JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A.-H. DESBOVES

Sur le mouvement d'un point matériel attiré en raison inverse du carré des distances par deux centres mobiles

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 13 (1848), p. 369-396.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1848_1_13__369_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

Sur le mouvement d'un point matériel attiré en raison inverse du carré des distances par deux centres mobiles;

PAR M. A.-H. DESBOVES.

(Thèse de Mécanique présentée à la Faculté des Sciences de Paris, le 3 avril 1848.)

I.

Le problème de la détermination du mouvement d'un point matériel attiré en raison inverse du carré des distances par deux centres fixes s'est naturellement présenté aux géomètres successeurs de Newton. Euler et Lagrange ont montré, par des méthodes différentes, comment ce problème pouvait se ramener aux quadratures; mais leurs méthodes, remarquables par d'ingénieux artifices de calcul, n'avaient pas un caractère de généralité assez grand pour leur faire découvrir une classe étendue de problèmes susceptibles d'être ramenés aux quadratures, comme le problème particulier qu'ils avaient résolu. C'est dans ces derniers temps que M. Liouville, prenant son point de départ dans les travaux de Lagrange et de M. Jacobi, a montré par deux méthodes différentes, que toutes les fois que le principe des forces vives a lieu dans le mouvement d'un point matériel, et que la fonction des forces a une certaine forme générale qu'il fait connaître, le problème est ramené aux quadratures. Ainsi, à la simple inspection de la fonction des forces exprimée dans un système de coordonnées que donne la méthode elle-même, on voit immédiatement qu'il est possible de résoudre le problème des centres fixes. Mais, ce qui est surtout remarquable, on voit de la même manière, et avec la même facilité, qu'on peut ramener aux quadratures un problème nouveau d'un sens mécanique suffisamment clair, dont M. Liouville a le premier donné l'énoncé, ainsi qu'il suit : Trouver le mouvement d'un point matériel attiré suivant la loi de l'inverse du carré des distances par deux centres mobiles sur une circonférence de cercle et toujours placés aux extrémités d'un même diamètre. On suppose d'ailleurs que le mouvement des deux centres d'action soit tel, que le point attiré se trouve toujours dans le plan déterminé par l'axe du cercle et le diamètre mobile. On peut aussi, sans rendre plus difficile la solution du problème, compliquer un peu l'énoncé en ajoutant une troisième force proportionnelle à la distance, émanant du centre même du cercle. L'analogie est alors tout à fait complète entre l'énoncé du nouveau problème et l'énoncé du problème des centres fixes, tel que Lagrange l'a résolu.

Je me propose, dans cette Thèse, de développer la solution du problème des centres mobiles, en faisant principalement usage de la méthode fondée sur la connaissance d'une solution complète d'une certaine équation aux différences partielles, du premier ordre et non linéaire. M. Liouville a fait connaître une solution complète de cette équation dans un cas très-général, puis il en a déduit, comme cas particulier, une formule beaucoup plus simple qui lui a donné immédiatement l'énoncé et la solution de son nouveau problème [*]. J'ai pensé qu'il ne serait pas sans intérêt d'arriver directement à la formule simple qui suffit à la résolution du problème des centres mobiles.

Il m'a aussi paru curieux de chercher si les anciennes méthodes d'Euler et de Lagrange pour la solution du problème des deux centres fixes, pouvaient, avec quelques modifications, s'appliquer au problème des centres mobiles qui paraît plus compliqué. J'ai trouvé et je ferai voir ici que les deux méthodes s'appliquent de la manière la plus heureuse au problème de M. Liouville.

II.

M. Jacobi a démontré que toutes les fois que le principe des forces vives avait lieu, le problème de l'intégration des équations différentielles ordinaires de la mécanique appliquées au mouvement d'un ou de

---

[*] *Journal de Mathématiques*, tome XII, page 440.

plusieurs points libres, ou soumis à des liaisons quelconques, pouvait se ramener à la détermination d'une solution complète d'une équation aux différences partielles du premier ordre. En nous bornant au cas du mouvement d'un seul point libre, si l'équation des forces vives est

$$\frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{dt^2} = 2(\mathrm{U} + \mathrm{C}),$$

nous savons, d'après le théorème de M. Jacobi, que pour intégrer les trois équations du mouvement,

$$(1) \qquad \frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{d\mathrm{U}}{dx_1}, \quad \frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{d\mathrm{U}}{dx_2}, \quad \frac{d^2x_3}{dt^2} = \frac{d\mathrm{U}}{dx_3},$$

il suffit de trouver une fonction Θ de x_1, x_2, x_3 contenant trois constantes arbitraires différentes de celle qu'on peut toujours introduire dans Θ par simple addition, et satisfaisant identiquement à l'équation aux différences partielles,

$$(2) \qquad \left(\frac{d\Theta}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dx_2}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dx_3}\right)^2 = 2(\mathrm{U} + \mathrm{C}).$$

Cette fonction étant connue, et A, B, C étant les constantes de la fonction, les intégrales cherchées du mouvement seront

$$(3) \qquad \frac{d\Theta}{d\mathrm{A}} = \mathrm{A}', \quad \frac{d\Theta}{d\mathrm{B}} = \mathrm{B}, \quad \frac{d\Theta}{d\mathrm{C}} = \mathrm{C}',$$

A′, B′, C′ étant de nouvelles constantes arbitraires qui, avec A, B, C, complètent le nombre de constantes arbitraires que doit donner l'intégration des équations proposées. Toute la difficulté du problème est donc ramenée à déterminer une solution complète de l'équation (2).

Il est un cas où cette solution complète se détermine directement et pour ainsi dire à la simple inspection de l'équation (2); c'est celui où U est la somme de trois quantités Q_1, Q_2, Q_3 respectivement fonctions de x_1, x_2, x_3.

