JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

OSSIAN BONNET

Sur les surfaces isothermes et orthogonales

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 14 (1849), p. 401-416.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1849_1_14__401_0>

SUR LES SURFACES ISOTHERMES ET ORTHOGONALES;

Par M. Ossian BONNET.

(Extrait, par l'auteur, d'un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences, 2^{me} semestre 1849.)

Dans un Mémoire appartenant au tome VIII de ce Journal, M. Lamé a démontré, qu'à l'exception du cas des surfaces cylindriques et coniques, les seuls systèmes triples de surfaces isothermes et orthogonales sont les systèmes formés par les surfaces du second degré; j'ai depuis simplifié la démonstration de M. Lamé (*voyez* le xxx^e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*), en faisant usage d'une propriété que j'ai reconnue appartenir à toutes les surfaces susceptibles de faire partie d'un système triple de surfaces isothermes et orthogonales, et d'après laquelle, sur une même ligne de courbure de ces surfaces, le rayon de courbure correspondant varie proportionnellement au cube de l'autre rayon de courbure principal; néanmoins, la démonstration de M. Lamé est encore très-compliquée. Je me propose, dans ce second travail, de montrer que l'exactitude du théorème peut être mise hors de doute par des considérations extrêmement simples.

Soit un système triple de surfaces isothermes et orthogonales que j'appellerai le système (A); considérons les trois surfaces particulières qui passent par le point M de l'espace. Les trois lignes d'intersection de ces surfaces formeront trois axes courbes des coordonnées dont le point M sera l'origine; pour fixer les idées, nous désignerons, avec M. Lamé, ces axes des coordonnées par les noms d'axes des s, des s_1, des s_2, relatifs au point M, les surfaces considérées étant dès lors les surfaces des $s_1 s_2$, des ss_2, des ss_1, relatives au même point; enfin, je représenterai les rayons de courbure des surfaces coordonnées par (γ_1, c_2), (γ_2, c), (γ, c_1), l'indice étant toujours celui de la coordonnée tangente à la section principale correspondante, et le signe qui accompagne les rayons de courbure étant $+$ ou $-$, selon que le centre de courbure de la section principale est ou non du côté des coordonnées positives.

Ceci posé, on aura d'abord les neuf formules de M. Lamé :

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d\frac{1}{c}}{ds_2} = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{\gamma_2}\right), &\qquad& \frac{d\frac{1}{\gamma}}{ds_1} = \frac{1}{c}\left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{c_1}\right),\\
&\frac{d\frac{1}{c_1}}{ds} = \frac{1}{\gamma_1}\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{\gamma}\right), && \frac{d\frac{1}{\gamma_1}}{ds_2} = \frac{1}{c_1}\left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{c_2}\right),\\
&\frac{d\frac{1}{c_2}}{ds_1} = \frac{1}{\gamma_2}\left(\frac{1}{c_2} - \frac{1}{\gamma_1}\right), && \frac{d\frac{1}{\gamma_2}}{ds} = \frac{1}{c_2}\left(\frac{1}{\gamma_2} - \frac{1}{c}\right):
\end{aligned}\right.$$

$$(b)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d\frac{1}{c}}{ds_1} + \frac{d\frac{1}{\gamma_1}}{ds} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{\gamma_1^2} + \frac{1}{\gamma c_1},\\
&\frac{d\frac{1}{c_1}}{ds_2} + \frac{d\frac{1}{\gamma_2}}{ds_1} = \frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{\gamma_2^2} + \frac{1}{\gamma_1 c_2},\\
&\frac{d\frac{1}{c_2}}{ds} + \frac{d\frac{1}{\gamma}}{ds_2} = \frac{1}{c_2^2} + \frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\gamma_2 c};
\end{aligned}\right.$$

qui expriment que les surfaces considérées sont orthogonales; puis les suivantes dues à M. Bertrand :

$$(c)\qquad \frac{\gamma}{c_1} + \frac{c}{\gamma_2} = 1, \qquad \frac{\gamma_1}{c_2} + \frac{c_1}{\gamma} = 1, \qquad \frac{\gamma_2}{c} + \frac{c_2}{\gamma_1} = 1,$$

dont deux seulement sont distinctes, et qui donnent aisément

$$(d)\qquad cc_1c_2 + \gamma\gamma_1\gamma_2 = 0,$$

en même temps qu'elles permettent de transformer les relations (a) comme il suit :

$$(e)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d\frac{1}{c}}{ds_2} = \frac{1}{cc_1}, &\qquad& \frac{d\frac{1}{\gamma}}{ds_1} = \frac{1}{\gamma\gamma_2},\\
&\frac{d\frac{1}{c_1}}{ds} = \frac{1}{c_1c_2}, && \frac{d\frac{1}{\gamma_1}}{ds_2} = \frac{1}{\gamma_1\gamma},\\
&\frac{d\frac{1}{c_2}}{ds_1} = \frac{1}{c_2c}, && \frac{d\frac{1}{\gamma_2}}{ds} = \frac{1}{\gamma_2\gamma_1};
\end{aligned}\right.$$

