JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. DE LA GOURNERIE

Note sur les courbes décrites par les différents points d'une ligne droite mobile dont deux points sont assujettis à rester sur des directrices données

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 14 (1849), p. 417-450.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1849_1_14__417_0>

NOTE

Sur les courbes décrites par les différents points d'une ligne droite mobile dont deux points sont assujettis à rester sur des directrices données;

Par M. J. de la GOURNERIE,
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

SOMMAIRE. — Quand un bielle transmet un mouvement circulaire alternatif, et que les centres ne sont pas du même côté, ses divers points décrivent des courbes dont les centres de courbure, au milieu de la course, forment une hyperbole équilatère (**1**), (**2**), (**3**). — Moyen de reconnaître si les courbes s'écartent beaucoup des arcs de cercle qui ont leurs centres sur l'hyperbole (**4**), (**5**), (**6**). — Construction des normales (**7**). — Quand une ligne droite mobile a deux points assujettis à rester sur des directrices rectilignes qui se coupent, les surfaces des ellipses décrites par les autres points sont indépendantes de l'angle des directrices. La somme ou la différence de leurs axes est une quantité constante (**8**), (**9**), (**10**). — Leurs foyers forment une hyperbole équilatère. Toute hyperbole équilatère est le lieu des foyers des ellipses décrites dans une infinité de systèmes de directrices rectilignes et de sécantes mobiles à points assujettis (**11**). — Équation polaire de la courbe que forment les sommets des ellipses (**12**). — Cette courbe admet quatre asymptotes qui se croisent à angle droit (**13**). — Détermination de la forme de la courbe; elle a deux axes, un centre et quatre sommets; elle est tangente en quatre points à l'hyperbole apollonienne des foyers (**14**). — Ses tangentes (**15**). — Ses inflexions (**16**). — Ses courbures et leurs variations (**17**), (**18**). — Sa transformation en un cercle et deux lignes droites (**19**). — Diverses propriétés de cette courbe (**20**). — Différentes manières de la tracer. Construction de ses tangentes (**21**). — Elle est du sixième degré (**22**). — Les tangentes des ellipses aux points qui correspondent à une même position de la ligne droite mobile ont pour enveloppe une parabole. Les foyers de ces paraboles forment un cercle (**23**). — Quand les directrices sont rectangulaires l'enveloppe des lignes droites mobiles est une épicycloïde storoïde (**24**). — Quand le rectangle de

deux diamètres d'une ellipse est égal au rectangle des axes, cette courbe peut être décrite par un point d'une ligne droite mobile dont deux points seraient assujettis sur les diamètres. Proposition inverse (25). — Constructions diverses (26). — Quand une ligne droite décrit une surface développable, et qu'elle glisse sur l'arête de rebroussement, les tangentes aux courbes que décrivent ses divers points ont pour enveloppe une parabole tangente à l'arête, et dont le paramètre est une fonction très-simple du rayon de courbure de l'arête, et du rapport des vitesses de glissement et de parcours (27).

1. Il y a quelques mois, nous avons eu à établir des transmissions horizontales de mouvement, par varlets, pour des pompes éoliennes. Chaque bielle avait 30 mètres de longueur, et, par conséquent, devait être soutenue en plusieurs points. Nous avons employé pour supports des voliges évidées; la bielle les traverse, et est soutenue par des fils de fer attachés aux sommets des ogives que forment les évidements. La flexibilité des voliges permet à la bielle de prendre successivement les diverses positions que nécessite le jeu de la machine. Deux systèmes de ce genre fonctionnent parfaitement depuis plus de six mois.

Les transmissions de mouvement par varlets étant assez fréquemment employées, nous avons cru utile de rechercher s'il est toujours nécessaire d'avoir recours à la flexibilité quand la longueur de la bielle exige des soutiens intermédiaires; en d'autres termes, si les courbes décrites par ses divers points ne peuvent pas être quelquefois considérées, avec une approximation suffisante, comme des arcs de cercle, et alors suivant quelle loi varient les rayons de ces arcs. A la suite de ce travail nous avons étudié les courbes qui sont décrites quand les directrices des points assujettis de la ligne mobile sont d'abord des lignes droites qui se coupent, puis des lignes quelconques. Nous avons réuni dans cette Note les résultats que nous avons obtenus.

2. Soient c, c', *fig.* 1, *Pl. II*, les points fixes des varlets; mm' une position quelconque de la bielle; nn' la position qu'elle occupe au milieu de sa course; nous supposerons qu'elle est alors perpendiculaire aux bras cn, $c'n'$ avec lesquels elle est articulée.

Nous appelons r la longueur des bras des varlets que nous supposons égaux; α l'angle mcn d'une déviation quelconque du bras cn;

α' la déviation correspondante du bras $c'n'$; $2a$ la longueur de la bielle; θ son inclinaison sur nn' pour une déviation α du bras cn.

En comparant les projections de la bielle et des bras des varlets sur nn' et sur sa perpendiculaire AY, on obtient

$$(1)\qquad 2a(1-\cos\theta) = r\sin\alpha' - r\sin\alpha,$$

$$(2)\qquad 2a\sin\theta = r(1-\cos\alpha') + r(1-\cos\alpha).$$

Éliminant θ, on trouve entre α et α' la relation

$$(3)\quad 2a(\sin\alpha' - \sin\alpha) = 3r - 2r(\cos\alpha' + \cos\alpha) + r\cos(\alpha' + \alpha)$$

Cette formule conduit à une équation du second degré en $\sin\alpha'$ ou $\cos\alpha'$; l'une des deux racines correspond à la position $C'm''$ du bras $C'n'$. Dans les applications numériques, α' étant toujours petit et très-peu différent de α, il est plus court de le calculer par son sinus, en supposant d'abord à son cosinus la valeur $\cos\alpha$, et corrigeant ensuite l'erreur.

Examinons sur la bielle un point quelconque g, g' : nous appelons b sa distance Ag au point A, milieu de nn', et x, y ses coordonnées rectangulaires Ap, AP correspondantes à une déviation α du bras cn.

En comparant les projections sur les axes, on a

$$\begin{aligned}
x &= Aq - pq = a + r\sin\alpha - (a-b)\cos\theta,\\
x &= -Aq' + pq' = -a + r\sin\alpha' + (a+b)\cos\theta,\\
y &= AQ - PQ = r - r\cos\alpha - (a-b)\sin\theta,\\
y &= -Q'A + PQ' = -r + r\cos\alpha' + (a+b)\sin\theta.
\end{aligned}$$

Éliminons $\cos\theta$ entre les deux premières équations, et $\sin\theta$ entre les deux autres,

$$(4)\qquad 2ax = 2ab + r(a+b)\sin\alpha + r(a-b)\sin\alpha',$$

$$(5)\qquad 2ay = 2br - r(a+b)\cos\alpha + r(a-b)\cos\alpha'.$$

Les équations (3), (4), (5) permettent de discuter la courbe décrite par le point g'.

3. Nous allons rechercher le rayon ρ du cercle osculateur à cette courbe au point g. Pour cela, il faut connaître les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ et de $\frac{d^2y}{dx^2}$ quand α est nul.

En différentiant les équations (4) et (5), on trouve

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} 2a\,dx &= r(a+b)\cos\alpha\,d\alpha + r(a-b)\cos\alpha'\,d\alpha',\\ 2a\,dy &= r(a+b)\sin\alpha\,d\alpha - r(a-b)\sin\alpha'\,d\alpha',\end{aligned}\right.$$

$$(7)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{(a+b)\sin\alpha - (a-b)\sin\alpha'\,\frac{d\alpha'}{d\alpha}}{(a+b)\cos\alpha + (a-b)\cos\alpha'\,\frac{d\alpha'}{d\alpha}}.$$

On voit que, quand α et α' sont nuls, $\frac{dy}{dx}$ l'est également, et que, par conséquent, l'axe des abscisses est tangent à toutes les courbes décrites par les différents points de la bielle.

Cherchons maintenant la valeur du coefficient $\frac{d\alpha'}{d\alpha}$ qui entre dans l'équation (7). On déduit de la formule (3) :

$$\frac{d\alpha'}{d\alpha} = \frac{2a\cos\alpha + 2r\sin\alpha - r\sin(\alpha+\alpha')}{2a\cos\alpha' - 2r\sin\alpha' + r\sin(\alpha+\alpha')}.$$

Si α est infiniment petit, α' le sera aussi, puisque ces angles sont nuls en même temps. L'expression que nous venons de trouver montre que le rapport $\frac{d\alpha'}{d\alpha}$ est alors égal à l'unité, et, par suite, indépendant de la grandeur des angles infiniment petits α, α'.