En effet, pour satisfaire à la double condition que l'équation (2) soit vérifiée identiquement, quelle que soit la constante C, et que la fonction contienne les trois constantes arbitraires, il suffira évidemment de poser

$$(4)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{d\Theta}{dx_1}\right)^2 = AR_1 + BS_1 + 2CT_1 + 2Q_1 = \varpi(x_1), \\ \left(\dfrac{d\Theta}{dx_2}\right)^2 = AR_2 + BS_2 + 2CT_2 + 2Q_2 = \psi(x_2), \\ \left(\dfrac{d\Theta}{dx_3}\right)^2 = AR_3 + BS_3 + 2CT_3 + 2Q_3 = \chi(x_3); \end{cases}$$

R_1, R_2, R_3, etc., étant des fonctions d'une seule variable x_1, x_2 ou x_3, liées entre elles par les équations

$$(5)\quad R_1 + R_2 + R_3 = 0,\quad S_1 + S_2 + S_3 = 0,\quad T_1 + T_2 + T_3 = 1,$$

on aura alors

$$(6)\qquad \Theta = \int\sqrt{\varpi(x_1)}\,dx_1 + \int\sqrt{\psi(x_2)}\,dx_2 + \int\sqrt{\chi(x_3)}\,dx_3.$$

Le cas très-simple que nous venons de considérer n'a certainement rien de bien intéressant en lui-même, puisque dans le cas où la fonction des forces satisfait à la condition que nous avons indiquée, les variables sont séparées dans chacune des équations du mouvement, et que chacune d'elles peut s'intégrer séparément. Mais concevons maintenant que les variables x_1, x_2, x_3 soient remplacées par d'autres variables ρ_1, ρ_2, ρ_3, telles qu'après la substitution, l'équation aux différences partielles ait une forme analogue à celle qu'elle avait d'abord, c'est-à-dire en désignant par λ, λ', λ'' certaines fonctions des nouvelles variables; supposons qu'on ait

$$(7)\qquad \frac{1}{\lambda}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_1}\right)^2 + \frac{1}{\lambda'}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_2}\right)^2 + \frac{1}{\lambda''}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_3}\right)^2 + 2(U + C).$$

Si ρ_1, ρ_2, ρ_3 formaient un nouveau système quelconque de coordonnées, l'équation (7) contiendrait les doubles produits $\frac{d\Theta}{d\rho_1}\frac{d\Theta}{d\rho_2}$, etc. Mais nous supposerons que les nouvelles variables soient choisies de manière que, dans l'équation (7), les coefficients de ces doubles produits soient nuls.

Il est évident qu'on peut prendre maintenant pour U la fonction beaucoup plus compliquée que tout à l'heure,

$$U = \frac{Q_1}{\lambda} + \frac{Q_2}{\lambda'} + \frac{Q_3}{\lambda''}, \tag{8}$$

et remplacer les équations (4), (5) et (6) par les suivantes, dans lesquelles, ainsi que dans la précédente, les signes de fonction se rapportent aux nouvelles variables

$$\left\{\begin{aligned} \left(\frac{d\Theta}{d\rho_1}\right)^2 &= AR_1 + BS_1 + 2CT_1 + 2Q_1 = \varpi(\rho_1), \\ \left(\frac{d\Theta}{d\rho_2}\right)^2 &= AR_2 + BS_2 + 2CT_2 + 2Q_2 = \psi(\rho_2), \\ \left(\frac{d\Theta}{d\rho_3}\right)^2 &= AR_3 + BS_3 + 2CT_3 + 2Q_3 = \chi(\rho_3), \end{aligned}\right. \tag{9}$$

$$\frac{R_1}{\lambda} + \frac{R_2}{\lambda'} + \frac{R_3}{\lambda''} = 0, \quad \frac{S_1}{\lambda} + \frac{S_2}{\lambda'} + \frac{S_3}{\lambda''} = 0, \quad \frac{T_1}{\lambda} + \frac{T_2}{\lambda'} + \frac{T_3}{\lambda''} = 1, \tag{10}$$

$$\Theta = \int\sqrt{\varpi(\rho_1)}\,d\rho_1 + \int\sqrt{\psi(\rho_2)}\,d\rho_2 + \int\sqrt{\chi(\rho_3)}\,d\rho_3. \tag{11}$$

Nous avons maintenant deux espèces de conditions à remplir: 1° choisir les nouvelles variables, de manière que, dans l'équation (7), il manque les doubles produits de la forme $\frac{d\Theta}{d\rho_1}\frac{d\Theta}{d\rho_2}$; 2° déterminer des fonctions R_1, S_1, etc., satisfaisant aux équations (10). Voyons d'abord comment la première condition sera remplie.

Si l'on remplace, dans l'équation (2), $\frac{d\Theta}{dx_1}$, $\frac{d\Theta}{dx_2}$, $\frac{d\Theta}{dx_3}$ par leurs valeurs respectives $\frac{d\Theta}{d\rho_1}\frac{d\rho_1}{dx_1} + \frac{d\Theta}{d\rho_2}\frac{d\rho_2}{dx_2} + \frac{d\Theta}{d\rho_3}\frac{d\rho_3}{dx_3}$, $\frac{d\Theta}{d\rho_1}\frac{d\rho_1}{dx_2} + \cdots$, $\frac{d\Theta}{d\rho_1}\frac{d\rho_1}{dx_3} + \cdots$, et qu'on égale à zéro les coefficients des doubles produits de la forme $\frac{d\Theta}{d\rho_1}\frac{d\Theta}{d\rho_2}$, on tombe sur les équations:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\rho_1}{dx_1}\frac{d\rho_2}{dx_1} + \frac{d\rho_1}{dx_2}\frac{d\rho_2}{dx_2} + \frac{d\rho_1}{dx_3}\frac{d\rho_2}{dx_3} &= 0, \\ \frac{d\rho_1}{dx_1}\frac{d\rho_2}{dx_1} + \frac{d\rho_1}{dx_2}\frac{d\rho_3}{dx_2} + \frac{d\rho_1}{dx_3}\frac{d\rho_3}{dx_3} &= 0, \\ \frac{d\rho_2}{dx_1}\frac{d\rho_3}{dx_1} + \frac{d\rho_2}{dx_2}\frac{d\rho_3}{dx_2} + \frac{d\rho_2}{dx_3}\frac{d\rho_3}{dx_3} &= 0. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Or, si l'on considère les équations

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = \rho_1, \quad f_2 = (x_1, x_2, x_3) = \rho_2, \quad f_3(x_1, x_2, x_3) = \rho_3,$$

qui lient les nouvelles variables aux anciennes, comme étant les équations de surfaces variables dans lesquelles x_1, x_2, x_3 sont les coordonnées d'un point de la surface, ρ_1, ρ_2, ρ_3 des paramètres variables, les équations (12) montrent que les surfaces variables doivent toujours former un système de surfaces orthogonales.

