupes (11), (13), (15) étant substitués dans les trois premières équations (4), celles-ci deviennent, en ayant égard aux formules (3),

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{M\,M}_1 + \mathrm{N\,N}_1 + \mathrm{P\,P}_1 = 0, \\ &\mathrm{M\,M}_2 + \mathrm{N\,N}_2 + \mathrm{P\,P}_2 = 0, \\ &\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2 + \mathrm{N}_1\mathrm{N}_2 + \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 = 0. \end{aligned}\right.$$

Ces équations sont aux différentielles partielles du premier ordre, mais non linéaires, et simultanées; elles doivent être vérifiées par les trois fonctions, ou par les trois séries m, n, p, pour que le groupe (9) représente un système orthogonal. La substitution des mêmes valeurs

(11), (13), (15), dans les trois dernières (4), donne aussi

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{h^2} &= M^2 + N^2 + P^2,\\ \frac{1}{h_1^2} &= M_1^2 + N_1^2 + P_1^2,\\ \frac{1}{h_2^2} &= M_2^2 + N_2^2 + P_2^2.\end{aligned}\right.$$

Si l'on réduit m à son premier terme, et qu'on suppose nuls tous les termes de n et p, le groupe (9) devient (6); on a

$$M = 1,\quad N = 0,\quad P = 0,$$

$$M_1 = 0,\quad N_1 = \frac{1}{\eta_1}\left(1 - \frac{\eta}{\eta_1}\frac{d\eta_1}{dr}R\right),\quad P_1 = 0,$$

$$M_2 = 0,\quad N_2 = 0,\quad P_2 = \frac{1}{\eta_2}\left(1 - \frac{\eta}{\eta_2}\frac{d\eta_2}{dr}R\right);$$

les équations (16) sont satisfaites, et les valeurs (17) deviennent (7). On retrouve ainsi le cas du n° 4.

9. Soient φ, ν, ϖ les coefficients des termes en R^2 dans les séries m, n, p. Les expressions (10) et (14), ordonnées par rapport à R, auront respectivement pour premiers termes,

$$M\ldots\ldots 1,\qquad N\ldots\ldots 2\nu R,\quad P\ldots\ldots 2\varpi R,$$

$$M_1\ldots\ldots\left(\frac{d\varphi}{dr_1} + \frac{\eta}{\eta_1^2}\frac{d\eta_1}{dr}\nu\right)R^2,\quad N_1\ldots\ldots\frac{1}{\eta_1},\qquad P_1\ldots\ldots\left(\frac{d\varpi}{dr_1} + \frac{\eta_2}{\eta_1^2}\frac{d\eta_1}{dr_2}\nu\right)R^2;$$

et, pour que le terme en R^1 soit nul de lui-même dans la première (16), il faut que $\nu = 0$. De même, il faut que $\varpi = 0$, pour que le terme en R^1 disparaisse dans la seconde (16). Soient alors n_1, p_1 les coefficients de R^3 dans n et p; le produit PP_1 sera divisible par R^4; celui NN_1 le sera par R^2, et son premier terme $\frac{3n_1 R}{\eta_1}$ devra détruire le premier terme $\frac{d\varphi}{dr}R^2$ du produit MM_1; on doit donc avoir

$$n_1 = -\frac{1}{3}\eta_1\frac{d\varphi}{dr};$$

et pareillement

$$\varpi_1 = -\frac{1}{3}\eta_2\frac{d\varphi}{dr_2}.$$

En outre, on verra facilement que le premier terme, dans la troisième (16), sera $\left(\frac{1}{\eta_1^2}\frac{d\eta_1 n_1}{dr_2}+\frac{1}{\eta_2^2}\frac{d\eta_2 p_1}{dr_1}\right)R^3$; et son annulation exige que l'on ait, en substituant à n_1, p_1 leurs valeurs trouvées,

$$\frac{1}{\eta_1^2}\frac{d\eta_1^2\frac{d\varphi}{dr_1}}{dr_2}+\frac{1}{\eta_2^2}\frac{d\eta_2^2\frac{d\varphi}{dr_2}}{dr_1}=0, \tag{18}$$

ou, en développant,

$$\frac{d^2\varphi}{dr_1\,dr_2}+\frac{1}{\eta_1}\frac{d\eta_1}{dr_2}\frac{d\varphi}{dr_1}+\frac{1}{\eta_2}\frac{d\eta_2}{dr_1}\frac{d\varphi}{dr_2}=0, \tag{18 bis.}$$

c'est-à-dire que la fonction φ, coefficient du terme en R^2 dans la série m, doit vérifier la troisième des équations (5).