Pour avoir la valeur de $d\frac{dy}{dx}$ à porter dans l'expression du rayon de courbure, il faut différentier l'équation (7) et y faire ensuite α et α' nuls. On obtient immédiatement le résultat en supprimant au fur et à mesure qu'ils se présentent les termes qui contiennent en facteur $\sin\alpha$, $\sin\alpha'$, ou, d'après ce que nous venons de voir, $d\frac{d\alpha'}{d\alpha}$, et en remplaçant $\cos\alpha$, $\cos\alpha'$ et $\frac{d\alpha'}{d\alpha}$ par l'unité. On trouve

$$d\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}\,d\alpha.$$

Si l'on suppose α nul dans l'équation (6), on a

$$dx = r d\alpha.$$

Divisant ces deux équations, et portant la seconde dérivée ainsi obtenue dans l'expression connue du rayon de courbure, on obtient

$$(8) \qquad h\rho = ar.$$

On voit que la ligne des centres de courbure de toutes les courbes, pour les points qui correspondent au milieu de la course, est une hyperbole équilatère, qui a pour asymptotes les axes que nous avons choisis, et qui, comme cela devait être, passe par les points fixes des varlets.

Il est évident que tant que l'angle α sera infiniment petit, le mouvement sera le même, quelles que soient les positions que les centres des varlets occuperont sur leurs branches d'hyperbole, pourvu que leurs bras soient toujours égaux à leurs ordonnées. La proposition reste donc vraie quand les deux bras sont inégaux, mais alors il faut déterminer par une proportion la position du centre de l'hyperbole.

4. Nous allons maintenant rechercher si la courbe décrite par le point g' jusqu'à une déviation maximum α, s'éloigne beaucoup de l'arc du cercle osculateur en g.

Soient nn', *fig.* 2, la position de la bielle au milieu de sa course; mm' une quelconque de ses positions; g, g' les deux positions du point que nous considérons; D le centre d'un cercle tangent à nn' en g, et passant par g'. Le centre du cercle osculateur en g est sur Dg; il serait exactement en D si la courbe gg' se confondait avec un arc de ce cercle. Nous pourrons donc juger de l'écartement de ces lignes par la distance de ces points.

Dans le mouvement, le point B de la ligne $n'n$ s'est transporté en B'. Nous prenons pour axes la ligne $n'n$, et la perpendiculaire YG menée à une distance BG du point B égale à BB'. Nous appelons h cette distance; θ l'angle des lignes nn', mm'; x, y les coordonnées du point D, et x', y' les coordonnées variables de DT. L'équation de cette ligne déterminée par la condition d'être perpendiculaire sur le milieu de gg' est

$$y' - \frac{1}{2}x\sin\theta = -\frac{h + x\cos\theta - x}{x\sin\theta}\left(x' - \frac{1}{2}h - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x\cos\theta\right).$$

Le point D étant sur cette ligne, ses coordonnées doivent satisfaire à son équation, ce qui, toutes réductions faites, donne

$$(9) \qquad xy - x^2 \operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta + hx\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta - \frac{h^2}{2\sin\theta} = 0.$$

On voit que le lieu des points D est une hyperbole dont les asymptotes sont l'axe GY et la ligne EE′ qui passe par le point B, et partage l'angle θ en parties égales.

Pour comparer cette hyperbole à celle que nous avons déterminée précédemment, il faut connaître la longueur que nous avons appelée h, et la position de l'origine G sur la ligne nn'.

5. On a immédiatement, *fig.* 1,

$$h = Bn' - Bm', \qquad h = Bm - Bn,$$

$$h = r\sin\alpha' - r\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}(1-\cos\alpha'), \quad h = r\sin\alpha + \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}(1-\cos\alpha),$$

$$(10) \qquad h = r\frac{\sin\alpha'(1-\cos\alpha) + \sin\alpha(1-\cos\alpha')}{2-\cos\alpha-\cos\alpha'}.$$

Nous appelons z l'abscisse AG de l'origine des coordonnées dans le calcul du n° 5. On a

$$z = n'B - h - a,$$
$$z = r\sin\alpha' + r(1-\cos\alpha')\cot\theta - h - a.$$

Toutes réductions faites,

$$(11) \qquad z = a\frac{\cos\alpha - \cos\alpha'}{2-\cos\alpha-\cos\alpha'}.$$

Les numérateurs des formules (10) et (11) peuvent être rendus logarithmiques sans difficulté; leur dénominateur commun peut l'être aussi en employant comme auxiliaire l'angle θ que l'équation (1) permet de connaître par un calcul facile. Toutefois, les angles α, α'

étant à très-peu près égaux, on doit éviter d'employer le sinus de leur demi-différence. Presque toujours on pourra négliger la différence de ces angles, et l'on aura simplement

$$\sin\theta = \frac{2r}{a}\sin^2\frac{1}{2}\alpha,\quad h = r\sin\alpha,\quad z = 0.$$

6. Remplaçant l'abscisse x par sa valeur $b - z$, l'équation (9) devient

$$(12)\qquad y = (b - z - h)\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\theta + \frac{h^2}{2(b-z)\sin\theta}.$$

Si l'on néglige la différence de α à α', on a

$$(13)\qquad y = (b - h)\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\theta + \rho\cos^2\frac{1}{2}\alpha.$$

Si la supposition de l'égalité entre α et α' altère sensiblement l'hyperbole, on en sera averti, parce qu'elle ne passera plus par les centres des varlets.

Ces formules sont simples, et dans chaque cas les calculs pourront être faits en quelques instants. On verra que, quand la course est petite relativement aux bras des varlets et à la longueur de la bielle, les valeurs de ρ de l'équation (8), et celles de y des équations (12) ou (13), sont à très-peu près les mêmes entre les centres des varlets. Au delà de ces points, les différences entre les ordonnées des hyperboles croissent rapidement. Les déviations des bras des varlets ont généralement peu d'amplitude. Quand la bielle est courte, il n'est pas nécessaire de la soutenir. En faisant quelques applications numériques, nous avons reconnu que, dans presque tous les cas où la bielle a besoin de soutiens intermédiaires, on peut employer des rayons à centre fixe, et que sa flexibilité et le jeu des articulations sont suffisants pour lui laisser la liberté de mouvement nécessaire.

7. La courbe gg', *fig.* 1, est facile à tracer par points, on peut même lui mener facilement des normales. Si l'on suppose que les points m, m' soient assujettis à rester sur les tangentes mT, m'T', le point g' décrira une ellipse tangente en g' à la courbe gg'. D'après un théorème de M. Chasles, la normale à l'ellipse en g' passe par le point F

où concourent les perpendiculaires CF, C′F élevées sur les directrices mT, m'T′ aux points de rencontre de la sécante. La ligne Fg' sera donc normale à gg'.

On sait que si le long d'une droite on mène des perpendiculaires à une série de lignes droites convergentes, l'enveloppe de ces perpendiculaires est une parabole tangente en son sommet à la ligne donnée, et qui a pour foyer le point de convergence. Il résulte de là que les tangentes menées par les différents points de mm' aux courbes décrites par ces points, ont pour enveloppe une parabole tangente en son sommet à mm', et ayant son foyer en F.

8. Examinons maintenant le cas beaucoup plus simple où les directrices OD, OD′, *fig.* 3, des points assujettis M et N sont des lignes droites. Un point quelconque g de la sécante situé à des distances m et n des points M et N, décrit une ellipse qui, rapportée aux directrices, a pour équation

$$m^2x^2 + n^2y^2 - 2mnxy\cos\theta = m^2n^2, \tag{14}$$

θ est l'angle des directrices.

Si l'on appelle α l'angle que l'un quelconque des axes de la courbe fait avec l'une des directrices, on trouve

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{m\sin 2\theta}{m\cos 2\theta + n}. \tag{15}$$

Rapportant l'ellipse à ses axes par les formules ordinaires de la transformation, on a

$$\mu''^2y^2 + \mu'^2x^2 = m^2n^2, \tag{16}$$

en posant, pour abréger,

$$\mu''^2 = \frac{1}{\sin^2\theta}\left[m^2\cos^2(\theta-\alpha) + n^2\cos^2\alpha + 2mn\cos\alpha\cos(\theta-\alpha)\cos\theta\right], \tag{17}$$

$$\mu'^2 = \frac{1}{\sin^2\theta}\left[m^2\sin^2(\theta-\alpha) + n^2\sin^2\alpha - 2mn\sin\alpha\sin(\theta-\alpha)\cos\theta\right]. \tag{18}$$

Si l'on ajoute les équations (17) et (18), l'angle α disparaît spontanément. Si on les retranche l'une de l'autre, on obtient une formule dont on peut facilement éloigner cet angle à l'aide de l'équation (15). Des deux équations ainsi transformées on déduit pour la valeur μ de l'une quelconque des deux quantités μ'', μ',

$$(19)\quad \mu = \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\frac{1}{2}(m^2+n^2+2mn\cos^2\theta) \pm \frac{m+n}{2}\sqrt{m^2+n^2+2mn\cos 2\theta}}$$

9. Les notations que nous avons adoptées ne permettent pas de reconnaître facilement les modifications que l'ellipse éprouve quand le point g se meut sur M'N', *fig.* 3, parce que les deux paramètres varient, et que leur somme seule reste constante.