La substitution que nous venons d'indiquer montre en même temps que l'on a

$$(13)\quad \lambda = \frac{1}{\frac{d\rho_1^2}{dx_1^2} + \frac{d\rho_1^2}{dx_2^2} + \frac{d\rho_1^2}{dx_3^2}}, \quad \lambda' = \frac{1}{\frac{d\rho_2^2}{dx_1^2} + \frac{d\rho_2^2}{dx_2^2} + \frac{d\rho_2^2}{dx_3^2}}, \quad \lambda'' = \frac{1}{\frac{d\rho_3^2}{dx_1^2} + \frac{d\rho_3^2}{dx_2^2} + \frac{d\rho_3^2}{dx_3^2}}.$$

Nous pouvons, d'un autre côté, remarquer que si l'on exprime

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

dans le nouveau système de coordonnées satisfaisant à la condition que nous venons d'énoncer, l'expression de ds^2 sera de la forme $p_1\, d\rho_1^2 + p_2\, d\rho_2^2 + p_3\, d\rho_3^2$, et les quantités λ, λ', λ'' pourront être prises respectivement égales à p_1, p_2, p_3.

En effet, si l'on remplace, dans l'expression de ds^2, dx_1, dx_2, dx_3 par les différentielles totales relatives à ρ_1, ρ_2, ρ_3, dont x_1, x_2, x_3 peuvent être considérées comme des fonctions, on aura

$$(14)\quad p_1 = \frac{dx_1^2}{d\rho_1^2} + \frac{dx_2^2}{d\rho_1^2} + \frac{dx_3^2}{d\rho_1^2}, \quad p_2 = \frac{dx_1^2}{d\rho_2^2} + \frac{dx_2^2}{d\rho_2^2} + \frac{dx_3^2}{d\rho_2^2}, \quad p_3 = \frac{dx_1^2}{d\rho_3^2} + \frac{dx_2^2}{d\rho_3^2} + \frac{dx_3^2}{d\rho_3^2};$$

et, pour que les doubles produits des différentielles $d\rho_1$, $d\rho_2$, $d\rho_3$ manquent dans l'expression de ds^2, on devra avoir

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{d\rho_1}\dfrac{dx_1}{d\rho_2} + \dfrac{dx_2}{d\rho_1}\dfrac{dx_2}{d\rho_2} + \dfrac{dx_3}{d\rho_1}\dfrac{dx_3}{d\rho_2} = 0, \\ \dfrac{dx_1}{d\rho_1}\dfrac{dx_1}{d\rho_3} + \dfrac{dx_2}{d\rho_1}\dfrac{dx_2}{d\rho_3} + \dfrac{dx_3}{d\rho_1}\dfrac{dx_3}{d\rho_3} = 0, \\ \dfrac{dx_1}{d\rho_2}\dfrac{dx_1}{d\rho_3} + \dfrac{dx_2}{d\rho_2}\dfrac{dx_2}{d\rho_3} + \dfrac{dx_3}{d\rho_2}\dfrac{dx_3}{d\rho_3} = 0. \end{cases}$$

Mais comme on peut le déduire immédiatement des équations (6) du Mémoire de M. Lamé sur les coordonnées curvilignes [*], les équations (12) et (15) sont une conséquence l'une de l'autre, et les seconds membres des équations (13) et (14) sont égaux : le théorème est donc démontré.

La réciproque étant également vraie, on voit que la condition nécessaire et suffisante à laquelle doivent satisfaire les nouvelles variables pour que l'équation (7) ait lieu, c'est que ds^2 dans le nouveau système de coordonnées ait la forme indiquée plus haut.

Il reste maintenant à déterminer les fonctions R_1, S_1, etc., satisfaisant aux équations (10).

Un cas très-simple où ces fonctions se déterminent immédiatement avec la plus grande facilité, c'est celui où $\lambda = \lambda' = \lambda''$; en effet, les équations de condition sont alors

$$R_1 + R_2 + R_3 = 0, \quad S_1 + S_2 + S_3 = 0, \quad T_1 + T_2 + T_3 = \lambda.$$

On pourra satisfaire à ces équations très-simplement, en prenant, par exemple,

$$R_1 = S_1 = 1, \quad R_2 = S_2 = -1, \quad R_3 = S_3 = T_3 = 0,$$

d'où résultera

$$\lambda = \lambda' = \lambda'' = T_1 + T_2.$$

La valeur de Θ prend alors une forme très-simple, qu'il ne paraît pas utile de rapporter ici. Remarquons seulement que si l'on se bornait au cas de deux variables, c'est-à-dire si $\lambda'' = 0$, on trouverait que le système des coordonnées elliptiques ordinaires dans un plan satisfait aux deux conditions $\lambda = \lambda'$, $\lambda = T_1 + T_2$, et même il y a plus, que ce système, comme l'a fait voir M. Liouville [**], est le seul pour lequel les deux conditions précédentes soient remplies. En formant l'expression de U correspondante à ce cas, on en déduira, en particulier, la solution du problème des deux centres fixes, lorsque la courbe est plane.

---

[*] *Journal de Mathématiques*, tome V, page 320.

[**] *Journal de Mathématiques*, tome XII, page 360.

Il existe un autre cas où il est très-facile de trouver des valeurs de R_1, R_2, R_3, etc., satisfaisant aux équations (10) : c'est lorsqu'on a $\lambda = \lambda'$, λ'' étant différent de λ et λ'.

En effet, si l'on met les équations (10) sous la forme

$$R_1 + R_2 + R_3 \frac{\lambda}{\lambda''} = 0, \quad S_1 + S_2 + S_3 \frac{\lambda}{\lambda''} = 0, \quad T_1 + T_2 + T_3 \frac{\lambda}{\lambda''} = \lambda,$$

on voit que l'on pourra prendre

$$R_3 = 1, \quad S_1 = 1, \quad S_2 = -1, \quad S_3 = 0, \quad T_3 = 0,$$

et l'on aura alors

$$\frac{\lambda}{\lambda''} = -(R_1 + R_2), \quad \lambda = T_1 + T_2.$$

Je vais faire voir tout à l'heure que le cas qui nous occupe en ce moment conduit à la solution du problème des centres mobiles : il est donc essentiel de développer tous les calculs qui s'y rapportent. Il y aurait ici à résoudre une question analytique analogue à celle dont nous parlions tout à l'heure. Cette question serait de déterminer les systèmes de coordonnées pour lesquels les conditions

$$\lambda = \lambda' = T_1 + T_2, \quad \frac{\lambda}{\lambda''} = R_1 + R_2$$

sont remplies; mais elle paraît présenter d'assez grandes difficultés analytiques, et d'ailleurs sa solution ne nous est pas indispensable. En effet, si nous adoptons le système de coordonnées qui se présente le plus naturellement à l'esprit quand on veut résoudre le problème des centres mobiles, c'est-à-dire le système de coordonnées composé de l'angle φ que fait le plan méridien mobile avec un plan fixe passant par l'axe de rotation, et des coordonnées elliptiques ρ et μ rapportées dans le plan mobile aux deux centres mobiles d'attraction, nous trouverons sans difficulté, pour valeur de ds^2,

$$ds^2 = \frac{(\rho^2 - \mu^2)}{\rho^2 - c^2} d\rho^2 + \frac{\rho^2 - \mu^2}{c^2 - \mu^2} d\mu^2 + \frac{\rho^2 \mu^2}{c^2} d\varphi^2.$$

On voit que les coefficients de $d\rho^2$, $d\mu^2$, $d\varphi^2$, aux facteurs près $\rho^2 - c^2$,

$c^2 - \mu^2$, satisfont aux conditions exigées; mais ces facteurs, comme nous allons le voir, n'empêchent pas d'appliquer cette méthode.