enfin, celles-ci, que j'ai données dans mon premier Mémoire,

$$(f)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{d\frac{1}{c}}{ds}=\frac{3}{c\gamma_1}, &\qquad &\frac{d\frac{1}{\gamma}}{ds}=\frac{3}{\gamma c_2},\\
&\frac{d\frac{1}{c_1}}{ds_1}=\frac{3}{c_1\gamma_2}, &\qquad &\frac{d\frac{1}{\gamma_1}}{ds_1}=\frac{3}{\gamma_1 c},\\
&\frac{d\frac{1}{c_2}}{ds_2}=\frac{3}{c_2\gamma}, &\qquad &\frac{d\frac{1}{\gamma_2}}{ds_2}=\frac{3}{\gamma_2 c_1};
\end{aligned}\right.$$

$$(g)\quad\left\{\begin{aligned}
&\gamma_1\frac{d\frac{1}{\gamma_1}}{ds}-c_2\frac{d\frac{1}{c_2}}{ds}=-\frac{2\gamma_2}{c\,c_2}=\frac{2}{\gamma_1}-\frac{2}{c_2},\\
&\gamma_2\frac{d\frac{1}{\gamma_2}}{ds_1}-c\,\frac{d\frac{1}{c}}{ds_1}=-\frac{2\gamma}{c_1 c}=\frac{2}{\gamma_2}-\frac{2}{c},\\
&\gamma\,\frac{d\frac{1}{\gamma}}{ds_2}-c_1\frac{d\frac{1}{c_1}}{ds_2}=-\frac{2\gamma_1}{c_2\,c_1}=\frac{2}{\gamma}-\frac{2}{c_1}.
\end{aligned}\right.$$

On déduit immédiatement de ces différentes formules plusieurs conséquences importantes; d'abord les formules (c) et (d) montrent que, parmi les trois surfaces passant par un même point de l'espace, il y en a deux pour lesquelles les rayons de courbure principaux sont de même signe, et une pour laquelle ces rayons ont des signes contraires. En effet, il est impossible que, pour deux de ces surfaces, les rayons de courbure principaux soient de signes contraires; car si, par exemple, γ et c_1 étaient de signes contraires en même temps que γ_2 et c, le premier membre de la première des relations (c) serait négatif, tandis que le second est positif; en second lieu, les trois surfaces ne peuvent avoir leurs rayons de courbure principaux de même signe, car la relation (d), qui peut s'écrire ainsi

$$\frac{c}{\gamma_2}\cdot\frac{c_1}{\gamma}\cdot\frac{c_2}{\gamma_1}+1=0,$$

aurait alors son premier membre positif; ainsi il faut nécessairement que deux des trois surfaces passant au point M aient leurs rayons de courbure principaux de même signe et que la troisième les ait de signes contraires. Cette première propriété permet de distinguer une des surfaces des deux autres; tâchons maintenant d'établir de même une distinction entre les deux surfaces qui ont leurs rayons de courbure principaux de même signe. Supposons que ces surfaces soient la surface des $s_1 s_2$ et celle des ss_1, et formons pour la première surface les deux expressions

$$(h) \qquad \frac{d\frac{1}{c_2}}{ds} - \frac{2}{c_2^2} + \frac{1}{\gamma^2} + \frac{\gamma_1}{c_2}\frac{1}{c^2}, \quad \frac{d\frac{1}{\gamma_1}}{ds} - \frac{2}{\gamma_1^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{c_2}{\gamma_1}\frac{1}{\gamma^2},$$

qui, d'après les formules (g), ne diffèrent que par le facteur $\frac{c_2}{\gamma_1}$, et sont, par conséquent, de même signe; puis, pour la seconde surface, les deux expressions analogues,

$$(k) \qquad \frac{d\frac{1}{\gamma}}{ds_2} - \frac{2}{\gamma^2} + \frac{1}{c_2^2} + \frac{c_1}{\gamma}\frac{1}{\gamma_2^2}, \quad \frac{d\frac{1}{c_1}}{ds_2} - \frac{2}{c_1^2} + \frac{1}{\gamma_2^2} + \frac{\gamma}{c_1}\frac{1}{c_2^2}.$$

Si nous ajoutons la première des expressions (h) à la première des expressions (k), il viendra, en se rappelant la dernière des relations (b), et puis les relations (d) et (c),

$$\frac{1}{\gamma_2 c} + \frac{\gamma_1}{c_2}\frac{1}{c^2} + \frac{c_1}{\gamma}\frac{1}{\gamma_2^2} = \frac{1}{\gamma_2 c} + \frac{\gamma\gamma_1\gamma_2^2 + c^2 c_1 c_2}{\gamma\gamma_2^2 c^2 c_2}$$
$$= \frac{1}{\gamma_2 c} + \frac{\gamma\gamma_1\gamma_2(\gamma_2 - c)}{\gamma\gamma_2^2 c^2 c_2} = \frac{1}{\gamma_2 c}\left[1 + \frac{\gamma_1}{c_2}\left(\frac{\gamma_2}{c} - 1\right)\right] = 0.$$

Cela montre qu'en excluant d'abord le cas où ces expressions seraient nulles, les expressions (h) et les expressions (k) ont des signes contraires; aussi les deux surfaces qui ont leurs rayons de courbure principaux de même signe peuvent aussi être distinguées l'une de l'autre.

