JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BERTRAND

Sur la courbe dont les deux courbures sont constantes

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 13 (1848), p. 423-424.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1848_1_13__423_0>

SUR LA

COURBE DONT LES DEUX COURBURES SONT CONSTANTES;

Par M. J. BERTRAND.

M. Puiseux a démontré d'une manière très-élégante que l'hélice est la seule courbe dont les deux courbures soient constantes; mais comme sa démonstration, purement analytique, est un peu longue, ayant eu occasion d'enseigner ce théorème, j'ai trouvé un avantage de simplicité à y substituer le raisonnement suivant.

Si les deux courbures d'une courbe sont constantes, les parallèles, menées à ses tangentes par un point de l'espace, formeront un cône dans lequel l'angle de deux plans tangents infiniment voisins sera proportionnel à celui de leurs génératrices de contact; car le premier de ces deux angles est celui de deux plans osculateurs infiniment voisins de la courbe cherchée, et le second est l'angle des deux tangentes correspondantes. Il résulte de cette remarque que, si l'on décrit du sommet du cône comme centre, une sphère de rayon 1, la courbure de la surface conique sera la même en tous les points de la courbe d'intersection, qui est, comme on sait, une ligne de courbure; l'élément de cette ligne mesure, en effet, l'angle des deux génératrices, et l'angle des normales menées à ses extrémités n'est autre chose que celui des plans tangents correspondants.

Si, par les points de cette ligne de courbure, on mène des normales à la surface conique, et qu'on prenne sur chacune d'elles une longueur égale à ce rayon de courbure constant, on formera une courbe qui étant le lieu des intersections successives de ces normales leur sera tangente à toutes; d'un autre côté, cette courbe, étant obtenue en portant une longueur constante sur des normales à la surface conique, est située sur une surface parallèle et doit couper toutes les normales à angle droit; devant ainsi être à la fois tangente et normale aux mêmes lignes, elle doit se réduire à un point. Si, de ce point comme centre, avec un rayon égal au rayon de courbure constant, on décrit une sphère, cette sphère sera inscrite dans le cône qui, par conséquent, est de révolution. Ainsi donc, toutes les tangentes de la courbe cherchée font un angle constant avec une droite fixe, et, par conséquent, cette courbe peut être considérée comme une hélice tracée sur un cylindre parallèle à cette droite.

Cherchons maintenant ce que doit être ce cylindre. Pour que les deux courbures de l'hélice soient constantes, il faut que deux arcs infiniment petits égaux aient le même angle de contingence; et comme les tangentes sont également inclinées sur les génératrices du cylindre, il faut évidemment pour cela que les deux plans tangents correspondants fassent le même angle: si l'on remarque qu'à des arcs égaux d'hélice correspondent des arcs égaux de section droite, il en résulte que les plans tangents au cylindre menés à l'extrémité de deux arcs infiniment petits égaux de la section droite doivent faire le même angle, et que, par conséquent, la courbure de cette section droite est constante, en sorte que c'est un cercle.

Il résulte de la démonstration précédente que *l'hélice tracée sur un cylindre quelconque est la seule courbe dont les deux courbures aient un rapport constant*.

FIN DU TOME TREIZIÈME.