En effet, si l'on pose

$$\frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2 - c^2}} = d\alpha, \quad \frac{d\mu}{\sqrt{c^2 - \mu^2}} = d\beta,$$

d'où l'on déduit

$$\rho^2 = \Psi(\alpha), \quad \mu^2 = \mathrm{X}(\beta),$$

l'expression de ds^2 devient

$$ds^2 = [\Psi(\alpha) - \mathrm{X}(\beta)]\, d\alpha^2 + [\Psi(\alpha) - \mathrm{X}(\beta)]\, d\beta^2 + \frac{\Psi(\alpha) . \mathrm{X}(\beta)}{c^2}\, d\varphi^2;$$

et l'on voit que, dans le nouveau système de coordonnées α, β, φ, les coefficients de $d\alpha^2$, $d\beta^2$, $d\gamma^2$ satisfont bien aux conditions voulues. Maintenant, pour calculer l'expression de Θ, il suffira de remplacer dans les équations (9) les variables ρ_1, ρ_2, ρ_3 ou leurs équivalentes ρ, μ, φ par α, β, φ, de sorte que R_1, S_1, etc., représentent des fonctions d'une seule variable α, β ou φ; mais si l'on veut que R_1, S_1, etc., restent des fonctions de ρ, μ, φ dans l'expression de Θ, on pourra supposer que l'on remette dans ces fonctions, pour α, β, leurs valeurs en ρ et μ : ce qui revient évidemment à supposer que, dans les équations (9), (10) et (11), R_1, S_1, etc., restent des fonctions de ρ, μ et φ. Si maintenant on remplace dans les équations (9), modifiées comme il vient d'être dit, $\frac{d\theta}{d\alpha}$, $\frac{d\theta}{d\beta}$ par leurs valeurs $\frac{d\Theta}{d\rho}\sqrt{\rho^2 - c^2}$, $\frac{d\Theta}{d\mu}\sqrt{c^2 - \mu^2}$, on trouvera

$$\Theta = \int \frac{\sqrt{\varpi(\rho)}}{\sqrt{\rho^2 - c^2}}\, d\rho + \int \frac{\sqrt{\psi(\mu)}}{\sqrt{c^2 - \mu^2}}\, d\mu + \int \chi(\varphi)\, d\varphi.$$

Quant à la valeur de U, si l'on représente les fonctions Q_1, Q_2, Q_3 par $\frac{f(\rho)}{\rho^2}$, $\frac{F(\mu)}{\mu^2}$ et $\Pi(\varphi)$, son expression sera

$$U = \frac{f(\rho)}{\rho^2(\rho^2 - \mu^2)} + \frac{F(\mu)}{\mu^2(\rho^2 - \mu^2)} + \frac{\Pi(\varphi)}{\rho^2\mu^2}.$$

Mettons maintenant dans $\varpi(\rho)$, $\psi(\mu)$ et $\chi(\varphi)$, pour S_1, S_2, S_3, R_3 et T_3 les valeurs données plus haut; pour T_1, T_2, R_1, R_2 leurs valeurs respectives ρ^2, $-\mu^2$, $\frac{c^2}{\rho^2}$, $-\frac{c^2}{\mu^2}$, déduites des équations

$$\lambda = \lambda' = \rho^2 - \mu^2, \quad \frac{\lambda}{\lambda''} = \frac{c^2}{\mu^2} - \frac{c^2}{\rho^2},$$

et enfin, pour Q_1, Q_2, Q_3 les valeurs indiquées tout à l'heure, nous trouverons sans difficulté

$$\Theta = \int d\rho \sqrt{\frac{Ac^2 + B\rho^2 + 2C\rho^4 + 2f(\rho)}{\rho^2(\rho^2 - c^2)}} + \int d\mu \sqrt{\frac{-Ac^2 - B\mu^2 - 2C\mu^4 + 2F(\mu)}{\rho^2(\rho^2 - c^2)}}$$
$$+ \int d\psi \sqrt{A - 2\Pi(\varphi)}.$$

Cette formule, à un changement insignifiant près, et qu'il eût d'ailleurs été facile d'éviter si cela eût présenté quelque avantage, est précisément celle que M. Liouville a obtenue par une voie indirecte, dans le tome XII du présent Recueil. Appliquons la formule au problème des centres mobiles.

En désignant par r, r'; R les distances du point attiré aux deux centres mobiles et au centre fixe, on aura, par un calcul facile,

$$U = \frac{g}{r} + \frac{g'}{r'} + kR^2 \text{ [*]};$$

mais on a

$$r = \rho + \mu, \quad r' = \rho + \mu,$$

et, en désignant par $2c$ la distance des deux centres mobiles,

$$R^2 = \rho^2 + \mu^2 - c^2.$$

Donc l'expression de U devient

$$U = \frac{g}{\rho + \mu} + \frac{g'}{\rho - \mu} + k(\rho^2 + \mu^2 - c^2),$$

et, par conséquent, on peut supposer, dans l'expression de Θ donnée tout à l'heure,

$$\Pi(\varphi) = 0, \quad F(\mu) = -\mu^2(g\mu - g'\mu + k\mu^4 - kc^2\mu^2),$$
$$f(\rho) = \rho^2(g\rho + g'\rho + k\rho^4 - kc^2\rho^2).$$

[*] Le calcul de U se trouve fait plus loin dans l'exposition de la méthode d'Euler.