Désignons par $2a$ la longueur MN, et par b la distance du point g au point A milieu de MN. On aura

$$n = a + b, \quad m = a - b.$$

Introduisant ces nouvelles notations dans l'équation (19), on voit que la quantité soumise au grand radical est un carré parfait, et on trouve, après réductions,

$$(20)\qquad \mu = \pm\left(\frac{a}{\sin\theta} \pm \sqrt{a^2\cot^2\theta + b^2}\right).$$

Si l'on considère μ comme une grandeur absolue, on devra prendre hors de la parenthèse le signe + ou le signe −, suivant que a^2 sera plus grand ou plus petit que b^2.

La nouvelle notation introduite dans l'équation (15) donne

$$(21)\qquad \operatorname{tang} 2\alpha = \frac{a-b}{a\cot\theta + b\operatorname{tang}\theta}.$$

10. Si l'on multiplie l'une par l'autre les deux valeurs de μ, et si on les ajoute, on a

$$a^2 > b^2, \qquad\qquad a^2 < b^2,$$

$$(22)\qquad \mu''\mu' = a^2 - b^2, \qquad \mu''\mu' = b^2 - a^2,$$

$$(23)\qquad \mu'' + \mu' = \frac{2a}{\sin\theta}, \qquad \mu'' - \mu' = \frac{2a}{\sin\theta}.$$

Les équations (22) montrent que le produit $\mu''^2 \mu'^2$ des coefficients des carrés des variables de l'équation (16) est toujours égal à $(a^2 - b^2)^2$ ou $m^2 n^2$, c'est-à-dire au terme constant de cette équation, et que, par conséquent, μ'' et μ' sont les longueurs des demi-axes de l'ellipse. Les équations (22) montrent ensuite que la surface de l'ellipse est indépendante de l'angle des directrices.

On voit par les équations (23) que la somme des axes est constante pour les ellipses décrites par les points d'une même sécante qui sont entre les points assujettis. Cette somme est égale à la différence des axes des ellipses décrites par des points situés hors de l'angle des directrices.

11. Si nous appelons c la distance du centre à l'un des foyers, nous aurons

$$c^2 = \mu''^2 - \mu'^2,$$

d'où

$$c^2 = \frac{4\alpha}{\sin\theta}\sqrt{a^2 \cot^2\theta + b^2}. \tag{24}$$

Éliminant b par la formule (21), on trouve, après réductions,

$$c^2 = \frac{4a^2}{\sin^2\theta}\,\frac{\cos\theta}{\cos(2\alpha - \theta)}.$$

Si nous mesurons les angles à partir de la bissectrice OX de l'angle DOD' des directrices, *fig.* 4, nous aurons, en appelant ω l'angle variable égal à $\alpha - \frac{1}{2}\theta$,

$$c^2 = \frac{4a^2}{\sin^2\theta}\,\frac{\cos\theta}{\cos 2\omega}. \tag{25}$$

Telle est l'équation polaire de la courbe des foyers. Si l'on prend pour axes les deux bissectrices OX, OY des angles des directrices, on trouve pour l'équation de cette courbe en coordonnées parallèles,

$$x^2 - y^2 = \frac{4a^2}{\sin\theta \tang\theta}. \tag{26}$$

Les foyers des ellipses forment une hyperbole équilatère F'FF'',

$F_1 F_1 F''_1$, *fig.* 4, dont les asymptotes zz_1, $z'z'_1$ font des angles de $45° \pm \theta$ avec les directrices. L'axe transverse OX est la bissectrice de l'angle aigu des directrices.

Si l'on donne une hyperbole équilatère quelconque $x^2 - y^2 = p^2$, et qu'on demande de déterminer un système de directrices et d'écartement des points assujettis d'une ligne droite mobile, tel que l'hyperbole soit le lieu des foyers des ellipses décrites par les divers points, pour déterminer a et θ, on aura une seule équation

$$p^2 = \frac{4a^2 \cos\theta}{\sin^2\theta}.$$

Il existe donc une infinité de systèmes.

On peut se donner d'une manière tout à fait arbitraire la grandeur de l'angle aigu θ ou de l'écartement $2a$, il en résultera toujours une valeur réelle pour l'autre quantité.

12. Cherchons maintenant l'équation de la courbe des sommets. Éliminant b entre les équations (20) et (24), on trouve

$$(27) \qquad \mu = \pm\left(\frac{a}{\sin\theta} \pm \frac{c^2}{4a}\sin\theta\right).$$

On voit que les axes sont les abscisses de paraboles dont les distances focales sont les ordonnées.

Éliminant c^2 entre les équations (25) et (27), on obtient

$$\mu = \pm \frac{a}{\sin\theta}\left(1 \pm \frac{\cos\theta}{\cos 2\omega}\right).$$

Pour les grands sommets, il faut prendre le signe + dans la parenthèse et mesurer le rayon vecteur suivant l'azimut ω. Pour les petits sommets, il faut prendre le signe — dans la parenthèse et mesurer le rayon vecteur suivant l'azimut $90° + \omega$, ce qui revient à changer le signe de $\cos 2\omega$, et rétablit le signe + au second terme. Enfin, comme rien ne change dans l'équation quand on y remplace ω par $180° + \omega$, il est évident que le double signe hors de la parenthèse n'ajoute rien à la richesse de la formule. L'équation polaire de la courbe des sommets est donc

$$(28)\qquad \mu = \frac{a}{\sin\theta}\left(1 + \frac{\cos\theta}{\cos 2\omega}\right).$$

Si l'on appelle φ et γ les angles que la tangente au point μ, ω fait avec le rayon vecteur et avec l'axe, on trouve sans difficulté

$$(29)\qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{1}{2}\cot 2\omega\left(1 + \frac{\cos 2\omega}{\cos\theta}\right),$$

$$(30)\qquad \operatorname{tang}\gamma = -\cot\omega\,\frac{\cos^2 2\omega - \cos\theta\cos 2\omega + 2\cos\theta}{\cos^2 2\omega - \cos\theta\cos 2\omega - 2\cos\theta},$$

$\cos\theta$ est toujours positif parce que nous prenons pour axe la bissectrice de l'angle aigu des directrices.

13. Si l'on remplace dans l'équation (28) ω par $-\omega$ ou par $180^\circ \pm \omega$, la grandeur de μ ne change pas. La courbe est donc symétrique par rapport à l'axe et à sa perpendiculaire élevée par le pôle, et pour la discuter entièrement, il suffit de faire varier ω de zéro à 90 degrés.

Si l'on donne à ω une valeur très-peu différente de 45 degrés en plus ou en moins, la valeur absolue de μ sera très-grande, et φ sera très-petit; quand ω est exactement de 45 degrés, ces quantités sont l'une infinie, l'autre nulle. Il résulte de là que la courbe a deux asymptotes inclinées à 45 degrés sur l'axe, et situées de part et d'autre du centre.

Pour déterminer la position de ces asymptotes, nous allons chercher à quelle distance les points de la courbe qui ont un azimut de 45 degrés se trouvent de la ligne qui passe par le pôle, et qui a cette inclinaison. Appelons P la distance d'un point de la courbe à cette ligne; on a

$$P = \frac{a}{\sin\theta}\left(1 + \frac{\cos\theta}{\cos 2\omega}\right)\sin \pm (\omega - 45^\circ).$$

Si l'on suppose à ω la valeur 45 degrés, le premier terme disparaît, le second devient indéterminé. Cherchant sa valeur par le procédé ordinaire, on trouve

$$(31)\qquad P = \mp \frac{1}{2} a \cot\theta.$$

Ce calcul s'applique également à l'azimut de 135 degrés dont le double a un cosinus nul. La courbe a donc quatre asymptotes z, z_1, z', z'_1 qui se coupent à angles droits, et qui sont situées de part et d'autre et à égales distances des asymptotes zz_1, $z'z'_1$ de l'hyperbole apollonienne des foyers.

Ce résultat surprend au premier abord; il semble que les demi-axes étant mesurés sur les mêmes rayons vecteurs que les demi-distances focales, ou sur des rayons vecteurs perpendiculaires, et devenant infinis en même temps, la courbe des sommets devrait avoir les mêmes asymptotes que l'hyperbole équilatère que forment les foyers. Mais on doit remarquer que quand les distances focales deviennent infinies, les axes, abscisses de paraboles, deviennent infinis du second ordre [art. **12**, équat. (27)]. Par conséquent, le rayon vecteur qui est infiniment rapproché du point de la courbe des foyers situé à l'infini, passe à une distance finie du point correspondant de la courbe des sommets, et n'est pas asymptote de cette courbe comme de la première.