Dans ce qui va suivre, nous supposerons toujours que les surfaces des $s_1 s_2$ et des ss_1 soient celles pour lesquelles les rayons de courbure principaux sont de même signe, et que la surface des $s_1 s_2$ soit telle, que les deux expressions (h) aient le même signe $+$; de plus, nous fixerons la partie positive de l'axe des s, de façon que les rayons de courbure c_2, γ_1 de la surface des $s_1 s_2$ soient négatifs, et la partie positive de l'axe des s_1, de manière que le rayon de courbure γ_2 de la surface des ss_2 soit aussi négatif, le rayon de courbure c conjugué en surface étant dès lors positif; quant à la partie positive de l'axe des s_2, elle se trouvera déterminée par cela même, car il faut qu'en se plaçant suivant la partie positive de l'axe des s, les pieds sur la surface des $s_1 s_2$, on ait la partie positive de l'axe des s_2 à gauche et la partie positive de l'axe des s_1 à droite.

Prenons maintenant le système particulier de surfaces isothermes et orthogonales, composé d'ellipsoïdes et d'hyperboloïdes à une et à deux nappes de même centre et de mêmes foyers, que j'appellerai le système (A'). Considérons les trois surfaces de ce système qui passent par un point quelconque M' de l'espace. Les trois lignes d'intersection de ces surfaces formeront trois axes courbes de coordonnées dont le point M' sera l'origine; nous désignerons ces axes par les noms d'axes des s', des s'_1, des s'_2 relatifs au point M', les surfaces considérées étant dès lors les surfaces des $s'_1 s'_2$, des $s'_2 s'$ et des $s' s'_1$ relatives au même point: enfin, je représenterai les rayons de courbure des surfaces coordonnées par (γ'_1, c'_2), (γ'_2, c'), (γ', c'_1), l'indice étant toujours celui de la coordonnée tangente à la section principale correspondante, et le signe qui accompagne les rayons de courbure étant + ou −, selon que le centre de courbure de la section principale est ou non du côté des coordonnées positives.

D'abord nous aurons, entre les rayons de courbure (γ'_1, c'_2), (γ'_2, c'), (γ', c'_1) et leurs variations, des formules analogues aux formules (a), (b), (c), (d), (e), (f), (g) et qui se déduiront simplement de ces dernières en donnant un accent aux lettres c, c_1, c_2, γ, γ_1, γ_2, s, s_1, s_2; nous appellerons ces nouvelles relations les égalités (a'), (b'), (c'), (d'), (e'), (f'), (g'); en second lieu, si nous supposons que la surface des $s'_1 s'_2$ soit un ellipsoïde, la surface des $s' s'_1$ un hyperboloïde à deux nappes, et la surface des $s' s'_2$ un hyperboloïde à une nappe, les deux rayons de courbure principaux γ'_1, c'_2 seront de même signe, de même que γ' et c'_1, et les deux autres γ'_2, c' de ces rayons de courbure auront des signes contraires; on pourra donc fixer la partie positive de l'axe des s' et celle des s'_1 (ce qui déterminera aussi la partie positive de l'axe des s'_2), de façon que γ'_1, c'_1, γ'_2 soient négatifs. Cela étant, je dis que les deux expressions

$$\frac{d\frac{1}{c'_2}}{ds'} - \frac{2}{c'^2_2} + \frac{1}{\gamma'^2} + \frac{\gamma'_1}{c'_2}\frac{1}{c'^2}, \quad \frac{d\frac{1}{\gamma'_1}}{ds'} - \frac{2}{\gamma'^2_1} + \frac{1}{c'^2} + \frac{c'_2}{\gamma'_1}\frac{1}{\gamma'^2},$$

seront positives et que l'on poura déterminer les éléments [*] qui

---

[*] Ces éléments, au nombre de cinq, sont, par exemple, les distances focales de

fixent la grandeur des surfaces du système (A′) passent par le point M′ de façon que l'on ait les cinq relations

$$\gamma_1 = \gamma'_1, \quad c_2 = c'_2, \quad \gamma_2 = \gamma'_2, \quad c_1 = c'_1, \quad \frac{d\frac{1}{c_2}}{ds} = \frac{d\frac{1}{c'_2}}{ds'},$$

pour les points M et M′.

Pour le faire voir, il est d'abord nécessaire d'obtenir l'expression des différentes quantités $c'_2, \gamma'_1, \gamma'_2, c'_1, \frac{d\frac{1}{c'_2}}{ds'}$.

Rapportons la surface des $s'_1 s'_2$ relative au point M′ à trois axes rectilignes rectangulaires, et supposons que les parties positives M′X, M′Y, M′Z de ces axes soient respectivement les tangentes au point M′ des axes des s', s'_1, s'_2 relatifs à ce point, ces tangentes étant d'ailleurs dirigées dans le sens positif des coordonnées courbes s', s'_1, s'_2. L'équation de la surface sera

$$(1) \qquad z = \frac{a}{2}x^2 + \frac{a'}{2}y^2 + \frac{a''}{2}z^2 + b'xz + byz,$$

car il faut que, pour $x = 0$, $y = 0$, on ait

$$z = 0, \quad \frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{dz}{dy} = 0, \quad \frac{d^2z}{dx\,dy} = 0,$$

puisque le plan des xy est le plan tangent à l'origine et que les plans des zx et des zy sont les plans des sections principales au même point. Dans l'équation (1) les coefficients a et a' sont égaux évidemment aux valeurs que prennent pour $x = 0$, $y = 0$ les dérivées secondes $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$, et, par conséquent, représentent les inverses des rayons de courbure c'_2 et γ'_1; quant aux autres coefficients b, b', a'', je dis qu'ils s'expriment facilement en fonction des rayons de courbure γ'_2, c'_1, et de la variation $\frac{d\frac{1}{c'_2}}{ds'}$. Prenons, en effet, l'équation générale

$$\frac{dy^2}{dx^2}[(1+q^2)s - pqt] + \frac{dy}{dx}[(1-q^2)r - (1+p^2)t] - [(1+p^2)s - pqr] = 0$$