Faisant ces substitutions, puis formant, suivant la règle de M. Jacobi, les équations intégrales

$$\frac{d\Theta}{dA} = A', \quad \frac{d\Theta}{dB} = B', \quad \frac{d\Theta}{dC} = t + C',$$

on trouve sans difficulté, en posant

$$P = (\rho^2 - c^2)[2k\rho^6 - (2kc^2 - C)\rho^4 + 2(g + g')\rho^3 - B\rho^2 + Ac^2],$$
$$Q = (\mu^2 - c^2)[2k\mu^6 - (2kc^2 - C)\mu^4 + 2(g - g')\mu^3 - B\mu^2 + Ac^2],$$

les trois équations suivantes :

$$\frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{P}} = \frac{\mu\, d\mu}{\sqrt{Q}}, \quad \frac{\rho^3\, d\rho}{\sqrt{P}} - \frac{\mu^2\, d\mu}{\sqrt{Q}} = dt, \quad \frac{c^2\, d\rho}{\rho\sqrt{P}} - \frac{c^2\, d\mu}{\mu\sqrt{Q}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{A}}.$$

Comme on le voit, les variables sont séparées, et le problème est ramené aux quadratures. Nous ne ferons pas, pour le moment, d'autres remarques, nous réservant de reprendre la discussion du problème après que nous aurons fait voir, comme nous l'avons annoncé en commençant, que les méthodes d'Euler et de Lagrange, pour la solution du problème des centres fixes, peuvent aussi s'appliquer au problème des centres mobiles.

III.

Méthode d'Euler. — Pour appliquer cette méthode au problème des centres mobiles, je prendrai pour guide le travail de Legendre, qui a simplifié l'exposition d'Euler [*]; j'adopterai aussi autant que possible toutes les notations du *Traité des Fonctions elliptiques*.

Soient ox' l'axe de rotation, $y'oz'$ le plan des centres mobiles, F et G ces deux centres, O le centre fixe, x, y', z' les coordonnées du point attiré M par rapport aux trois axes ox', oy', oz'; x, y les coordonnées du même point rapportées dans le plan méridien à l'axe du cercle et au diamètre mobile; (c, b) $(-c, -b)$ les coordonnées des deux centres mobiles. Posons aussi

$$MF = s, \quad MG = r, \quad FG = 2h, \quad MFO = \omega, \quad 180^\circ - MGO = \varphi;$$

[*] *Traité des Fonctions elliptiques*, tome I, page 518.

les équations du mouvement seront

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{Ax}{r^3} - \dfrac{Bx}{s^3}, \\ \dfrac{d^2y'}{dt^2} = -\dfrac{A(y'-b)}{r^3} - \dfrac{B(y'+b)}{s^3}, \\ \dfrac{d^2z'}{dt^2} = -\dfrac{A(z'-c)}{r^3} - \dfrac{B(z'-c)}{s^3} \text{ [*]}. \end{cases}$$

En y joignant

$$b^2 + c^2 = h^2, \quad \frac{y'}{z'} = \frac{b}{c},$$

des deux dernières équations, on déduit

$$bdb + cdc = 0,$$

$$y'db + z'dc = \frac{y'}{b}(bdb + cdc) = 0,$$

et, par suite,

$$rdr = (y' - b)\,dy' + (z' - c)\,dz' + xdx,$$
$$sds = (y' + b)\,dy' + (z' + c)\,dz' + xdx,$$

comme si les centres d'action étaient fixes.

On aura donc, à la manière ordinaire, l'équation des forces vives

$$\frac{dx^2 + dy'^2 + dz'^2}{dt^2} = \frac{A}{r} + \frac{B}{s} + \frac{C}{2h}.$$

De la seconde et de la troisième des équations (1) on déduit facilement

$$y'dz' - z'dy' = H\,dt,$$

les termes $\frac{A}{r^3}(cy' - bz')$, $\frac{B}{s^3}(cy' - bz')$ étant nuls, en vertu de l'équation

$$\frac{y'}{z'} = \frac{b}{c}.$$

En désignant par φ_1 l'angle du plan méridien avec le plan des x', y',

[*] Nous supposons $k = 0$, l'hypothèse de k différent de zéro ne donnant lieu à aucune difficulté.

On peut aussi, comme on sait, mettre l'équation précédente sous la forme

$$y^2\, d\varphi_1 = \mathrm{H}\, dt.$$

Nous allons maintenant déduire la troisième intégrale de la considération des aires élémentaires $d\alpha$, $d\beta$ engendrées pendant le mouvement, dans le plan méridien par les rayons vecteurs r et s. On aura

$$d^2\alpha = (y - h)\, d^2x - x d^2y,$$
$$d^2\beta = (y + h)\, d^2x - x d^2y,$$

D'un autre côté, les valeurs $y' = y \cos \varphi_1$, $z' = y \sin \varphi_1$ donnent

$$d^2y' \cos \varphi_1 + d^2z' \sin \varphi_1 = d^2y - y^2\, d\varphi_1^2,$$

et, en subtituant dans cette équation les valeurs de d^2y' et d^2z' données par les équations du mouvement, ainsi que la valeur de $d\varphi_1$ déduite de l'équation

$$y^2\, d\varphi_1 = dt,$$

on aura

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\mathrm{H}^2}{y^3} - \frac{\mathrm{A}(y-h)}{r^3} - \frac{\mathrm{B}(y+h)}{s^3}.$$

Mettant maintenant dans les expressions de $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$, $\frac{d^2\beta}{dt^2}$, pour $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, leurs expressions maintenant connues, on aura

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{\mathrm{H}^2x}{y^3} + \frac{2\mathrm{B}hx}{s^3},\quad \frac{d^2\beta}{dt^2} = -\frac{\mathrm{H}^2x}{y^3} - \frac{2\mathrm{A}hx}{r^3};$$

de ces deux dernières équations on déduit, par un calcul très-simple,

$$\frac{d\alpha\, d^2\beta + d\beta\, d^2\alpha}{dt^2} = -2\mathrm{A}h \sin\varphi\, d\varphi + 2\mathrm{B}h \sin\omega\, d\omega$$
$$- 8\mathrm{H}^2\, \frac{\sin\varphi \sin^3\omega\, d\varphi + \sin\omega \sin^3\varphi\, d\omega}{\sin^3(\varphi+\omega)}.$$

Cette équation ne diffère de celle qui a été trouvée par Euler dans le cas des centres fixes, que par le dernier terme. Or il arrive que ce dernier terme est une différentielle exacte de deux variables, comme le terme correspondant du problème des centres fixes.

En intégrant l'équation précédemment écrite, on aura

$$\frac{d\alpha\, d\beta}{dt^2} = 2\,\mathrm{A}h\cos\varphi - 2\,\mathrm{B}h\cos\omega - 4\,\mathrm{H}^2\,\frac{\sin^2\omega\sin^2\varphi}{\sin^2(\varphi+\omega)}$$
$$+ 2\,\mathrm{C}'h = r^2 s^2\,\frac{d\varphi\, d\omega}{dt^2};$$

c'est la troisième intégrale cherchée. On voit facilement qu'on eût trouvé la même équation, au facteur près de $\frac{\sin^2\omega\sin^2\varphi}{\sin^2(\varphi+\omega)}$, si on avait supposé k différent de zéro.