14. Pour que μ soit nul, équation (28), il faut que ω soit égal à $90^\circ \pm \frac{1}{2}\theta$; φ devient alors nul; on voit donc que la courbe admet au pôle deux tangentes perpendiculaires aux directrices.

D'après cela, et en faisant varier graduellement ω, on reconnaît que l'équation (28) représente, *fig.* 4 : 1° une hyperbole non apollonienne $S'SS''$, $S'_1S_1S''_1$ dont chaque branche admet deux asymptotes qui se coupent à angle droit, et qui sont parallèles aux asymptotes de l'autre branche; 2° une lemniscate comprise entre les tangentes PP', $P_1P'_1$, perpendiculaires aux directrices; 3° deux courbes indéfinies $s'Os''$, $s'_1Os''_1$ qui se croisent au pôle, tangentes à la lemniscate, et qui ont les mêmes asymptotes que l'hyperbole.

La courbe appartient à la famille des hyperboles redondantes; elle a deux axes, un centre et quatre sommets qui sont les sommets de l'ellipse décrite par le point de la sécante qui est placé à égale distance des points assujettis.

La lemniscate et la partie de l'hyperbole comprise entre les directrices comprennent les sommets des ellipses décrites par les points assujettis. Les autres ellipses ont leurs petits sommets sur les courbes indéfinies tangentes à la lemniscate, et leurs grands sommets sur les parties de l'hyperbole situées hors des angles aigus des directrices.

Si l'on compare les équations (25) et (28), on verra que l'hyperbole des sommets et l'hyperbole apollonienne des foyers se rencontrent sur les directrices, en des points E situés à une distance $\frac{2a}{\sin\theta}$ du centre. Par les équations (26) et (30) on reconnaît que ces courbes ont, à leurs points de rencontre, les mêmes tangentes, qui sont inversement perpendiculaires aux directrices.

15. Si l'on examine l'équation (30), on verra que les racines du numérateur du second membre sont imaginaires; tang γ ne peut donc devenir nul que si cot ω l'est, c'est-à-dire si ω est égal à $\pm$ 90 degrés. La courbe n'admet donc de tangentes parallèles à l'axe qu'aux sommets de la lemniscate.

Tang γ devient infini quand cotω est infini, et quand le dénominateur de l'équation (30) est nul. La courbe admet donc des tangentes perpendiculaires à l'axe aux sommets de l'hyperbole, et aux points dont les azimuts sont déterminés par

$$(32) \qquad \cos 2\omega = \frac{1}{2}\cos\theta \pm \sqrt{\frac{1}{4}\cos^2\theta + 2\cos\theta}.$$

La quantité soumise au radical est essentiellement positive. Si l'on discute la seconde valeur de $\cos 2\omega$, on verra qu'elle est toujours comprise entre $-\cos\theta$ et -1, et qu'elle indique, par conséquent, quatre points situés sur la lemniscate.

Pour que la première valeur de $\cos 2\omega$ indique un angle réel, il faut qu'elle soit plus petite que l'unité, d'où l'on tire

$$\cos\theta < \frac{1}{3}, \quad \theta > 70^\circ 31' 43'',6.$$

Quand cette condition est satisfaite, la courbe a quatre nouveaux points où ses tangentes sont perpendiculaires à l'axe. Ces points sont situés dans la partie de l'hyperbole comprise entre les directrices, car la première valeur $\cos 2\omega$ donnée par l'équation (32) est toujours plus grande que $\cos\theta$.

Nous allons examiner comment varient les abscisses, afin de reconnaître la forme de la courbe lorsqu'elle admet des tangentes perpendiculaires à l'axe en d'autres points de l'hyperbole qu'aux sommets.

Soit x l'abscisse du point de la courbe dont les coordonnées sont ω et μ, on a

$$x = \frac{a}{\sin\theta}\left(\cos\omega + \frac{\cos\theta}{\cos 2\omega}\cos\omega\right).$$

Différentiant, on trouve, après réductions,

$$(33)\qquad dx = -\frac{a\sin\omega}{\sin\theta\cos^2 2\omega}(\cos^2 2\omega - \cos\theta\cos 2\omega - 2\cos\theta)\,d\omega.$$

Cette équation pourrait servir à déterminer les points où la tangente est perpendiculaire à l'axe, si l'équation (30) ne nous avait déjà permis de le faire.

Appelons ω'' l'azimut de l'un des points de la lemniscate où la tangente est perpendiculaire à l'axe; ω' l'azimut d'un point analogue de l'hyperbole; on pourra écrire

$$(34)\qquad dx = -\frac{a\sin\omega\,d\omega}{\sin\theta\cos^2 2\omega}(\cos 2\omega - \cos 2\omega')(\cos 2\omega - \cos 2\omega'').$$

Supposons à ω des valeurs très-petites; le facteur de la seconde parenthèse sera positif puisque ω'' est toujours réel, et que, par suite, $\cos 2\omega''$ sera plus petit que l'unité. D'après ce que nous avons vu, le facteur de la première parenthèse sera négatif si $\cos\theta$ est plus grand qu'un tiers; dx sera alors de même signe que $d\omega$ si l'on suppose $\sin\omega$ positif, et de signe contraire si on le suppose négatif. Dans les deux cas, l'abscisse augmentera quand le point de la courbe s'éloignera de l'axe.

Si $\cos\theta$ est plus petit qu'un tiers, ω' est réel, $\cos 2\omega'$ est plus petit que l'unité, et l'on peut toujours supposer ω assez petit pour que le facteur de la première parenthèse soit positif; l'abscisse diminuera donc pendant quelque temps quand le rayon vecteur s'éloignera de l'axe, et, par conséquent, dans la partie voisine des grands sommets la courbe sera concave vers le centre. On voit que chaque demibranche de l'hyperbole est obligée d'admettre une tangente perpendiculaire à l'axe pour pouvoir retourner à son asymptote.

La concavité aux grands sommets n'est sensible que quand l'angle θ est très-grand. La *fig.* 7 représente la courbe pour un angle θ de 88 degrés. Les branches indéfinies qui se croisent au centre sont sensiblement droites. Les asymptotes n'ont pas pu être tracées sur cette figure.

Avant de quitter ce sujet, nous observerons qu'on a entre ω' et ω'' la relation très-simple

$$\cos 2\omega' + \cos 2\omega'' = \cos \theta.$$

16. Il est intéressant de rechercher les points d'inflexion; la courbe en a nécessairement quand elle est concave vers le centre en ses sommets. Quand il y a inflexion, $\frac{d \operatorname{tang} \gamma}{d\omega}$ est nécessairement nul ou infini. Ce coefficient ne peut être infini que si γ est de 90 degrés, mais l'équation (34) montre qu'aux points où la tangente est perpendiculaire à l'axe, dx change de signe, et que, par conséquent, il n'y a pas inflexion. On aura donc tous les points d'inflexion en égalant $\frac{d \operatorname{tang} \gamma}{d\omega}$ à zéro.

L'équation (30) peut se mettre sous la forme

$$(35) \qquad \operatorname{tang} \gamma = \frac{\sin 2\omega}{1 - \cos 2\omega} \times \frac{z + 2\cos\theta}{z - 2\cos\theta},$$

en faisant

$$(36) \qquad z = \cos^2 2\omega - \cos 2\omega \cos \theta.$$

Différentiant cette expression, on trouve, après réductions,

$$(37) \qquad d \operatorname{tang} \gamma = \frac{2\left(z^2 + 4\cos\theta \sin 2\omega \frac{dz}{d\omega} - 4\cos^2\theta\right)}{(1 - \cos 2\omega)(z - 2\cos\theta)^2}\, d\omega.$$

Égalant le numérateur à zéro, remplaçant z et $\frac{dz}{d\omega}$ par leurs valeurs en $\cos 2\omega$ déduites de l'équation (36), et éloignant une racine $\cos 2\omega = 0$ qui se présente, on a

$$(38) \quad \cos^3 2\omega + 6\cos\theta \cos^2 2\omega - 3\cos^2\theta \cos 2\omega - 8\cos\theta = 0.$$

La racine nulle qu'il a fallu supprimer vient de ce que la courbe se confond à l'infini avec le rayon vecteur incliné à 45 degrés. Le rayon de courbure devient alors infini, ce qui exige l'évanouissement de la seconde dérivée.

Si dans l'équation (38) on suppose $\cos\theta$ nul, on trouve $\omega = 45$ degrés. Les sommets des ellipses sont alors tous groupés sur les directrices inclinées à 45 degrés sur les axes. La courbe est réduite à ces deux droites qui devaient être indiquées par l'équation des inflexions, parce que leurs secondes dérivées sont nulles.