---

ceux des sections principales des surfaces et les axes majeurs de ces mêmes surfaces.

de la projection sur le plan des xy des lignes de courbure de la surface (1), p, q, r, s, t ayant la signification ordinaire; différentions cette équation par rapport à x, en nous rappelant que z doit être remplacé par sa valeur déduite de l'équation (1), et dans le résultat faisons $x = 0$, $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$, ce qui exprime qu'il s'agit de la ligne de courbure tangente à M′X et du point M′ de cette ligne, il viendra simplement

$$\frac{d^2y}{dx^2}(r - t) = \frac{ds}{dx};$$

mais, par l'équation (1), on voit aisément que la valeur de $\frac{ds}{dx}$ pour $x = 0$, $y = 0$ est égale à $a.b$, donc

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a.b}{a - a'};$$

d'ailleurs, puisque $\frac{dy}{dx}$ est nul au point M′, $\frac{d^2y}{dx^2}$ représente pour ce point l'inverse du rayon de courbure de la projection sur le plan des xy de la ligne de courbure, et, par conséquent, l'inverse du rayon de courbure de la section normale déterminée dans la surface des $s's'_2$ par le plan des xy; ainsi

$$\frac{1}{\gamma_2} = \frac{a.b}{a - a'}.$$

On trouverait de même

$$\frac{1}{c_1} = \frac{a'.b'}{a' - a}.$$

Ce qui montre déjà que b et b' s'expriment aisément en fonction de γ_2, c_1 et de a et a' ou c_2 et γ_1. Occupons-nous maintenant de a''.

Considérons un ellipsoïde infiniment voisin de l'ellipsoïde (1) et ayant les mêmes foyers que lui; soit

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} z = {} & \left(\frac{a}{2} + \alpha m\right) x^2 + \left(\frac{a'}{2} + \alpha' m\right) y^2 + \left(\frac{a''}{2} + \alpha'' m\right) z^2 \\ & + \beta'' mxy + (b' + \beta' m) xz + (b + \beta m) yz + \varepsilon mx + \varepsilon' my - m, \end{aligned} \right.$$

où m représente un paramètre infiniment petit, l'équation de cette surface, et tâchons d'abord de déterminer les valeurs des constantes α, α', α'', β, β', β'', ε, ε'. Pour cela, prenons en même temps que les deux surfaces (1) et (2) un nouvel ellipsoïde infiniment voisin de l'ellipsoïde (1) et homothétique avec lui, dont l'équation aura la forme

$$z = \frac{a}{2}x^2 + \frac{a'}{2}y^2 + \frac{a''}{2}z^2 + b'xz + byz + m',$$

m' représentant une constante infiniment petite. La distance des deux surfaces (1) et (2) sera, pour un point quelconque, d'après une formule connue, égale à

$$\frac{(\alpha x^2 + \alpha' y^2 + \alpha'' z^2 + \beta'' xy + \beta' xy + \beta yz + \varepsilon x + \varepsilon' y + 1)\, m}{\pm\sqrt{(ax + b'z)^2 + (a'y + bz)^2 + (a''z + b'x + by - 1)^2}},$$

et, par conséquent, pour le point M' égale à $\pm m$; de même la distance des surfaces (1) et (3) sera, pour un point quelconque, égale à

$$\frac{m'}{\pm\sqrt{(ax + b'z)^2 + (a'y + bz)^2 + (a''z + b'x + by - 1)^2}},$$

et, par conséquent, pour le point M' égale à $\pm m'$; or on sait, d'après une propriété bien connue dans la théorie de l'attraction, que le produit des deux distances précédentes doit être le même pour tous les points de l'ellipsoïde (1), cela exige évidemment que l'on ait, pour tous les points de cette surface,

$$\begin{aligned}&\alpha x^2 + \alpha' y^2 + \alpha'' z^2 + \beta'' xy + \beta' xz + \beta yz + \varepsilon x + \varepsilon' y + 1\\ &= (ax + b'z)^2 + (a'y + bz)^2 + (a''z + b'x + by - 1)^2,\end{aligned}$$

c'est-à-dire que cette dernière équation coïncide avec l'équation (1), d'où l'on déduit aisément

$$\begin{aligned}&\alpha = a^2 + b'^2 - aa'', &&\alpha' = a'^2 + b^2 - a'a'', &&\alpha'' = b^2 + b'^2,\\ &\beta'' = 2bb', &&\beta' = 2ab', &&\beta = 2a'b,\\ &\varepsilon = -2b', &&\varepsilon' = -2b.\end{aligned}$$