Il faut maintenant procéder à la séparation des variables. Les calculs, à partir de ce moment, sont tout à fait les mêmes que pour le problème des centres fixes. Employons tout de suite, avec Legendre, le changement de variables qui doit conduire à la séparation cherchée, c'est-à-dire posons

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega = pq, \quad \operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi = \frac{p}{q};$$

d'où l'on déduira

$$\sin\varphi = \frac{2pq}{p^2+q^2}, \quad \cos\varphi = \frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}, \quad \sin\omega = \frac{2pq}{1+p^2q^2}, \quad \cos\omega = \frac{1-p^2q^2}{1+p^2q^2},$$
$$r = \frac{2h}{1-p^2} - \frac{2h}{1+q^2}, \quad s = \frac{2h}{1-p^2} - \frac{2hq^2}{1+q^2}.$$

On aura ensuite facilement, en fonction de p et q, les valeurs de $dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$ et de $r^2 s^2 d\varphi\, d\omega$, et l'on sera conduit à l'équation

$$\frac{r^2 s^2\, d\varphi\, d\omega}{4h^2(dx^2+dy^2)} = \frac{p^2\,dq^2 - q^2\,dp^2}{(1+q^2)^2\,dp^2 + (1-p^2)^2\,dq^2} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}},$$

en posant

$$\mathrm{N} = \frac{\mathrm{C}'}{2} + \frac{\mathrm{A}}{2}\cos\varphi - \frac{\mathrm{B}}{2}\cos\omega - \frac{\mathrm{H}^2}{h}\,\frac{\sin^2\omega\sin^2\varphi}{\sin^2(\omega+\varphi)},$$
$$\mathrm{M} = \mathrm{C} + \frac{2\,\mathrm{A}h}{r} + \frac{2\,\mathrm{B}h}{s} - \frac{\mathrm{H}^2 h}{y^2}.$$

Les polynômes M et N étant exprimés en p et q, on aura l'équation

$$\mathrm{P}\,dq^2 = \mathrm{Q}\,dp^2,$$

dans laquelle

$$P = Mp^2 - N(1-p^2)^2, \quad Q = Mq^2 + N(1+q^2)^2.$$

Le résultat cherché ne devant différer de celui qu'on obtient dans le problème des centres fixes que par les termes contenant H^2 en facteur, calculons ces termes; nous aurons

$$\frac{h}{y^2} = \frac{(1+q^2)^2(1-p^2)^2}{h(1+p^2)^2(1-q^2)^2}, \quad \frac{1}{h}\frac{\sin^2\omega\sin^2\varphi}{\sin^2(\varphi+\omega)} = \frac{4p^2q^2}{h(p^2+1)^2(1-q^2)^2}.$$

Pour avoir le terme qui multiplie H^2 dans P, on multipliera les valeurs que nous venons de trouver pour $\frac{h}{y^2}$ et $\frac{1}{h}\frac{\sin^2\omega\sin^2\varphi}{\sin^2(\omega+\varphi)}$, respectivement par p^2 et $(1-p^2)^2$; et, en retranchant la seconde de la première, on aura

$$\frac{(1-p^2)^2p^2}{h(1+p^2)^2};$$

on trouverait de même $\frac{(1+q^2)^2q^2}{h(1-q^2)^2}$ pour le multiplicateur de H^2 dans Q.

L'équation aux variables séparées devient ainsi

$$\frac{dp}{\sqrt{Cp^2+\frac{1}{2}(A+B)(1-p^4)-\frac{1}{2}C'(1-p^2)^2-\frac{H^2}{h}\frac{(1-p^2)^2p^2}{(1+p^2)^2}}}$$
$$= \frac{dq}{\sqrt{Cq^2+\frac{1}{2}(A-B)(1-q^4)+\frac{1}{2}C'(1+q^2)^2-\frac{H^2}{h}\frac{(1+q^2)^2q^2}{(1-q^2)^2}}}.$$

Si l'on veut donner à l'équation précédente la forme qu'elle prend lorsqu'on choisit pour variables $\rho = \frac{r+s}{2}$, $\mu = \frac{r-s}{2}$, on trouve, en posant $Ch + 2C'h + H^2 = D$,

$$\frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{\rho^2-h^2}\sqrt{C\rho^4+2(A+B)h\rho^3-Dh\rho^2+H^2h^3}}$$
$$= \frac{\mu\, d\mu}{\sqrt{\mu^2-h^2}\sqrt{C\mu^4-2(A-B)h\mu^3-Dh\mu^2+H^2h^3}};$$

ce qui est la formule de la première méthode, dans laquelle on aurait fait $k=0$.

On trouverait ensuite dt et $d\varphi_1$ sans difficulté.

IV.

Méthode de Lagrange [*]. — Prenons pour origine le point autour duquel la rotation a lieu, et, pour axe des z, l'axe de rotation. Soient (a, b), $(-a, -b)$ les coordonnées des deux centres mobiles qui sont dans le plan des x, y leur distance; u, v les distances du point attiré aux deux centres. Les équations du mouvement seront

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{A(x-a)}{u^3} + \frac{B(x+a)}{v^3} = 0,\\ &\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{A(y-b)}{u^3} + \frac{B(y+b)}{v^3} = 0,\\ &\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{Az}{u^3} + \frac{Bz}{v^3} = 0, \end{aligned}\right.$$

auxquelles il faut joindre les équations

$$a^2 + b^2 = f^2, \quad y = \frac{b}{a}x.$$

De ces équations on déduit, comme nous l'avons vu pour la méthode d'Euler, l'équation des forces vives

$$(2)\quad \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \frac{2A}{u} + \frac{2B}{v} + 4C.$$

Multipliant les équations (1) respectivement par $x - a$, $y - b$, z, et ajoutant, il viendra

$$(3)\quad \frac{(x-a)\,d^2x + (y-b)\,d^2y + z\,d^2z}{dt^2} = -\frac{A}{u} - B\,\frac{u^2 + v^2 - f^2}{2v^3}.$$

On trouve aussi sans difficulté, en différentiant deux fois l'équation,

$$u^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2,$$

et divisant par dt^2,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2u^2}{2\,dt^2} = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} &+ (x-a)\frac{d^2x}{dt^2} + (y-b)\frac{d^2y}{dt^2}\\ &+ z\,\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{da\,dx + db\,dy}{dt^2}. \end{aligned}\right.$$

---

[*] *Anciens Mémoires de l'Académie de Turin*, tome V.