Si $\cos\theta$ varie de 0 à $\frac{1}{3}$, l'équation (38) admet une racine réelle, toujours plus grande que $\cos\theta$ et qui croît de 0 à 1. ω diminue donc de 45 degrés à 0, et la courbe a quatre points d'inflexion sur la partie de l'hyperbole comprise dans l'angle aigu des directrices.

Quand $\cos\theta$ est $\frac{1}{3}$, ω devient nul. Sur chaque branche de l'hyperbole, les trois tangentes perpendiculaires à l'axe se confondent, et ont avec la courbe, en son sommet, une tangence du troisième ordre qui exige l'évanouissement de la seconde dérivée.

Si $\cos\theta$ augmente de $\frac{1}{3}$ à $0,42466$, $\cos 2\omega$ a toujours une seule valeur réelle, mais elle devient supérieure à l'unité, et, par conséquent, ω est imaginaire. Quand $\cos\theta$ a atteint la grandeur de $0,4266$ [*], deux racines négatives apparaissent; elles sont d'abord égales; elles se séparent si $\cos\theta$ continue à croître, mais, ainsi que la racine positive, elles restent toujours supérieures à l'unité en grandeur absolue.

On voit donc que la courbe n'a pas de points d'inflexion quand l'angle aigu des directrices est plus petit que $70°31'43'',6$, et que quand il est plus grand, elle en a quatre situés sur la partie de l'hyperbole comprise dans l'angle des directrices.

Le centre peut être considéré comme un double point d'inflexion, et cependant la formule (38) ne donne pas son azimut $90° \pm \frac{1}{2}\theta$. C'est

---

[*] Plus exactement $\sqrt{\sqrt{125} - 11}$.

qu'à vrai dire on ne trouve pas une lemniscate dans l'équation (28). Chacun des deux nœuds est lié sans inflexion avec les deux demi-branches qui s'étendent à l'infini de l'autre côté de l'axe.

17. Proposons-nous de trouver l'expression du rayon de courbure que nous désignerons par la lettre ρ.

On a

$$\rho = -\frac{(1+\operatorname{tang}^2\gamma)^{\frac{3}{2}}\,dx}{d\operatorname{tang}\gamma}. \tag{39}$$

D'après l'équation (35), on peut écrire

$$\operatorname{tang}^2\gamma = \frac{\cos^2\omega}{\sin^2\omega}\frac{(z+2\cos\theta)^2}{(z-2\cos\theta)^2},$$

et

$$(1+\operatorname{tang}^2\gamma)^{\frac{3}{2}} = \frac{(z^2+4z\cos 2\omega\cos\theta+4\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}}{\sin^3\omega\,(z-2\cos\theta)^3}. \tag{40}$$

Introduisant la fonction z dans l'équation (33),

$$dx = -\frac{a\sin\omega}{\sin\theta\cos^2 2\omega}(z-2\cos\theta)\,d\omega. \tag{41}$$

Portant dans l'équation (39) les valeurs de $(1+\operatorname{tang}^2\gamma)^{\frac{3}{2}}$, dx et $d\operatorname{tang}\gamma$ des équations (40), (41) et (37), on trouve

$$\rho = \frac{a}{\sin\theta\cos^2 2\omega}\frac{(z^2+4z\cos 2\omega\cos\theta+4\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}}{\left(z^2+4\cos\theta\sin 2\omega\dfrac{dz}{d\omega}-4\cos^2\theta\right)}.$$

Enfin, remplaçant z et $\frac{dz}{d\omega}$ par leurs valeurs prises dans l'équation (36),

$$\rho = \frac{a(\cos^4 2\omega+2\cos\theta\cos^3 2\omega-3\cos^2\theta\cos^2 2\omega+4\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}}{\sin\theta\cos^3 2\omega(\cos^3 2\omega+6\cos\theta\cos^2 2\omega-3\cos^2\theta\cos 2\omega-8\cos\theta)}. \tag{42}$$

18. Si l'on suppose dans l'équation (42) ω égal à zéro, on trouve pour expression du rayon de courbure aux grands sommets

$$\rho = a\frac{(1+\cos\theta)^2}{\sin\theta(1-3\cos\theta)}.$$

Si θ varie de 90 degrés à zéro, ρ, d'abord égal à a, augmente, devient infini quand $\cos\theta = \frac{1}{3}$, change de signe, diminue, et, après avoir atteint un minimum, augmente et converge vers l'infini quand θ converge vers zéro.

On trouve que la valeur du minimum de ρ correspond à

$$\cos\theta = \frac{5}{7}, \quad \theta = 44^\circ 24' 55'', 1.$$

La valeur de ρ est alors, abstraction faite du signe,

$$3.67424\,a.$$

Aux petits sommets, on a

$$\rho = a\frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin\theta(1+3\cos\theta)}.$$

Si θ varie de 90 degrés à zéro, ρ diminue de a à zéro.

Nous venons de voir qu'à tous les sommets le rayon de courbure est a quand θ est de 90 degrés. Si l'on examine l'équation (42), on verra que quand θ approche de 90 degrés, ρ converge vers a, quel que soit l'azimut. Si cependant ω est de ± 45 degrés, le rayon ρ reste infini.

19. Pour comprendre ce qui se passe alors, il faut se reporter à l'équation générale de la courbe (28). Si l'on y fait $\theta = 90$ degrés, elle se divise en deux :

$$\cos 2\omega = 0, \quad \mu = a.$$

La première représente les directrices qui deviennent les axes de toutes les ellipses. La seconde indique un cercle qui est décrit par le point de la ligne droite mobile situé à égale distance des points assujettis. Tous les points de ce cercle étant des sommets, la formule (28) devait donner son équation.

La *fig.* 7 et l'équation (42) montrent comment la courbe se transforme en un cercle et deux lignes droites. La partie de l'hyperbole voisine de l'axe devient concave vers le centre, et plus θ augmente, plus elle se rapproche de la forme circulaire. Cependant la lemniscate s'enfle, et les parties voisines de ses sommets affectent aussi, elles, la forme circulaire. Les autres parties de la courbe s'aplatissent contre leurs asymptotes qui se rapprochent du centre. Quand θ arrive à 90 degrés, les quatre quarts de cercle qui se préparaient aux sommets de l'hyperbole et de la lemniscate se réunissent [*], et les autres parties de la courbe se confondent avec les asymptotes, qui elles-mêmes se superposent aux rayons vecteurs inclinés à 45 degrés.

On doit remarquer que, dans l'intérieur du cercle, les droites sont entièrement formées de parties empruntées à la courbe des petits sommets; c'est que si le petit axe de l'ellipse passe par tous les états de grandeur, suivant la position du point décrivant sur la droite mobile, le grand axe a un minimum $2a$ $\left(\text{généralement } 2a \cot \frac{1}{2}\theta\right)$ qu'il ne peut pas franchir.

20. Nous avons étudié avec soin la forme de la courbe (28), et nous nous sommes attaché à reconnaître les modifications qu'elle éprouve suivant les variations de l'angle θ. Cette étude était nécessaire pour comprendre comment les ellipses se disposent et se groupent. On peut faire sur la courbe (28) beaucoup d'autres spéculations intéressantes; nous en indiquerons quelques-unes.

A. L'angle φ que forme le rayon vecteur avec la tangente est nul aux points dont les azimuts sont $90^\circ \pm 45^\circ$ et $90^\circ \pm \frac{1}{2}\theta$; entre ces points, il s'en trouve nécessairement un où l'angle φ atteint un maximum. On trouve que l'azimut de ce point est donné par

$$\cos^3 2\omega - 2\cos 2\omega - \cos\theta = 0,$$

d'où l'on tire

$$\cos 2\omega = -2\sqrt{\frac{2}{3}}\sin\left(30^\circ - \frac{1}{3}\operatorname{arc}\cos\sqrt{\frac{27}{32}}\cos\theta\right).$$

[*] L'équation (32) montre que quand θ approche de 90 degrés, les rayons vecteurs des deux points qui admettent des tangentes perpendiculaires à l'axe se rapprochent, et que leurs azimuts convergent vers 45 degrés; ils semblent atteindre cette limite quand l'angle θ est droit, mais alors les deux tangentes perpendiculaires à l'axe disparaissent, comme on le voit par l'équation (30).

Si θ varie de 90 degrés à zéro, ω augmente de $45°$ à $64° 5' 13'',6$.

B. Si l'on donne l'inclinaison γ d'une tangente, on pourra calculer, à l'aide de l'équation (30), le point de la courbe où la tangence a lieu. On est conduit à une équation du cinquième degré qui se simplifie quelquefois. Ainsi les azimuts des points où la tangente est inclinée de 45 degrés sur l'axe, sont donnés par la formule

$$\cos^3 2\omega - 2\cos\theta \cos^2 2\omega + \cos^2\theta \cos 2\omega + 4\cos\theta = 0.$$

Cette équation n'a qu'une racine réelle qui est comprise entre $-\cos\theta$ et -1 et qui, par conséquent, indique quatre points situés sur la lemniscate.