10. Il suit de là que les séries m, n, p seront de la forme

$$(19)\quad\left\{\begin{aligned} m &= R + m_0R^2 + m_1R^3 + m_2R^4 + m_3R^5 + \ldots,\\ n &= \qquad\qquad\quad n_1R^3 + n_2R^4 + n_3R^5 + n_4R^6 + \ldots,\\ p &= \qquad\qquad\quad p_1R^3 + p_2R^4 + p_3R^5 + p_4R^6 + \ldots,\end{aligned}\right.$$

$m_0 = \varphi$ devant vérifier l'équation (18), et n_1, p_1 étant respectivement égaux à $-\frac{1}{3}\eta_1\frac{d\varphi}{dr_1}$, $-\frac{1}{3}\eta_2\frac{d\varphi}{dr_2}$. Pour déterminer les formes des autres fonctions m_2, n_2, p_2; $m_3, n_3, p_3, \ldots$, il faut substituer les valeurs (19) dans les expressions (14), (10), (12), puis ces expressions transformées dans les premiers membres des équations (16), que l'on ordonne par rapport aux puissances de R; égalant ensuite à zéro les coefficients de ces puissances, on obtient des équations aux différentielles partielles, d'où l'on peut successivement déduire les fonctions cherchées. Je me dispenserai d'entrer dans les détails de cette opération, et j'indiquerai seulement la forme des premières fonctions, écrites dans les séries (19).

11. Désignons par le symbole $D(\varphi)$ le premier membre de l'équation (18 *bis*); par φ_i une fonction de r_1, r_2, vérifiant l'équation

$$\mathrm{D}(\varphi_i) = 0,$$

et d'ailleurs quelconque; par ϖ_i l'expression $\left[\eta_1^2\left(\frac{d\varphi_i}{dr_1}\right)^2 + \eta_2^2\left(\frac{d\varphi_i}{dr_2}\right)^2\right]$; puis posons

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\eta}{\eta_1^2}\frac{d\eta_1}{dr} = \mathrm{f}_1, \quad \frac{\eta_2}{\eta_1^2}\frac{d\eta_1}{dr_2} = \mathrm{g}_1,\\ &\frac{\eta}{\eta_2^2}\frac{d\eta_2}{dr} = \mathrm{f}_2, \quad \frac{\eta_1}{\eta_2^2}\frac{d\eta_2}{dr_1} = \mathrm{g}_2. \end{aligned}\right.$$

On s'assure, à l'aide des formules qui régissent les coordonnées curvilignes (M), que, pour toute fonction φ_i, il existe une fonction ψ_i vérifiant les deux équations

$$(21)\qquad \frac{d\psi_i}{dr_1} + \mathrm{f}_1\eta_1\frac{d\varphi_i}{dr_1} = 0, \quad \frac{d\psi_i}{dr_2} + \mathrm{f}_2\eta_2\frac{d\varphi_i}{dr_2} = 0.$$

On reconnaît ensuite, à l'aide des mêmes formules, que, pour deux fonctions différentes φ_i, φ_k, il existe une fonction ω qui vérifie les deux équations

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\omega}{dr_1} = \left(\frac{d\eta_1\frac{d\varphi_k}{dr}}{dr_1} - \mathrm{g}_1\eta_2\frac{d\varphi_k}{dr_2} - \mathrm{f}_1\psi_k\right)\eta_1\frac{d\varphi_i}{dr_1},\\ &\frac{d\omega}{dr_2} = \left(\frac{d\eta_2\frac{d\varphi_k}{dr_2}}{dr_2} - \mathrm{g}_2\eta_1\frac{d\varphi_k}{dr_1} - \mathrm{f}_2\psi_k\right)\eta_2\frac{d\varphi_i}{dr_2}, \end{aligned}\right.$$

fonction que je désigne par le symbole $\omega_k(\varphi_i)$. Ces deux théorèmes ont été l'objet principal d'une Note présentée à l'Académie des Sciences, le 14 juillet 1845.