Reprenons maintenant la surface représentée par l'équation (2), et cherchons ses rayons de courbure principaux au point où elle est rencontrée par l'axe des z, c'est-à-dire au point dont les coordonnées sont $x = 0$, $y = 0$, $z = m$. D'abord, par la forme même de l'équation (2), on reconnaît que les valeurs de $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$, $\frac{d^2z}{dx\,dy} = s$, déduites de cette équation, sont infiniment petites du premier ordre par rapport à m, au point considéré; de telle sorte qu'en négligeant le carré de ce paramètre, l'équation générale

$$\mathrm{R}^2(rt - s^2) - \mathrm{R}\sqrt{1+p^2+q^2}\,[(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t] + (1+p^2+q^2)^2 = 0,$$

au moyen de laquelle on détermine les rayons de courbure principaux pour un point quelconque, se réduit à

$$\mathrm{R}^2 rt - \mathrm{R}(r+t) + 1 = 0,$$

dans le cas particulier considéré, et donne, par conséquent, pour les rayons de courbure demandés,

$$\mathrm{R}' = \frac{1}{r}, \quad \mathrm{R}'' = \frac{1}{t}.$$

On voit par là que tout est ramené à calculer les valeurs de $\frac{d^2 z}{dx^2}$ et de $\frac{d^2 z}{dy^2}$, déduites de l'équation (2), pour $x = 0$, $y = 0$, $z = m$. Or, différentiant deux fois par rapport à x, faisant $x = 0, y = 0, z = m$, et négligeant les infiniment petits du second ordre, on trouve sans difficulté

$$r = \frac{a + 2(b'^2 + b'\varepsilon + \alpha)m}{1 - a''m} = a + (aa'' + 2b'^2 + 2b'\varepsilon + 2\alpha)m,$$

ou, en substituant à α et ε leurs valeurs trouvées ci-dessus,

$$r = a + (2a^2 - aa'')m;$$

on trouverait de même

$$t = a' + (2a'^2 - a'a'')m,$$

de telle sorte qu'en reprenant les notations employées plus haut, nous avons

$$\frac{d\frac{1}{c'_2}}{ds} = 2a^2 - aa'', \quad \frac{d\frac{1}{\gamma'_1}}{ds} = 2a'^2 - a'a''.$$

Ainsi a'' peut se déduire de $\frac{d\frac{1}{c'_2}}{ds}$ et de $a = \frac{1}{c'_2}$, ou bien de $\frac{d\frac{1}{\gamma'_1}}{ds}$ et de $a' = \frac{1}{\gamma'_1}$.

Maintenant que nous connaissons a, a', a'', b, b' en fonction de c'_2, γ'_2, c'_1, γ'_1, $\frac{d\frac{1}{c'_2}}{ds'}$, il est bien facile de démontrer, comme cela a été énoncé ci-dessus, que l'expression

$$(h') \qquad \frac{d\frac{1}{c'_2}}{ds'} - \frac{2}{c'^2_2} + \frac{1}{\gamma'^2} + \frac{\gamma'_1}{c'_2}\frac{1}{c'^2},$$

et, par suite, l'expression

$$\frac{d\frac{1}{\gamma'_1}}{ds'} - \frac{2}{\gamma'^2_1} + \frac{1}{c'^2} + \frac{c'_2}{\gamma'_1}\frac{1}{\gamma'^2},$$

sont positives, et qu'il est possible de déterminer l'ellipsoïde représenté par l'équation (1) de façon que c'_2, γ'_2, c'_1, γ'_1, $\frac{d\frac{1}{c'_2}}{ds'}$ soient égaux respectivement à c_2, γ_2, c_1, γ_1, $\frac{d\frac{1}{c_2}}{ds}$.

En effet, exprimons que l'équation (1) représente un ellipsoïde, il faudra pour cela écrire d'abord que la surface à un centre, c'est-à-dire que l'on a

$$aa'a'' - a'b'^2 - ab^2 \lessgtr 0.$$

Or, en remarquant que

$$a = \frac{1}{c'_2}, \quad a' = \frac{1}{\gamma'_1},$$

puis, que

$$b = \frac{1}{\gamma_2}\left(1 - \frac{a'}{a}\right) = \frac{1}{\gamma'_2}\left(1 - \frac{c'_2}{\gamma'_1}\right), \quad b' = \frac{1}{c_1}\left(1 - \frac{a}{a'}\right) = \frac{1}{c_1}\left(1 - \frac{\gamma'_1}{c'_2}\right),$$

c'est-à-dire, d'après les relations (c'),

$$b = \frac{1}{c'}, \quad b' = \frac{1}{\gamma'},$$

enfin, que

$$aa'' = 2a^2 - \frac{d\frac{1}{c'_2}}{ds'} = \frac{2}{c'^2_2} - \frac{d\frac{1}{c'_2}}{ds'}.$$

Cette relation revient à

$$\frac{2}{\gamma'_1 c'^2_2} - \frac{1}{\gamma'_1} \frac{d\frac{1}{c'_2}}{ds'} - \frac{1}{\gamma'_1 \gamma'^2} - \frac{1}{c'_2 c'^2} \lessgtr 0.$$