C. Les rayons de courbure au pôle ont une expression très-simple.

Si, dans l'équation (42), on suppose

$$\cos 2\omega = -\cos\theta,$$

on trouve

$$\rho = \frac{a}{\cos\theta}.$$

Si l'on prend sur chaque directrice des points G qui soient à une distance a du pôle, et que, par ces points, on lui élève des perpendiculaires jusqu'à l'autre directrice, les points de rencontre Q seront les centres de courbure. Les points G sont évidemment sur l'ellipse décrite par le point de la sécante qui est à égales distances des deux points assujettis.

D. Si, après avoir tracé la courbe (28), on augmente tous les rayons vecteurs d'une même quantité, on aura une courbe absolument de même nature, et qui correspondra à des directrices plus rapprochées des asymptotes.

Si l'on diminuait les rayons vecteurs d'une quantité plus petite que $a \tang \frac{1}{2}\theta$ ou plus grande que $a \cot \frac{1}{2}\theta$, on trouverait encore une courbe de même nature. Pour une diminution comprise entre ces limites, on a une courbe du même genre, mais d'une forme altérée et qui a perdu la belle propriété d'être le lieu des sommets des ellipses décrites par les divers points d'une ligne droite mobile.

E. Si du pôle comme centre on décrit un cercle, il coupera généralement la courbe (28) en huit points qui appartiennent à deux systèmes. La somme des sécantes des doubles des azimuts de deux points pris dans les deux systèmes est indépendante du rayon du cercle.

F. La courbe représentée par l'équation (28) ne convient qu'à un seul système de directrices et d'écartement de points assujettis. La même hyperbole de foyers correspond donc à une infinité de courbes de sommets; elle est l'enveloppe de ces courbes.

21. L'équation (28) permet de tracer facilement la courbe. Pour cela, du point O, *fig.* 5, intersection des directrices, tracez un cercle GQO' d'un rayon égal à $\frac{a}{\sin\theta}$, et portez sur la bissectrice OY de l'angle obtus des directrices, une longueur OH égale au cosinus de θ mesuré dans le cercle OG; tracez deux rayons vecteurs rectangulaires OK, OK' dont le premier fasse avec OX un angle de moins de 45 degrés; abaissez GQ perpendiculaire sur OK, puis QB perpendiculaire sur OX; menez GR parallèle à la ligne qui joindrait les points B et H; enfin, portez la longueur OR de c en m, et de c' en m' : les points m, m' seront sur la courbe. Quand le rayon vecteur OK aura décrit un angle de 45 degrés, on aura tracé un quart de la courbe; les trois autres quarts sont symétriques.

Nous indiquerons une autre construction : les cosinus des angles 2ω se mesurent naturellement sur l'axe OX. Si nous portons les rayons vecteurs en ordonnées perpendiculaires à cet axe, l'équation (28) représentera une hyperbole apollonienne équilatère dont les asymptotes seront O'X' et O'Y. La grandeur de cette hyperbole dépend du rayon du cercle dans lequel on mesure les cosinus. Nous supposerons que ce soit dans le cercle dont le rayon est OO' ou $\frac{a}{\sin\theta}$. L'hyperbole est facile à construire. Le rayon vecteur Om à porter dans la direction OK, sera l'ordonnée BD correspondante à l'arc double et prolongée jusqu'à l'hyperbole.

Des équations (28) et (29) on déduit

$$\tang\varphi = \frac{\mu}{2\left(\mu - \frac{a}{\sin\theta}\right)}\cot 2\omega.$$

Om, mc et O'V sont μ, $\mu - \frac{a}{\sin\theta}$ et cot 2ω. On peut donc trouver φ par une construction très-simple.

22. L'équation de la courbe en coordonnées parallèles n'offre rien de remarquable; elle est du sixième degré,

$$(43) \qquad (x^2 - y^2)(x^4 - y^4) = a^2\left(x^2 \cot\tfrac{1}{2}\theta - y^2 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta\right)^2.$$

Les axes sont les bissectrices OX, OY, *fig.* 4, des angles des directrices.

Si l'on recherche les asymptotes, on trouve pour leur équation

$$y = \pm x \pm \frac{a\cot\theta}{\sqrt{2}}.$$

Il est facile de voir que ces droites sont précisément celles que nous avons trouvées au n° **14**.

Si θ est 90 degrés, l'équation (43) donne, comme l'équation (28), deux lignes droites inclinées à 45 degrés sur les axes, et le cercle qui a son centre à l'origine, et dont le rayon est a.

23. Nous avons vu, n° **7**, que les tangentes de toutes les ellipses, aux points qui correspondent à une même position de la sécante, ont pour enveloppe une parabole au foyer de laquelle concourent les normales des différentes ellipses. On détermine facilement ce foyer en élevant des perpendiculaires aux directrices, par les points où la ligne mobile les coupe. On reconnaît ensuite sans difficulté que lorsque la sécante se meut, et que ses points décrivent des ellipses, le foyer de la parabole enveloppe des tangentes décrit un cercle dont le centre est au point O, intersection des directrices, *fig.* 4, et qui a pour rayon $\frac{2a}{\sin\theta}$. Ce cercle passe par les points de contact E des hyperboles, n° **14**.

24. Il est facile de trouver l'équation de l'enveloppe des sécantes mobiles, lorsque les directrices sont rectangulaires.

Soit

$$u = c$$

l'équation de cette enveloppe, rapportée aux directrices. u est une fonction nécessairement symétrique des coordonnées variables x et y d'un point de l'enveloppe; c est une quantité constante.

Les directrices faisant partie des sécantes mobiles doivent être tangentes à la courbe; ce qui exige que

$$(44)\quad \begin{cases} \text{quand} \quad x = 0, \quad \text{on ait} \quad \dfrac{du}{dy} = 0 \quad \text{ou} \quad \dfrac{du}{dx} = \infty ; \\ \text{quand} \quad y = 0, \quad \text{on ait} \quad \dfrac{du}{dx} = 0 \quad \text{ou} \quad \dfrac{du}{dy} = \infty . \end{cases}$$

L'équation de l'une quelconque des lignes mobiles est

$$(x' - x)\frac{du}{dx} + (y' - y)\frac{du}{dy} = 0.$$

La partie comprise entre les axes étant égale à $2a$, on doit écrire

$$(45)\quad \left(\frac{du}{dx}x + \frac{du}{dy}y\right)^2 \left[\frac{1}{\left(\frac{du}{dy}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{du}{dx}\right)^2}\right] = (2a)^2.$$

Le premier facteur sera constant, si la fonction symétrique u est un binôme dont chaque terme ne contienne qu'une des variables à un exposant quelconque. Le second facteur sera également constant, si cet exposant est tel, qu'il soit, ou exactement reproduit, ou réduit à zéro par la différentiation, le renversement en dénominateur et l'élévation au carré. Dans le premier cas, en effet, ce facteur est la fonction u; dans le second, les variables disparaissent.

Nous sommes ainsi conduit aux exposants $\frac{2}{3}$ et 1. Le second ne satisfait pas aux conditions (39), et doit être rejeté; le premier leur satisfait pleinement, et doit, par conséquent, être admis.

Le premier membre de l'équation (40) devient le cube de u, si l'on suppose que dans cette fonction les coefficients des variables, qui sont nécessairement égaux, soient réduits à l'unité. La racine cubique du second membre $(2a)^2$ sera donc égale au terme constant c. Nous obtenons ainsi :

$$y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} = (2a)^{\frac{2}{3}}.$$

Cette équation représente, comme on sait, une épicycloïde décrite par un cercle dont le diamètre est a dans un cercle d'un diamètre quadruple.

On avait déjà remarqué la propriété des tangentes de cette courbe de couper les axes en des points dont la distance est toujours égale au diamètre du cercle régénérateur. Cette propriété donne probablement le moyen le plus simple de la tracer.

25. Nous allons maintenant examiner, dans une même ellipse, les différents systèmes de directrices qu'elle peut admettre. Pour simplifier le langage, nous dirons que deux diamètres sont correspondants, quand l'ellipse pourra être décrite par un point d'une sécante qui aurait sur eux deux points assujettis.

Nous reprenons nos anciennes notations de l'article **9** : m et n sont les distances du point décrivant aux points assujettis. Ces deux quantités sont positives, quand le point décrivant est entre les points assujettis; quand il n'y est pas, l'une des deux est nécessairement négative et l'autre positive. Les grandeurs absolues de m et n sont évidemment les longueurs des demi-diamètres des directrices.