12. Cela posé, les premiers coefficients des trois séries (19) sont donnés par le tableau suivant :

$$(23)\quad\left\{\begin{aligned}
&m_0 = \varphi. \qquad m_1 = \frac{2}{3}\psi + \varphi_1,\\
&n_1 = -\frac{1}{3}\eta_1\frac{d\varphi}{dr_1},\quad n_2 = -\frac{1}{4}\eta_1\frac{d(\varphi_1+\varphi^2)}{dr_1},\\
&p_1 = -\frac{1}{3}\eta_2\frac{d\varphi}{dr_2},\quad p_2 = -\frac{1}{4}\eta_2\frac{d(\varphi_1+\varphi^2)}{dr_2};\\
&m_2 = \frac{1}{2}\varphi\psi + \frac{3}{4}\psi_1 + \varphi_2,\\
&n_3 = -\left(\frac{1}{2}\psi + \frac{3}{5}\varphi_1\right)\eta_1\frac{d\varphi}{dr_1} - \frac{2}{5}\varphi\cdot\eta_1\frac{d\varphi_1}{dr_1} - \frac{1}{5}\eta_1\frac{d\varphi_2}{dr_1},\\
&p_3 = -\left(\frac{1}{2}\psi + \frac{3}{5}\varphi_1\right)\eta_2\frac{d\varphi}{dr_2} - \frac{2}{5}\varphi\cdot\eta_2\frac{d\varphi_1}{dr_2} - \frac{1}{5}\eta_2\frac{d\varphi_2}{dr_2};\\
&m_3 = \frac{1}{3}\psi^2 - \frac{1}{6}\varpi + \frac{2}{5}\psi\varphi_1 + \frac{3}{5}\varphi\psi_1 + \frac{4}{5}\psi_2 + \varphi_3,\\
&n_4 = -\left(\frac{1}{2}\varphi\psi + \frac{3}{5}\psi_1 + \frac{2}{3}\varphi_2\right)\cdot\eta_1\frac{d\varphi}{dr_1} - \left(\frac{2}{5}\psi + \frac{1}{2}\varphi_1\right)\cdot\eta_1\frac{d\varphi_1}{dr_1}\\
&\qquad - \frac{1}{3}\varphi\cdot\eta_1\frac{d\varphi_2}{dr_1} - \frac{1}{6}\eta_1\frac{d\varphi_3}{dr_1},\\
&p_4 = -\left(\frac{1}{2}\varphi\psi + \frac{3}{5}\psi_1 + \frac{2}{3}\varphi_2\right)\cdot\eta_2\frac{d\varphi}{dr_2} - \left(\frac{2}{5}\psi + \frac{1}{2}\varphi_1\right)\cdot\eta_2\frac{d\varphi_1}{dr_2}\\
&\qquad - \frac{1}{3}\varphi\cdot\eta_2\frac{d\varphi_2}{dr_2} - \frac{1}{6}\eta_2\frac{d\varphi_3}{dr_2}.\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

En résumé, chaque coefficient m_i introduit une nouvelle fonction φ_i, qui apparaît dans n_{i+1}, p_{i+1}, et entre dans la composition de tous les coefficients d'indices plus élevés, soit directement, soit par ses dérivées premières, et par ϖ_i, soit par la fonction ψ_i correspondante, soit enfin par les fonctions $\omega_k(\varphi_i)$, $\omega_i(\varphi_k)$, lesquelles apparaîtraient si l'on prolongeait le tableau (23). Malgré la complication de l'équation aux différences partielles que doit vérifier m_i quand i surpasse 3, et malgré l'étendue des équations d'où l'on déduit directement n_{i+1} et p_{i+1}, on reconnaît aisément que les seules fonctions auxiliaires ψ, ϖ, ω, affectées d'indices convenables, suffisent pour exprimer ces coefficients, quelque loin que l'on prolonge leur recherche. Ainsi les fonctions m,

n, p existent ; et il ne s'agirait plus que de sommer les séries (19), qui les représentent, en conservant toute leur généralité. Mais, que m, n, p soient ou non sous forme finie, le groupe (9), après la substitution des valeurs trouvées, représentera tous les systèmes orthogonaux, comprenant la surface A, tels que cette surface est partout également distante de la surface infiniment voisine de la même famille.