Aussi nous pouvons déjà conclure que l'expression (h') est différente de zéro; en second lieu, si nous rapportons la surface représentée par l'équation (1) à son centre, ce qui change cette équation en

$$\frac{a}{2} x^2 + \frac{a'}{2} y^2 + \frac{a''}{2} z^2 + b' xz + byz = \frac{-aa'}{2(aa'a'' - ab^2 - a'b'^2)},$$

il faudra (*voir*, par exemple, la *Géométrie à trois dimensions* de M. Leroy, page 156), pour que cette surface soit un ellipsoïde, que l'équation

$$(s - a)(s - a')(s - a'') - b^2(s - a) - b'^2(s - a') = 0$$

ait ses trois racines de même signe que le second membre

$$\frac{-aa'}{2(aa'a'' - ab^2 - a'b'^2)}.$$

Or l'équation en s ayant une racine comprise entre a' et a, comme on le voit aisément, et, par conséquent, négative, d'après les hypothèses faites sur les signes de c'_2 et de γ'_1, cela ne peut être qu'autant que

$$\frac{-aa'}{2(aa'a'' - ab^2 - a'b'^2)}$$

est aussi négatif, par conséquent, qu'autant que

$$aa'a'' - ab^2 - a'b'^2$$

est positif, ou bien, en se rappelant la valeur de cette expression et le signe de γ'_1, qu'autant que

$$\frac{d\frac{1}{c'_2}}{ds'} - \frac{2}{c'^2_1} + \frac{1}{\gamma'^2} + \frac{\gamma'_1}{c'_1} \frac{1}{c'^2}$$

est positif; d'ailleurs cette condition, qui est nécessaire, est aussi suffisante si $aa'a'' - ab^2 - a'b'^2$ est positif; la substitution à la place de s dans l'équation en s des différentes valeurs $-\infty$, a', a, 0, donne successivement les signes $-$, $+$, $-$, $+$, ce qui prouve que cette équation a ses trois racines négatives. De tout ce qui précède résulte que l'équation (1) ne peut représenter un ellipsoïde qu'autant que a, a', a'', b, b' sont tels, que

$$\frac{d\frac{1}{c'_2}}{ds'} - \frac{2}{c'^2_1} + \frac{1}{\gamma'^2} + \frac{\gamma'_1}{c'_1}\frac{1}{c'^2}$$

soit positif, mais qu'une fois cette condition remplie, on peut prendre arbitrairement a, a', a'', b, b', et, par conséquent, de telle sorte, que l'on ait

$$c'_2 = c_2, \quad \gamma'_1 = \gamma_1, \quad \gamma'_2 = \gamma_2, \quad c'_1 = c_1, \quad \frac{d\frac{1}{c'_2}}{ds'} = \frac{d\frac{1}{c_2}}{ds}.$$

Je dis maintenant que, par cela même que l'on a pour les points M et M' les relations précédentes, les surfaces des $s_1 s_2$, des $s_2 s$, des $s s_1$, relatives au point M, coïncident respectivement avec les surfaces des $s'_1 s'_2$, des $s'_2 s'$, des $s' s'_1$, relatives au point M'. En effet, à cause des relations (c) et (c'), les six rayons de courbure c, c_1, c_2, γ, γ_1, γ_2 seront égaux aux six rayons de courbure c', c'_1, c'_2, γ', γ'_1, γ'_2 pour les points M et M'; puis, à cause des relations (e) et (e'), (f) et (f'), (g), (a) et (g'), (a'), les dix-huit accroissements des rayons de courbure c, c_1, c_2, γ, γ_1, γ_2, correspondants à des déplacements infiniment petits effectués sur les axes des s, s_1, s_2, relatifs au point M, seront égaux respectivement aux dix-huit accroissements des rayons de courbure c', c'_1, c'_2, γ', γ'_1, γ'_2, dus à des déplacements égaux effectués sur les axes des s', s'_1, s'_2, relatifs au point M'. Cela montre que si l'on prend successivement, à partir du point M sur les axes des s, s_1, s_2 relatifs à ce point, des longueurs infiniment petites Mm, Mm_1, Mm_2, et, à partir du point M' sur les axes des s', s'_1, s'_2 relatifs à ce point, des longueurs M'm', M'm'_1, M'm'_2 respectivement égales, les six rayons de courbure c, c_1, c_2, γ, γ_1, γ_2 seront égaux aux six rayons de courbure c', c'_1, c'_2, γ', γ'_1, γ'_2 pour les points m et m', m_1 et m'_1, m_2 et m'_2. D'un autre côté, les variations $\frac{d\gamma_1}{ds_1}$, $\frac{d\gamma'_1}{ds'_1}$ ne dépendent respectivement, d'après les relations (e) et (e'), que de γ_1, c, γ'_1, c'. On peut donc conclure que ces variations sont égales quand elles se rapportent aux points m et m'.

Or, si μ est le point où l'axe des s relatif au point m_1 rencontre l'axe des s_2 relatif au point m, et μ' le point où l'axe des s' relatif au point m'_1 rencontre l'axe des s'_1 relatif au point m', il est facile de voir que l'on a

$$m\mu = m'\mu' \qquad \text{et} \qquad m_1\mu = m'_1\mu',$$

car

$$m\mu = \mathrm{M}m + \frac{\mathrm{M}m.\mathrm{M}m_1}{\gamma_1}, \quad m'\mu' = \mathrm{M}'m'_1 + \frac{\mathrm{M}'m'.\mathrm{M}'m'_1}{\gamma'},$$

$$m_1\mu = \mathrm{M}m + \frac{\mathrm{M}m.\mathrm{M}m_1}{c}, \quad m'_1\mu' = \mathrm{M}'m' + \frac{\mathrm{M}'m'.\mathrm{M}'m'_1}{c'}.$$