Ajoutons maintenant membre à membre les équations (2), (3), (4), il viendra

$$(5)\qquad \frac{d^2u^2}{dt^2} = \frac{A}{u} + \frac{B}{2}\left(\frac{3}{v} + \frac{f^2 - u^2}{v^3}\right) - \frac{dadx + dbdy}{dt^2} + 4C.$$

On trouverait d'une manière semblable

$$(6)\qquad \frac{d^2v^2}{dt^2} = \frac{B}{v} + \frac{A}{2}\left(\frac{3}{u} + \frac{f^2 - v^2}{u^3}\right) + \frac{dadx + dbdy}{dt^2} + 4C.$$

On voit que la mobilité des centres introduit dans les équations (5) et (6), auxquelles Lagrange ramène principalement le problème des centres fixes, une seule quantité nouvelle $\frac{dadx + dbdy}{dt^2}$. Or je dis que cette quantité peut s'exprimer par une fonction très-simple de u et de v.

En effet, on a d'abord

$$dadx + dbdy = \frac{da\,(ydx - xdy)}{y},$$

comme on le voit en se servant des équations

$$y = \frac{b}{a}x, \quad ada + bdb = 0.$$

D'un autre côté, en différentiant l'équation

$$y = \frac{b}{a}x,$$

on trouve facilement

$$da = b\,\frac{(ydx - xdy)}{s^2},$$

s désignant la distance de l'origine à la projection du point attiré sur le plan des x, y. Donc

$$dadx + dbdy = \frac{b}{y}\frac{(ydx - xdy)^2}{s^2} = \frac{f}{2}\frac{(ydx - xdy)^2}{s^3}.$$

Mais en multipliant la première des équations (1) par y, la deuxième par x, et retranchant, on a

$$\frac{yd^2x}{dt^2} - \frac{xd^2y}{dt^2} = 0;$$

intégrant

$$y\,dx = x\,dy = \mathrm{H}\,dt,$$

substituant la valeur de $ydx - xdy$, dans l'expression de $dadx - db\,dy$, il viendra

$$\frac{dadx + dbdy}{dt^2} = \frac{f}{2}\frac{\mathrm{H}^2}{s^3} = \frac{4f^4\mathrm{H}^2}{(v^2-u^2)^3},$$

s étant facilement trouvé égal à $\frac{v^2-u^2}{2f}$.

Les équations (5) et (6) deviennent donc

$$(7)\qquad \frac{d^2u^2}{dt^2} = \frac{\mathrm{A}}{u} + \frac{\mathrm{B}}{2}\left(\frac{3}{v} + \frac{f^2-u^2}{v^3}\right) - \frac{4f^4\mathrm{H}^2}{(u^2-v^2)^3} + \mathrm{C},$$

$$(8)\qquad \frac{d^2v^2}{dt^2} = \frac{\mathrm{B}}{v} + \frac{\mathrm{A}}{2}\left(\frac{3}{u} + \frac{f^2-v^2}{u^3}\right) + \frac{4f^4\mathrm{H}^2}{(u^2-v^2)^3} + \mathrm{C}.$$

En faisant $\mathrm{H} = 0$, on a les équations de Lagrange pour le problème des centres fixes.

La question de déterminer les deux équations finies entre u, v et t est ramenée à l'intégration des équations (7) et (8). Nous connaissons déjà une intégrale du premier ordre de ces deux équations : c'est l'équation des forces vives dans laquelle il serait très-facile de tout ramener aux variables u et v. Mais il sera plus élégant de chercher, avec Lagrange, les intégrales des équations (7) et (8), en déduisant de ces équations, par des combinaisons diverses, d'autres équations telles, que les premiers membres soient des différentielles exactes, et telles aussi que, dans les seconds membres, les multiplicateurs de A, B, etc., soient des différentielles exactes de deux variables. Or, comme il arrive que les multiplicateurs de H^2, dans les équations dont nous venons de parler, sont des différentielles exactes de deux variables, la marche de Lagrange peut être appliquée sans aucune modification ; et même il n'y a de calcul nouveau que celui des intégrations des fonctions différentielles de deux variables qui multiplient H^2 dans les diverses équations intégrables.

Nous représenterons, pour abréger, dans les calculs qui vont suivre, par P, Q, R, etc., l'ensemble des termes indépendants de H^2, et qui sont les mêmes lorsque les centres sont fixes ou lorsqu'ils sont mobiles.

Multiplions les équations (7) et (8) respectivement par $d.v^2$ et $d.u^2$, ajoutons membre à membre, puis intégrons; il viendra

$$\frac{d.u^2 \times d.v^2}{2dt^2} = P - \frac{4f^4 H^2}{2(u^2 - v^2)^2}. \tag{9}$$

Multiplions maintenant les équations (7) et (8) respectivement par $2v^2 d.u^2$ et $2u^2 d.v^2$, l'équation (9) par $d.u^2 + d.v^2$; retranchons de la somme des deux premières ainsi formées la troisième, puis intégrons les deux membres de l'équation résultant de cette combinaison, nous aurons

$$\frac{v^2(d.u^2)^2 + u^2(d.v^2)^2}{2dt^2} = Q + 2f^4 H^2 \frac{(u^2 + v^2)}{(u^2 - v^2)^2}. \tag{10}$$

Si l'on ajoute à cette équation ou qu'on en retranche l'équation (9) multipliée par $2uv$, on obtient

$$\frac{(vd.u^2 + ud.v^2)^2}{4dt^2} = R + \frac{f^4 H^2}{(u+v)^2},$$

$$\frac{(vd.u^2 - ud.v^2)^2}{4dt^2} = S + \frac{f^4 H^2}{(u-v)^2};$$

R et S étant respectivement des fonctions de $u + v$ et $u - v$. En posant $u + v = p$, $(u - v) = q$, les deux équations précédentes deviennent

$$uvdp = \sqrt{R + \frac{f^4 H^2}{p^2}},$$

$$uvdq = \sqrt{S + \frac{f^4 H^2}{q^2}};$$

d'où l'on déduit

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dp}{\sqrt{R + \frac{f^4 H^2}{p^2}}} &= \frac{dq}{\sqrt{S + \frac{f^4 H^2}{q^2}}}, \\ dt &= \frac{(p^2 - q^2)^2\, dp}{4\sqrt{R + \frac{f^4 H^2}{p^2}}}. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

ou bien

$$(12) \qquad dt = \frac{p^2\,dp}{4\sqrt{R + \frac{f^4 H^2}{p^2}}} - \frac{q^2\,dq}{4\sqrt{S + \frac{f^4 H^2}{q^2}}}.$$