13. Voici maintenant le cas particulier dans lequel je parviens à exprimer sous forme finie les séries (19). Considérant que la fonction $\frac{1}{\eta}$ vérifie l'équation

$$D\left(\frac{1}{\eta}\right) = 0 \; [M(16\, ter)],$$

je prends $\varphi = \frac{1}{\eta}$; je suppose nuls tous les autrs φ_i du tableau (23) ; je joins aux formules (20) celles-ci,

$$\frac{\eta_1}{\eta^2}\frac{d\eta}{dr_1} = l_1, \quad \frac{\eta_2}{\eta^2}\frac{d\eta}{dr_2} = l_2. \tag{24}$$

Alors, étudiant et comparant les valeurs données par le tableau (23) prolongé, et qui résultent de ces simplifications, je trouve qu'en posant

$$\frac{\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}\psi R^2\right)+\frac{1}{2}\varphi R}{\left(1-\frac{1}{2}\psi R^2\right)^2+\frac{1}{4}\varpi R^4} = K, \tag{25}$$

les séries (19) s'expriment ainsi :

$$m = \left[\frac{1}{3} + 2\left(1-\frac{1}{2}\psi R^2\right)K\right]R, \quad n = l_1 KR^3, \quad p = l_2 KR^3. \tag{26}$$

Au lieu d'exposer la méthode qui m'a conduit à cette sommation, je crois préférable de poser les valeurs (26), puis de prouver, directement, qu'elles donnent au groupe (9) la propriété d'être orthogonal, ou de vérifier les équations (16), et qu'elles conduisent à une valeur h (17) qui se réduit à l'unité quand R est nul.

14. D'abord, les fonctions (20) et (24) donnent [*voyez* M, formules (16) et (17)]:

$$(27)\quad \begin{cases} \dfrac{dl_1}{dr_2} = -\,l_2\,g_2, & \dfrac{dl_1}{dr_1} + \dfrac{df_1}{dr} = l_2\,g_1, \\ \dfrac{dl_2}{dr_1} = -\,l_1\,g_1, & \dfrac{dl_2}{dr_2} + \dfrac{df_2}{dr} = l_1\,g_2. \end{cases}$$

A l'aide de ces formules, par la valeur choisie pour φ, et d'après les définitions de ϖ, de ψ (n° **11**), on a

$$(28)\quad \begin{cases} \varphi = \dfrac{1}{n}, & \dfrac{d\varphi}{dr_1} = -\dfrac{l_1}{n_1}, & \dfrac{d\varphi}{dr_2} = -\dfrac{l_2}{n_2}, \\ \varpi = l_1^2 + l_2^2, & \dfrac{d\varpi}{dr_1} = -\,2\,l_1\,\dfrac{df_1}{dr}, & \dfrac{d\varpi}{dr_2} = -\,2\,l_2\,\dfrac{df_2}{dr}, \\ & \dfrac{d\psi}{dr_1} = l_1\,f_1, & \dfrac{d\psi}{dr_2} = l_2\,f_2. \end{cases}$$

Si l'on pose, pour simplifier,

$$(29)\quad \begin{cases} \left[\dfrac{1}{3} + 2\left(1 - \dfrac{1}{2}\psi R^2\right)K\right]R = T, \quad R^3 K = Q, \quad \left(1 - \dfrac{1}{2}\psi R^2\right)^2 + \dfrac{1}{4}\varpi R^4 = D, \\ \dfrac{1}{2}\varphi + \psi T - \varpi Q = L, \quad f_1 T + \dfrac{df_1}{dr} Q - \dfrac{1}{n_1} = L_1, \quad f_2 T + \dfrac{df_2}{dr} Q - \dfrac{1}{n_2} = L_2, \end{cases}$$