Cela montre que le rayon de courbure γ_1 pour le point μ est égal au rayon de courbure γ'_1 pour le point μ', d'où résulte que la variation $\frac{d\gamma_1}{ds}$ pour le point m_1 est égale à la variation $\frac{d\gamma'_1}{ds'}$ pour le point m'_1. Cela étant, on a aux points m_1 et m'_1 les mêmes relations entre les rayons de courbure c, c_1, c_2, γ, γ_1, γ_2, c', c'_1, c'_2, γ', γ'_1, γ'_2 qu'on avait primitivement aux points M et M', c'est-à-dire

$$c = c', \quad c_1 = c'_1, \quad c_2 = c'_2, \quad \gamma = \gamma', \quad \gamma_1 = \gamma'_1, \quad \gamma_2 = \gamma'_2, \quad \frac{d\gamma_1}{ds} = \frac{d\gamma'_1}{ds'},$$

et l'on peut conclure que si, sur les axes des s, s_1, s_2 relatifs au point m_1, on prend successivement trois longueurs infiniment petites m_1n, m_1n_1, m_1n_2; puis, sur les axes des s', s'_1, s'_2 relatifs au point m'_1, des longueurs m'_1n', $m'_1n'_1$, $m'_1n'_2$ respectivement égales, les six rayons de courbure c, c_1, c_2, γ, γ_1, γ_2 seront les mêmes que les six rayons de courbure c', c'_1, c'_2, γ', γ'_1, γ'_2 pour les points n et n', n_1 et n'_1, n_2 et n'_2. On verrait de même qu'en prenant sur les axes des s, s_1, s_2 relatifs au point n_1 des longueurs infiniment petites n_1p, n_1p_1, n_1p_2, et sur les axes des s', s'_1, s'_2 relatifs au point n'_1 des longueurs respectivement égales n'_1p', $n'_1p'_1$, $n'_1p'_2$, les six rayons de courbure c, c_1, c_2, γ, γ_1, γ_2 sont égaux aux six rayons de courbure c', c'_1, c'_2, γ', γ'_1, γ'_2 pour les points p et p', p_1 et p'_1, p_2 et p'_2, et ainsi de suite; de telle sorte qu'on peut conclure généralement que les six rayons de courbure c, c_1, c_2, γ, γ_1, γ_2 sont égaux aux six rayons de courbure c', c'_1, c'_2, γ', γ'_1, γ'_2 pour deux points quelconques N et N' situés, l'un sur l'axe des s_1 relatif au point M, l'autre sur l'axe des s'_1 relatif au point M', et tels, que l'arc MN = l'arc M'N'. Ceci démontré, je dis que l'axe des s_1 relatif au point M et l'axe des s'_1 relatif au point M' sont superposables. En effet, soient, comme tout à l'heure, sur la première ligne, une suite de longueurs infiniment petites Mm_1, m_1n_1, n_1p_1,..., et sur la seconde, des éléments égaux $M'm'_1$, $m'_1n'_1$, $n'_1p'_1$,.... Appelons r le rayon de courbure au point M de la ligne $Mm_1n_1p_1$..., et α l'angle que ce rayon de courbure fait avec la tangente au point M de l'axe des s relatif à ce point; on aura, d'après le théorème de Meunier,

$$\frac{r}{\cos\alpha} = \gamma_1, \qquad \frac{r}{\sin\alpha} = c_1,$$

γ_1, c_1 se rapportant au point M; de même, on a

$$\frac{r'}{\cos\alpha'} = \gamma'_1, \qquad \frac{r'}{\sin\alpha'} = c'_1,$$

γ'_1 et c'_1 se rapportant au point M', r' étant le rayon de courbure de la ligne $M'm'_1n'_1p'_1$... au point M', et α' l'angle de ce rayon de courbure avec la tangente au point M' de l'axe des s' relatif à ce point. De là on conclut, à cause de $\gamma_1 = \gamma'_1$, $c_1 = c'_1$,

$$r = r' \quad \text{et} \quad \alpha = \alpha'.$$

On voit par là que si l'on fait coïncider l'élément $M'm'_1$ avec l'élément Mm_1, et la tangente au point M de l'axe des s relatif à ce point avec la tangente au point M' de l'axe des s' relatif à ce point, l'élément $m'_1n'_1$ coïncidera avec l'élément m_1n_1; mais en appelant r_1 le rayon de courbure de $Mm_1n_1p_1$... au point m_1 et α_1 l'angle de ce rayon de courbure avec la tangente au point m_1 de l'axe des s relatif à ce point, puis r'_1 le rayon de courbure de $M'm'_1n'_1p'_1$... au point m'_1, et α'_1 l'angle de ce rayon de courbure avec la tangente au point m'_1 de l'axe des s' relatif à ce point, on démontrerait de même que $r_1 = r'_1$, $\alpha_1 = \alpha'_1$. Donc, par cela même que les deux éléments $m'_1n'_1$, m_1n_1 coïncident, il en sera de même des éléments suivants $n'_1p'_1$, n_1p_1, puisque d'ailleurs l'axe des s relatif au point m_1 et l'axe des s' relatif au point m'_1 coïncident évidemment; ainsi de suite pour tous les éléments. Ainsi les deux lignes $Mm_1n_1p_1$..., $M'm'_1n'_1p'_1$... peuvent coïncider. La conséquence précédente se déduisant uniquement de ce que l'on a pour les points M et M' les relations

