JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

SARRUS

Note relative au Mémoire précédent

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 14 (1849), p. 131-134.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1849_1_14__131_0>

Note relative au Mémoire précédent; par M. Sarrus.

Le 25 mars 1849, j'ai adressé à l'Académie des Sciences une petite réclamation relative à un Mémoire de M. Bertrand sur les conditions d'intégrabilité des fonctions différentielles. Cette Lettre contenait en même temps une méthode que, depuis plusieurs années, je développe dans mes cours et dont même j'ai fait usage dans un Mémoire non encore publié, mais présenté depuis longtemps à l'Académie. Il me semble que ma méthode est plus complète que celle de M. Bertrand, et que, du moins, dans le cas de plusieurs variables, elle peut faire éviter bien des tentatives inutiles. Je crois donc devoir donner ici non ma méthode elle-même, mais ce que je regarde comme nécessaire pour compléter celle de M. Bertrand.

Conformément à la notation de M. Bertrand en supposant que y, z, etc., expriment des fonctions quelconques de x, je désignerai leurs dérivées successives par

$$y',\quad y'',\quad y''',\ldots,\quad y_m,\quad y_{m+1},\ldots;\quad z',\quad z'',\quad z''',\ldots,\quad z_m,\quad z_{m+1},\ldots.$$

Je supposerai, en outre, que

$$u = f(x, y', y'', \ldots, y_m;\ z, z', z'', \ldots, z_m, \ldots) \quad \text{et} \quad v = du;$$

dès lors, on aura identiquement

$$\begin{aligned}\frac{1}{dx}\cdot v = \frac{du}{dx} + \frac{du}{dy}y' + \frac{du}{dy'}y'' + \frac{du}{dy''}y''' + \ldots + \frac{du}{dy_m}y_{m+1}\\ + \frac{du}{dz}z' + \frac{du}{dz'}z'' + \frac{du}{dz''}z''' + \ldots + \frac{du}{dz_m}z_{m+1}\\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

et l'on en conclura que :

1°. Les plus hautes dérivées y_{m+1}, z_{m+1}, etc., des variables composantes ne peuvent entrer qu'à la première puissance dans une différentielle exacte;

2°. Les coefficients $\frac{du}{dy_m}$, $\frac{du}{dz_m}$, etc., de ces plus hautes dérivées ne doivent renfermer aucune des dérivées y_{m+1}, z_{m+1}, etc., elles doivent être tout au plus de même ordre que l'intégrale u, par rapport à chacune des variables composantes considérées séparément.

Cette dernière condition paraît avoir échappé à M. Bertrand; elle peut cependant servir à arrêter bien des tentatives infructueuses.

M. Bertrand ne parle pas des différentielles exactes d'un ordre plus élevé que le premier. Cependant, la même méthode peut servir à trouver immédiatement et sans intégration intermédiaire l'intégrale primitive d'une différentielle exacte d'un ordre quelconque. En effet :

Si w exprime une différentielle exacte $d^i u$ de l'ordre i, les termes de l'expression $\frac{v}{dx^i}$, qui doivent renfermer les plus hautes dérivées des variables composantes, seront

$$\frac{du}{dy_m} y_{m+i} + \frac{du}{dz_m} z_{m+i} + \dots$$

et l'on en conclura que :

A. Les plus hautes dérivées y_{m+i}, z_{m+i}, etc., des variables composantes, ne peuvent entrer qu'à la première puissance dans une différentielle exacte d'un ordre quelconque;

B. Les coefficients $\frac{du}{dy_m}$, $\frac{du}{dz_m}$, etc., de ces plus hautes dérivées doivent être tout au plus du même ordre que l'intégrale primitive u, par rapport à chacune des variables composantes considérées séparément.

Maintenant on pourra résoudre la question suivante :

« Étant donnée une fonction différentielle quelconque w, trouver
» 1° si elle est une différentielle exacte; 2° quel est l'ordre de cette
» différentielle; 3° enfin, quelle est son intégrale primitive. »

Pour cela :

1°. On commencera par voir si elle satisfait à la condition A; si, par cas, il en est ainsi,

2°. On écrira cette fonction sous la forme

$$w = L + dx^i (P y_{m+i} + Q z_{n+i} + \dots),$$

et l'on cherchera la plus grande valeur possible de i qui permet de satisfaire à la condition B. Après cela

3°. On cherchera des fonctions P_1, Q_1, R_1, etc., au moyen des intégrales partielles

$$P_1 = \int_0 P\, dy_m, \quad Q_1 = \int_0 Q\, dz_n, \dots,$$

ce qui donnera

$$P = \frac{dP_1}{dy_m}, \qquad Q = \frac{dQ_1}{dz_n}, \dots$$

4°. On calculera la différence $w - d^i (P_1 + Q_1 + \dots)$, ce qui donnera une nouvelle fonction w_1 d'un ordre moins élevé que w, par rapport à chacune des variables y, z, etc., et que l'on traitera de la même manière.

Si l'on parvient à épuiser ainsi tous les termes de la fonction w, on finira par la réduire à la forme

$$w = d^i u_1 + d^k u_2 + d^l u_3 + \ldots,$$

et, par suite, w sera une différentielle exacte d'un ordre égal au plus petit des nombres i, k, l, etc., et son intégrale primitive sera facile à exprimer au moyen des fonctions u_1, u_2, u_3, etc.

La démonstration du procédé est trop facile pour qu'il soit nécessaire de l'ajouter ici. Je crois même que, dans les applications, il est préférable de passer par les intégrales intermédiaires, du moins tant qu'on ne sait pas, à priori, que la fonction donnée est une différentielle exacte d'un ordre connu.