Les équations (22) et (23) deviennent :

$$nm > 0, \qquad nm < 0,$$

$$(22\ bis) \qquad nm = \mu''\mu', \qquad nm = -\mu''\mu',$$

$$(23\ bis) \qquad \sin\theta = \frac{m+n}{\mu''+\mu'}, \quad \sin\theta = \frac{m+n}{\mu''-\mu'}.$$

La formule (22 *bis*) montre que, dans une ellipse, le rectangle de deux diamètres correspondants est toujours égal au rectangle des axes.

Si l'on donne l'angle qu'un diamètre fait avec le grand axe, il sera facile d'avoir sa demi-longueur n, qui sera comprise entre μ'' et μ'; on calculera par les formules (22 *bis*) la demi-longueur m du diamètre correspondant, on trouvera ensuite, par les équations (23 *bis*), deux sinus qui seront toujours plus petits que l'unité, ainsi qu'on le reconnaît en discutant leurs expressions. L'angle θ aura donc toujours deux valeurs réelles, et l'on pourra placer dans deux positions le demi-diamètre m. Tout diamètre a donc deux diamètres correspondants, de même longueur, et, par conséquent, placés d'une manière symétrique par rapport aux axes. Avec l'un de ces diamètres, le point décrivant est entre les points assujettis; avec l'autre, il est en dehors d'eux. Deux diamètres placés d'une manière symétrique par rapport aux axes, ont évidemment les mêmes correspondants. Enfin, comme un diamètre de longueur donnée ne peut recevoir dans une ellipse que deux positions, il est manifeste que deux diamètres dont le rectangle est égal à celui des axes sont correspondants.

Si le diamètre donné est un axe, les deux diamètres correspondants se réunissent dans le second axe.

Si le diamètre donné est moyen proportionnel entre les axes, il n'a qu'un correspondant, et l'ellipse ne peut être décrite que par un point compris entre les deux assujettis. L'autre mode de génération disparaît, parce que la seconde des valeurs de θ devient nulle; le diamètre se confond alors avec son second correspondant, et les deux points assujettis de la sécante se confondant également, ses diverses positions ne sont plus déterminées.

Si l'ellipse est un cercle, les deux quantités m et n sont égales; la première valeur de θ est de 90 degrés. Le cercle peut donc être décrit par un point d'une sécante placée à égales distances de deux autres assujettis à glisser sur des droites rectangulaires. La seconde valeur de θ est arbitraire; les deux points assujettis se confondent, et, pour décrire le cercle, il suffit de les retenir au centre : ce qui a lieu, si on les oblige à rester sur le diamètre donné, et sur l'un quelconque des autres.

26. Quand une ellipse est tracée, on trouve les diamètres correspondants d'un diamètre donné par une quatrième proportionnelle et un arc de cercle.

Tout le monde connaît, pour le cas où l'ellipse n'est pas tracée, une construction qui consiste à décrire un cercle d'un diamètre égal à la somme des demi-axes, ayant son centre sur le grand axe et tangent au petit. Les cordes de ce cercle qui passent par les extrémités du grand axe de l'ellipse, rencontrent la circonférence en des points qui, deux à deux, appartiennent à des directions de diamètres correspondants.

Cette construction élégante a l'inconvénient de s'étendre loin de l'ellipse, et d'exiger souvent une réduction d'échelle. Elle ne donne d'ailleurs que la direction du second diamètre, et si l'on veut tracer l'ellipse, il faut ensuite chercher les longueurs des deux diamètres. Il est plus simple de chercher d'abord ces longueurs, la direction du second diamètre s'en déduit très-simplement.

Soient AA′, BB′, *fig.* 6, les axes d'une ellipse, et VV′ un diamètre quelconque. Des sommets A′ et B′ nous abaissons les perpendiculaires $A'q$, $B'p$ sur ce diamètre; nous portons $A'q$ de p en q'; nous joignons $B'q'$, et nous prenons sur cette ligne une longueur B′G égale à CA; nous menons GK parallèle au diamètre donné VV′; nous rabattons $B'q'$ sur B′B, et nous prenons pH égal à Kq''; nous menons D′D parallèle à V′V, et du centre C, avec un rayon égal à la différence des demi-axes, nous décrivons un arc de cercle qui coupe D′D en F; nous traçons SS′ par C et F, et enfin T′T et U′U dans des positions symétriques par rapport aux axes, aux lignes S′S et V′V.

Si l'on prend sur deux lignes droites Mg, M′g' égaux à B′K, et Ng, N′g' égaux à $B'q'$, l'ellipse pourra être décrite par le point g, en faisant glisser le point M sur S′S et le point N sur VV′, ou le point M sur T′T et le point N sur UU′; elle le sera encore par le point g', si l'on fait glisser M′ sur TT′ et N′ sur VV′, ou M′ sur SS′ et N′ sur UU′.

Pour légitimer cette construction, il suffit de remarquer qu'en éliminant n et θ entre les équations (22 *bis*), (23 *bis*) et (15 *bis*), ou en calculant directement m d'après les données de l'ellipse et l'inclinaison α de ce diamètre sur l'axe, on trouve

$$m = \sqrt{\mu''^2 \sin^2 \alpha + \mu'^2 \cos^2 \alpha},$$

$B'q'$ est évidemment m, et B′K, n. On voit ensuite, d'après l'équation (24 *bis*), que SCV est égal à la seconde valeur de θ.

Les diamètres correspondants permettent quelquefois de tracer rapidement des arcs d'une grande ellipse quand les autres procédés graphiques sont inadmissibles. Ce moyen, du reste, ne peut pas être toujours employé, et quand les diamètres sont très-grands il faut en venir à calculer des ordonnées sur une corde.

27. Nous avons vu, n° **7**, que quand une ligne droite se meut dans un plan, les tangentes à toutes les courbes que décrivent ses points ont constamment pour enveloppe une parabole. On peut facilement démontrer ce théorème dans toute sa généralité, et reconnaître quel est le paramètre de la parabole.

Supposons qu'une sécante gg', *fig.* 2, se meuve dans le plan de deux lignes Bn, Bm, de manière que la différence des segments de ces lignes (Bg' — Bg) reste toujours égale à une quantité donnée h. L'enveloppe de cette ligne mobile rapportée aux directrices Bn, Bm, a pour équation

$$x^2 + y^2 + 2xy - 2hy + 2hx + h^2 = 0.$$

Si l'on rapporte cette parabole à la bissectrice BE de l'angle θ des directrices, et à sa perpendiculaire BY', on trouve

$$x^2 - 2h\frac{\cos\frac{1}{2}\theta}{\tang\frac{1}{2}\theta} + h^2\cos^2\theta = 0.$$

Si h et θ deviennent infiniment petits dh et $d\theta$, la parabole a pour équation

$$x^2 = 4\frac{dh}{d\theta}y. \tag{46}$$

La ligne gg' est alors une tangente à la courbe décrite par le point g; on voit que l'enveloppe de ces tangentes est une parabole. Cette proposition est vraie quelle que soit la loi du mouvement de gg', pourvu que deux positions infiniment voisines se coupent toujours, et que cette ligne glisse sur son enveloppe. S'il n'y avait pas glissement, $\frac{dh}{d\theta}$ serait nul, et y serait infini pour toute valeur de x. Les courbes seraient alors des développantes, et toutes leurs tangentes seraient parallèles et perpendiculaires à gg'.

Appelons ds l'élément de l'enveloppe qui est parcouru par le point de tangence de la génératrice pendant qu'elle-même glisse de la quantité dh, et R le rayon de courbure de cette enveloppe au point de contact avec la génératrice, on aura

$$ds = \mathrm{R}\,d\theta$$

et

$$x^2 = 4\mathrm{R}\frac{dh}{ds}y. \qquad (47)$$

Ainsi donc, si une ligne droite décrit une surface developpable, et qu'en même temps elle glisse sur l'arête de rebroussement suivant une loi quelconque, les tangentes menées le long d'une génératrice aux courbes décrites par ses divers points dans leur double mouvement, ont pour enveloppe une parabole tangente en son sommet à la génératrice et à l'arête de rebroussement, comprise dans le plan tangent à la surface, et dont le paramètre est égal à quatre fois le rayon de courbure de l'arête de rebroussement au point de contact, multiplié par le rapport des vitesses du glissement et du parcours sur l'arête.

On peut ajouter, d'après une propriété connue de la parabole, que les normales des courbes décrites aux points qui correspondent à une même position de la génératrice, concourent toutes au foyer de la parabole enveloppe des tangentes.

Cette proposition donne un moyen généralement facile de mener des tangentes aux courbes tracées sur des surfaces développables. Si la surface est un cône, il faut recourir à l'équation (46), car la formule (47) donne un paramètre indéterminé.

On peut, par ce procédé, résoudre le problème de Garbinski sur la tangente à la spirale conique (*Annales de Mathématiques* de Gergonne, tome XVI, page 167); il suffit de construire et de rabattre le plan tangent au cône, d'y placer le foyer de la parabole, ce qui est facile, car le rapport $\frac{dh}{d\theta}$ est constant et nécessairement connu, enfin de tracer la normale et la tangente, et de relever le plan.