les dérivées partielles de la fraction K (25) deviennent, à l'aide des formules (28),

$$(30)\qquad \frac{dK}{dR} = \frac{1}{D}L, \quad \frac{dK}{dr_1} = \frac{R}{2D}\,l_1\,L_1, \quad \frac{dK}{dr_2} = \frac{R}{2D}\,l_2\,L_2;$$

celles des fonctions m, n, p, (26) en découlent aisément, et leur substitution dans les expressions (14), (10) et (12) donne définitivement

$$(31)\quad \begin{cases} M = \dfrac{1}{R}(T - 2\psi Q) + \dfrac{2R}{D}\left(1 - \dfrac{1}{2}\psi R^2\right)L, & N = \left(\dfrac{3Q}{R} + \dfrac{R^3}{D}L\right)l_1, & P = \left(\dfrac{3Q}{R} + \dfrac{R^3}{D}L\right)l_2, \\ M_1 = \dfrac{R^2}{D}\left(1 - \dfrac{1}{2}\psi R^2\right)l_1\,L_1, & N_1 = \left(\dfrac{R^4}{2D}\,l_1^2 - 1\right)L_1, & P_1 = \dfrac{R^4}{2D}\,l_2\,l_1\,L_1, \\ M_2 = \dfrac{R^2}{D}\left(1 - \dfrac{1}{2}\psi R^2\right)l_2\,L_2, & N_2 = \dfrac{R^4}{2D}\,l_1\,l_2\,L_2, & P_2 = \left(\dfrac{R^4}{2D}\,l_2^2 - 1\right)L_2. \end{cases}$$

15. Si l'on représente, pour simplifier, par S l'expression suivante,

$$(32)\quad \frac{R}{D}\left(1-\frac{1}{2}\psi R^2\right)(T-2\psi Q)+3\frac{R^3}{2D}\varpi Q+\frac{R^3}{D}L-3\frac{Q}{R}=S,$$

la substitution des valeurs (31), dans les premiers membres des formules (16), les transforme ainsi :

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} MM_1+NN_1+PP_1&=l_1L_1S,\\ MM_2+NN_2+PP_2&=l_2L_2S,\\ M_1M_2+N_1N_2+P_1P_2&=l_1l_2L_1L_2\left(\frac{R^4}{D}-\frac{R^4}{2D}-\frac{R^4}{2D}\right),\end{aligned}\right.$$

en ayant égard à la valeur de ϖ (28), et à celle de D (29). Le second membre de la troisième des équations (33) est nul; et il en est de même des seconds membres des deux autres : car, si l'on substitue dans S (32) les valeurs de T, Q, L, D (29), et K (25), on trouve définitivement $S=0$. Ainsi les équations (16) sont satisfaites. Enfin la substitution des valeurs (31) dans les équations (17) donne, toute réduction faite,

$$\frac{1}{h^2}=\left(4K-\frac{1}{3}\right)^2,\quad \frac{1}{h_1^2}=L_1^2,\quad \frac{1}{h_2^2}=L_2^2,$$

d'où, extrayant les racines, remplaçant L_1, L_2, par leurs valeurs (29), et observant que $R=0$ doit donner $h_1=\eta_1$, $h_2=\eta_2$, il vient

$$(34)\quad \frac{1}{h}=4K-\frac{1}{3},\quad \frac{1}{h_1}=\frac{1}{\eta_1}-f_1T-\frac{df_1}{dr}Q,\quad \frac{1}{h_2}=\frac{1}{\eta_2}-f_2T-\frac{df_2}{dr}Q.$$

Pour $R=0$, la fraction (25) se réduit à $K=\frac{1}{3}$, et la premiere (34) donne $h=1$. C'est ce qui restait à démontrer.

16. On remarquera que la fonction ψ, intégrée, contient une constante arbitraire; on peut en introduire une autre dans φ, en posant

$$\varphi=\frac{1}{\eta}+\textit{constante},$$

ce qui ne change rien aux calculs qui précèdent. D'après cela, la solution particulière, donnée par les valeurs (26), est encore fort générale.