$$c = c', \quad c_1 = c'_1, \quad c_2 = c'_2, \quad \gamma = \gamma', \quad \gamma_1 = \gamma'_1 \quad \gamma_2 = \gamma'_2 \quad \frac{d\gamma_1}{ds} = \frac{d\gamma'_1}{ds},$$

et ces relations étant évidemment satisfaites pour les points m_2 et m'_2, et de même pour tous les couples de points respectivement situés sur l'axe des s_2 relatif au point M et l'axe des s'_2 relatif au point M', à égale distance de M et M', on voit sans peine que les différentes lignes de courbure d'un même système de la surface des $s_1 s_2$ relative au point M, coïncident respectivement avec celles de la surface des $s'_1 s'_2$ relative au point M', par conséquent, ces deux surfaces sont égales. On démontrerait de même successivement l'égalité des surfaces des $s s_1$ et des $s' s'_1$ et celle des surfaces des $s s_2$ et des $s' s'_2$. Donc les différentes surfaces du système (A) coïncident avec celles du système (A') et sont, par conséquent, des ellipsoïdes et des hyperboloïdes à une et à deux nappes, de même centre et de mêmes foyers.

Nous avons écarté, dès le début, le cas où l'on aurait

$$\frac{d\frac{1}{\gamma_1}}{ds} - \frac{2}{\gamma_1^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{c_2}{\gamma_1}\frac{1}{\gamma^2} = 0.$$

Si cette relation avait lieu et que, par conséquent, la variation $\frac{d\gamma_1}{ds}$ pût être déterminée en fonction des rayons de courbure $c, c_1, c_2, \gamma, \gamma_1, \gamma_2$ seulement, il faudrait prendre pour le système (A') le système triplement orthogonal et isotherme formé par des paraboloïdes de mêmes foyers; l'on aurait aussi

$$\frac{d\frac{1}{\gamma'_1}}{ds'} - \frac{2}{\gamma'^2_1} + \frac{1}{c'^2} + \frac{c'_2}{\gamma'_1}\frac{1}{\gamma'^2} = 0.$$

Comme on le voit, en exprimant, par la marche indiquée plus haut, que le paraboloïde qui sert de surface des $s'_1 s'_2$ n'a pas de centre, et alors déterminant les quatre paramètres arbitraires qui fixent la grandeur des trois paraboloïdes passant par le point M', de façon que l'on eût

$$c_2 = c'_2, \quad \gamma_1 = \gamma'_1, \quad \gamma_2 = \gamma'_2, \quad c_1 = c'_1,$$

on aurait en même temps

$$\frac{d\frac{1}{\gamma_1}}{ds} = \frac{d\frac{1}{\gamma'_1}}{ds'},$$

et l'on prouverait alors, comme plus haut, que les surfaces du système (A) doivent coïncider avec les surfaces du système (A'), de manière que, dans ce cas, les surfaces du système (A) seraient des paraboloïdes de mêmes foyers.

Dans la démonstration précédente, on supposait nécessairement qu'aucun des rayons de courbure c, c_1, c_2, γ, γ_1, γ_2 ne pouvait être constamment infini; en effet, plusieurs des relations dont nous avons fait usage n'auraient aucun sens dans l'hypothèse contraire. Ainsi notre démonstration ne s'applique pas au cas où, parmi les surfaces orthogonales et isothermes, il s'en trouverait de développables. Or, on peut voir d'abord qu'une surface développable ne peut faire partie d'un système triple de surfaces orthogonales et isothermes, sans être un cône ou un cylindre; en effet, une pareille surface developpable doit pouvoir être divisée en carrés infiniment petits par ses lignes de courbure, c'est-à-dire par ses génératrices rectilignes et les trajectoires orthogonales de ces génératrices; appliquons la surface sur un plan, les carrés ne seront point altérés, il faudra donc que les trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes qui sont des développantes de l'arête de rebroussement de la surface deviennent des cercles ou des droites, et cela ne peut être évidemment que si la surface développable est ou un cône ou un cylindre.

On voit, par là, qu'indépendamment des systèmes de surfaces orthogonales et isothermes formés par les surfaces du second degré homofocales, il peut y avoir d'autres systèmes où il entre des cônes ou des cylindres, mais qu'il n'y a que des systèmes de cette espèce.

Je terminerai par une remarque qui, je crois, n'a pas été faite. On sait que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un système de cylindres à génératrices parallèles soient isothermes, est que les traces de ces cylindres sur un plan perpendiculaire aux génératrices et les trajectoires orthogonales de ces traces puissent découper leur plan commun en carrés infiniment petits; d'ailleurs tout système de cylindres isothermes fait nécessairement partie d'un système triple, orthogonal et isotherme. Il existe pour les cônes une condition analogue: pour que des cônes de même sommet soient isothermes, il faut et il suffit que leurs traces sur une sphère, ayant pour centre le sommet de ces cônes et les trajectoires orthogonales de ces traces, puissent découper la sphère en carrés infiniment petits, et tout système de cônes isothermes fait partie d'un système triple, orthogonal et isotherme.