Saint-Nazaire, le 18 août 1849.

Addition.

SOMMAIRE. — Si les directrices rectilignes ne sont pas situées dans un même plan, les courbes décrites sont encore des ellipses pour lesquelles la somme ou la différence des axes est constante, et dont les surfaces sont indépendantes de l'angle des direc trices (28). — La courbe formée par les foyers est l'intersection d'un cylindre hyperbolique avec un paraboloïde hyperbolique (29). — La ligne mobile engendre un hyperboloïde gauche du quatrième degré. Les asymptotes des hyperboles que donnent les sections faites par l'axe, forment une surface gauche du quatrième degré. Équations de la courbe que forment les sommets des ellipses (30). — Quand les directrices sont rectangulaires, la courbe des foyers se transforme en deux paraboles, et la courbe des sommets en quatre lignes droites (31).

28. Si les directrices sont des droites non situées dans un même plan, on peut, pour chacune d'elles, mener un plan parallèle à l'autre : on aura ainsi deux plans parallèles et que nous supposerons horizontaux.

La longueur de la partie de la droite mobile, interceptée entre ces deux plans, est constante d'après la loi même de son mouvement ; cette ligne reste donc toujours également inclinée à l'horizon, et chacun de ses points se meut dans un plan horizontal.

Prenons pour plan de projection un plan horizontal quelconque, celui qui est à égales distances des deux directrices. Leur commune perpendiculaire sera représentée par un point, et elles-mêmes par deux droites qui se croiseront en ce point et sur lesquelles glisseront les projections des points assujettis. La distance de ces projections sera constante, puisque l'inclinaison de la ligne mobile ne varie pas; les projections des courbes décrites par ses différents points seront donc des ellipses concentriques qui jouiront des diverses propriétés que nous avons constatées au n° 10. Mais les courbes sont dans des plans horizontaux, et, par conséquent, se projettent en vraie grandeur; elles sont donc aussi des ellipses qui ont leurs centres sur la commune perpendiculaire des deux directrices, et qui jouissent des propriétés reconnues, c'est-à-dire que la somme ou la différence de leurs axes est constante, et que leurs surfaces sont indépendantes de l'angle des directrices.

Nous prenons pour axe des z la commune perpendiculaire des directrices, et pour axes des x et des y les bissectrices des angles aigu et obtus des projections horizontales des directrices. Nous conservons les notations adoptées, et nous appelons σ l'inclinaison de la ligne mobile sur l'horizon; en d'autres termes, nous désignons par

$2a \sin\sigma$ la distance des deux directrices mesurée sur leur commune perpendiculaire.

Si nous remplaçons a et b par $a\cos\sigma$ et $b\cos\sigma$ dans les n^os **9**, **10** et suivants, les équations représenteront toutes les circonstances des projections horizontales des différentes courbes. Les courbes des sommets et des foyers sont donc sur des cylindres des deuxième et sixième degrés dont les équations nous sont connues.

29. Pour trouver une autre surface qui contienne ces courbes, nous observerons que chaque ellipse étant horizontale, ses foyers et ses sommets ont la même ordonnée $b\sin\sigma$. On déduit de l'équation (21), en se rappelant que nous avons appelé ω la différence $\alpha - \frac{\theta}{2}$,

$$b = a\cot\theta \operatorname{tang} 2\omega \text{ (*)},$$

on a donc

$$z = a\sin\sigma\cot\theta \operatorname{tang} 2\omega. \tag{48}$$

Cette équation, jointe aux précédentes, détermine complétement les courbes. Si on la transforme en coordonnées parallèles, on a

$$y^2 z - x^2 z + 2axy\cot\theta\sin\sigma = 0. \tag{49}$$

Les courbes des foyers et des sommets peuvent donc être obtenues par l'intersection d'une surface du troisième degré avec des cylindres des deuxième et sixième.

L'équation du premier de ces cylindres est

$$x^2 - y^2 = \frac{4a^2\cos^2\sigma}{\sin\theta \operatorname{tang}\theta}. \tag{26 bis}$$

Combinant cette équation avec l'équation (49), on obtient la formule

$$2az\cos\sigma - xy \operatorname{tang}\sigma\sin\theta = 0, \tag{50}$$

(*) Cette équation permet de trouver, par une construction très-simple, les directions des axes d'une ellipse décrite par un point donné sur une ligne mobile.

qui représente un paraboloïde hyperbolique. La courbe des foyers peut donc être obtenue très-facilement par l'intersection de deux surfaces réglées du deuxième degré.

30. Cherchons maintenant l'équation de la surface engendrée par la ligne mobile. Les équations des directrices sont

$$\begin{cases} y - x \tang \frac{1}{2}\theta = 0, \\ z - a \sin\sigma = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y + x \tang \frac{1}{2}\theta = 0, \\ z + a \sin\sigma = 0. \end{cases}$$

Si l'on pose pour équations de la génératrice dans l'une quelconque de ses positions,

$$x = pz + q,$$
$$y = p'z + q',$$

en exprimant que cette ligne rencontre les deux directrices, et que la distance des points de rencontre est $2a$, on trouve pour équations de condition

$$q' = pa \sin\sigma \tang \tfrac{1}{2}\theta,$$

$$q = p'a \sin\sigma \cot \tfrac{1}{2}\theta,$$

$$p^2 + p'^2 = \cot^2\sigma.$$

Éliminant les coefficients p, q, p' et q', on obtient

$$(31)\quad \begin{cases} \left(xz - ay \sin\sigma \cot \frac{1}{2}\theta\right)^2 + \left(yz - ax \sin\sigma \tang \frac{1}{2}\theta\right)^2 \\ \qquad = (z^2 - a^2 \sin^2\sigma)^2 \cot^2\sigma. \end{cases}$$

Cette équation représente un hyperboloïde gauche du quatrième degré, dont, ainsi que cela devait être, les sections horizontales sont toutes des ellipses. Les sections faites par l'axe des z sont des hyperboles du quatrième degré dont les asymptotes font, avec le plan horizontal, des angles égaux à σ. Ces asymptotes forment une surface gauche du quatrième degré.

On peut déterminer la courbe des sommets par les équations (49 et (51) des troisième et quatrième degrés.

51. Quand les directrices sont rectangulaires, les cylindres verticaux qui contiennent les courbes des foyers et des sommets se réduisent à deux plans qui passent par l'axe des z, et sont inclinés à 45 degrés sur les plans verticaux coordonnés. Pour avoir les équations des courbes dans ces plans, il faut supposer dans les équations (50) et (51)

$$\theta = 90 \text{ degrés} \quad \text{et} \quad x = \pm y = \pm \frac{\mu}{\sqrt{2}},$$

en appelant μ l'abscisse horizontale comptée à partir de l'origine.

On trouve que les courbes des foyers et des sommets ont pour équations :

Dans le premier plan,

$$\mu^2 = 4az \cos\sigma \cot\sigma,$$

$$z = \pm \mu \operatorname{tang} \sigma - a \sin\sigma;$$

dans le second plan,

$$\mu^2 = -4az \cos\sigma \cot\sigma,$$

$$z = \pm \mu \operatorname{tang} \sigma + a \sin\sigma.$$

On voit que la courbe des foyers forme deux paraboles dont les sommets sont à l'origine.

Chaque ellipse a ses deux foyers sur la même parabole.

La courbe des sommets se transforme en quatre lignes droites qui sont des génératrices de la surface (51); elles sont deux à deux tangentes aux parallèles des foyers dans les points où ces courbes rencontrent les directrices. Chaque ellipse a un sommet sur chacune des quatre lignes droites.

La *fig.* 8 représente un plan vertical mené par l'une des deux directrices DD'; l'autre directrice se projette en un point O''. Les lignes SS', $S_1S'_1$ qui passent par ce point O'' et qui forment avec DD' les angles $\pm\sigma$ contiennent les grands sommets au-dessus de l'horizontale Oμ et les petits sommets au-dessous. Les foyers des ellipses situées au-dessus de $O\mu$ sont sur la parabole FOF′ dont le foyer f se trouve par la construction du triangle isocèle $O''D'f$. L'autre parabole a également son sommet en O; son foyer est f'; elle se projette sur Oz' ainsi que les deux droites des sommets qui se croisent en O′. La surface gauche décrite par la droite mobile se projette tout entière sur l'espace angulaire $SO''S_1$, $S'O''S'_1$. Les deux paraboles étant tangentes au plan horizontal de projection, en un même point, les deux foyers de l'ellipse que contient ce plan se confondent en un seul. On trouve, en effet, que l'équation (51) donne un cercle quand on y suppose $\theta = 90$ degrés et $z = 0$. Ce résultat s'accorde parfaitement avec ceux du n° **19**.

Saint-Nazaire, le 11 septembre 1849.