

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

DIGUET

Note de M. Diguët

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 13 (1848), p. 83-86.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1848_1_13_83_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Note de M. DIGUET.

Par un point A d'une surface, on mène différentes lignes géodésiques, telles que AM, sur lesquelles on prend une longueur constante infiniment petite $AM = s$. Le lieu des points M forme une courbe fermée infiniment petite, dont je vais calculer la longueur et l'aire.

Les équations différentielles de la ligne géodésique AM sont, comme on sait,

$$(1) \quad \frac{d^2x}{ds^2} + p \frac{d^2z}{ds^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{ds^2} + q \frac{d^2z}{ds^2} = 0.$$

Et si l'on développe en série les équations de cette courbe, en prenant l'arc pour variable indépendante, on aura

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \left(\frac{dx}{ds}\right)_0 s + \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_0 \frac{s^2}{2} + \left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_0 \frac{s^3}{6} + \dots, \\ y &= y_0 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_0 s + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)_0 \frac{s^2}{2} + \left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0 \frac{s^3}{6} + \dots, \\ z &= z_0 + \left(\frac{dz}{ds}\right)_0 s + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)_0 \frac{s^2}{2} + \dots \end{aligned}$$

L'équation de la surface donne

$$\begin{aligned} \frac{dz}{ds} &= p \frac{dx}{ds} + q \frac{dy}{ds}, \\ \frac{d^2z}{ds^2} &= p \frac{d^2x}{ds^2} + q \frac{d^2y}{ds^2} + r \frac{dx^2}{ds^2} + 2u \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} + t \frac{dy^2}{ds^2}; \end{aligned}$$

on trouve d'ailleurs, en différentiant les équations (1),

$$\begin{aligned} \frac{d^3x}{ds^3} + p \frac{d^3z}{ds^3} + \left(r \frac{dx}{ds} + u \frac{dy}{ds}\right) \frac{d^2z}{ds^2} &= 0, \\ \frac{d^3y}{ds^3} + q \frac{d^3z}{ds^3} + \left(u \frac{dx}{ds} + t \frac{dy}{ds}\right) \frac{d^2z}{ds^2} &= 0. \end{aligned}$$

Cela posé, je prends pour axes de coordonnées les tangentes aux sections normales principales et la normale au point A. J'appelle α l'angle que la tangente en A à la ligne AM fait avec l'axe des x .

J'aurai alors, à cause des équations précédentes et de ce choix de coordonnées,

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, & y_0 &= 0, & z_0 &= 0, \\ \left(\frac{dx}{ds}\right)_0 &= \cos \alpha, & \left(\frac{dy}{ds}\right)_0 &= \sin \alpha, & \left(\frac{dz}{ds}\right)_0 &= 0, \\ \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_0 &= 0, & \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)_0 &= 0, & \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)_0 &= r \cos^2 \alpha + t \sin^2 \alpha, \\ \left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_0 &= -r(r \cos^2 \alpha + t \sin^2 \alpha) \cos \alpha, \\ \left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0 &= -t(r \cos^2 \alpha + t \sin^2 \alpha) \sin \alpha. \end{aligned}$$

Les équations de la ligne AM deviennent donc

$$(2) \quad \begin{cases} x = s \cos \alpha - \frac{s^3}{6} r(r \cos^2 \alpha + t \sin^2 \alpha) \cos \alpha + \dots, \\ y = s \sin \alpha - \frac{s^3}{6} t(r \cos^2 \alpha + t \sin^2 \alpha) \sin \alpha + \dots, \\ z = \frac{s^2}{2} (r \cos^2 \alpha + t \sin^2 \alpha) + \dots \end{cases}$$

Si maintenant je suppose que s soit constant et égal à la longueur infiniment petite assignée précédemment, et que je regarde α comme variable indépendante, ces équations seront celles de la courbe infiniment petite demandée.

Soit σ la longueur de cette courbe, on aura

$$d\sigma = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Substituant les valeurs de dx , dy , dz tirées des équations (2), et faisant les réductions convenables, on trouve

$$d\sigma = d\alpha \cdot s \sqrt{1 - \frac{rts^2}{3} + \dots},$$

et en développant le radical d'après la formule du binôme,

$$d\sigma = d\alpha \cdot s \left(1 - \frac{rts^2}{6} + \dots\right),$$

d'où

$$\sigma = 2\pi s - \frac{2\pi rts^3}{6} + \dots,$$

ou bien

$$\sigma = 2\pi s - \frac{2\pi s^3}{6R_1R_2} + \dots,$$

R_1, R_2 désignant les rayons de courbure principaux.

Soit λ l'aire de cette courbe, on aura

$$d\lambda = dx dy \sqrt{1 + p^2 + q^2};$$

je pose

$$V = \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

V est une fonction de x et de y . J'aurai donc

$$\begin{aligned} V &= V_0 + \left(\frac{dV}{dx}\right)_0 x + \left(\frac{dV}{dy}\right)_0 y \\ &+ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_0 x^2 + 2 \left(\frac{d^2V}{dxdy}\right)_0 xy + \left(\frac{d^2V}{dy^2}\right)_0 y^2 \right] + \dots \end{aligned}$$

Or on reconnaît aisément que

$$\begin{aligned} V_0 &= 1, \\ \left(\frac{dV}{dx}\right)_0 &= 0, \quad \left(\frac{dV}{dy}\right)_0 = 0, \\ \left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_0 &= r^2, \quad \left(\frac{d^2V}{dxdy}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d^2V}{dy^2}\right)_0 = t^2. \end{aligned}$$

Il en résulte

$$V = 1 + \frac{1}{2}(r^2 x^2 + t^2 y^2);$$

donc

$$d\lambda = dx dy \left[1 + \frac{1}{2}(r^2 x^2 + t^2 y^2) \right],$$

et, par suite, x_0, x_1 désignant les valeurs extrêmes de x ,

$$\lambda = 2 \int_{x_0}^{x_1} dx \int_0^y dy \left[1 + \frac{1}{2}(r^2 x^2 + t^2 y^2) \right],$$

$$\lambda = 2 \int_{x_0}^{x_1} dx \left[y + \frac{1}{2} \left(r^2 x^2 + \frac{t^2 y^2}{3} \right) y \right].$$

Je prends α pour variable indépendante, et je calcule

$$y dx + \frac{1}{2} \left(r^2 x^2 + \frac{r^2 y^2}{3} \right) y dx$$

en fonction de cette variable au moyen des équations (2), et je trouve, en négligeant toujours les puissances de s supérieures à la quatrième, que cette quantité est égale à

$$-s^2 \sin^2 \alpha d\alpha + \frac{s^4 \sin^2 \alpha}{6 R_1 R_2} (1 - 2 \cos^2 \alpha).$$

Si donc on remarque que les valeurs de α correspondant aux limites x_0 et x_1 sont π et 0, puis si l'on renverse les limites, on aura enfin

$$\lambda = 2s^2 \int_0^\pi \sin^2 \alpha d\alpha - \frac{s^4}{3 R_1 R_2} \int_0^\pi \sin^2 \alpha d\alpha + \frac{2s^4}{3 R_1 R_2} \int_0^\pi \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha d\alpha.$$

Or

$$\int_0^\pi \sin^2 \alpha d\alpha = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^\pi \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha d\alpha = \frac{\pi}{8}.$$

Donc

$$\lambda = \pi s^2 - \frac{\pi s^4}{12 R_1 R_2}.$$

C. Q. F. T.