Enfin, on aura l'angle φ du plan méridien avec le plan fixe des xy par l'équation

$$\frac{s^2\,d\varphi}{dt} = H,$$

qui résulte, comme on sait, de l'équation démontrée

$$y\,dx - x\,dy = H\,dt.$$

On aura

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{4Hf^2}{(u^2 - v^2)^2} = \frac{4Hf^2}{p^2 q^2};$$

mettant dans cette équation, pour dt, la valeur tirée de l'équation (12), on aura

$$d\varphi = \left(\frac{1}{q^2} - \frac{1}{p^2}\right)\frac{dp}{4\sqrt{R + \frac{f^4 H^2}{p^2}}},$$

ou bien

$$(13) \qquad d\varphi = \frac{dp}{4p^2\sqrt{R + \frac{f^4 H^2}{p^2}}} - \frac{dq}{4q^2\sqrt{S + \frac{f^4 H^2}{q^2}}}.$$

En remettant dans les équations (11), (12) et (13), pour R et S, leurs valeurs

$$R = Cp^4 + (A + B)\,p^3 + Dp^2 - (A + B)f^2 p + E,$$
$$S = Cq^4 + (A - B)\,q^3 + Dq^2 - (A - B)f^2 q + E,$$

et observant qu'en vertu d'une relation facile à trouver entre les trois constantes arbitraires C, D, E et les quantités connues, les polynômes $Rp^2 + f^4H^2$, $Sq^2 + f^4H^2$ sont respectivement divisibles par $p^2 - f^2$ et $q^2 - f^2$, on retombe précisément sur les formules trouvées par les autres méthodes.

V.

Discussion. — Nous avons trouvé précédemment, en posant

$$P = (\rho^2 - c^2)[2k\rho^6 - (2kc^2 - C)\rho^4 + (g + g')\rho^3 - B\rho^2 + Ac^2],$$
$$Q = (\mu^2 - c^2)[2k\mu^6 - (2kc^2 - C)\mu^4 + (g - g')\mu^3 - B\mu^2 + Ac^2],$$

les trois équations suivantes :

$$(1) \qquad \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{P}} = \frac{\mu\, d\mu}{\sqrt{Q}}, \quad \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{P}} - \frac{\mu^3 d\mu}{\sqrt{Q}} = dt, \quad \frac{c^2 d\rho}{\rho\sqrt{P}} - \frac{c^2 d\mu}{\mu\sqrt{Q}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{A}},$$

dans lesquelles les variables sont séparées. Comme on le voit, les valeurs des inconnues dépendront, en général, des fonctions abéliennes, même quand il n'y aurait aucune force appliquée au centre fixe, et que l'une des forces appliquées aux centres mobiles serait nulle. Si l'on excepte le cas où chacune des équations $P = 0$, $Q = 0$ aurait des racines égales, les intégrales des équations (1) ne pourront pas se réduire aux fonctions elliptiques.

Pour déterminer les constantes d'intégration A, B, C, il suffira de diviser par dt les deux membres de chacune des équations (1), et de remplacer dans ces équations ρ, μ, φ, $\frac{d\rho}{dt}$, $\frac{d\mu}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$ par leurs valeurs initiales supposées connues. On aura ainsi trois équations qui ne contiendront pas d'autres inconnues que A, B, C. On pourrait aussi, en se donnant la vitesse initiale, déterminer la constante C par l'équation des forces vives, et les deux autres A et B par deux des équations (1), ou deux équations résultant de leur combinaison.

A part le cas des racines égales dont nous avons parlé tout à l'heure, pour que les quadratures des équations (1) dépendent des fonctions elliptiques, il est nécessaire et suffisant que les puissances impaires de ρ et μ disparaissent sous les radicaux, et que l'on ait

$$g + g' = 0, \quad g - g' = 0,$$

c'est-à-dire que les deux centres mobiles ne soient pas des centres d'action. Le problème que l'on résout alors n'est plus, à proprement parler, le problème des centres mobiles. Nous nous arrêterons cependant un moment sur sa solution, parce qu'elle nous fournira la démonstration d'un théorème fondamental d'analyse.

En effet, g et g' étant égaux à zéro, le point matériel n'est plus soumis qu'à une seule force proportionnelle à la distance émanant d'un centre fixe, et la courbe décrite par le point mobile est, d'après un théorème connu, une section conique dont le centre se confond avec le centre d'action. La courbe décrite dans le plan mobile sera, en général, différente d'une section conique, et il sera facile d'en trouver l'équation en résolvant ce problème très-simple de géométrie analytique : Trouver le lieu des points qui sont les traces successives laissées par une section conique fixe sur un plan mobile autour d'un axe passant par le centre de la section, et situé hors de son plan. L'équation de la courbe étant obtenue en coordonnées polaires, par exemple, on pourra toujours, par une transformation de coordonnées, l'obtenir en coordonnées ρ et μ. Mais, d'un autre côté, la première des équations (1), si l'on y fait

$$g = 0, \quad g' = 0, \quad \rho^2 = \lambda, \quad \mu^2 = \nu,$$

peut être mise sous la forme

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^4 + D\lambda^3 + E\lambda^2 + F\lambda + G}} = \frac{d\nu}{\sqrt{\nu^4 + D\nu^3 + E\nu^2 + F\nu + G}};$$

donc cette dernière équation est susceptible d'une intégrale algébrique.

On est ainsi conduit à la démonstration générale du théorème d'Euler, sans qu'il soit besoin de connaître aucune des transformations que l'on peut faire subir aux polynômes du quatrième degré contenus sous les radicaux.

Dans le cas où l'on a $k = 0$, le point matériel se meut en ligne droite, et la courbe dans le plan mobile est une hyperbole, puisqu'elle peut être considérée comme l'intersection d'un hyperboloïde de révolution par un plan qui passe par l'axe de révolution. Cette remarque conduirait encore au théorème d'Euler.

Ce n'est pas seulement dans le cas très-particulier que nous venons de considérer que la courbe dans le plan mobile peut être une section conique. On démontre, de la même manière que pour le problème des centres fixes, qu'en supposant les trois centres agissant à la fois suivant la loi indiquée, la courbe dans le plan mobile peut être une ellipse $\rho = \rho_0$, ou une hyperbole $\mu = \mu_0$; ρ_0 satisfaisant aux équations

$$P = 0, \quad \frac{dP}{d\rho} = 0,$$

et μ_0 aux équations

$$Q = 0, \quad \frac{dQ}{d\mu} = 0.$$

L'ellipse et l'hyperbole sont ainsi données chacune par une solution singulière de la première des équations (1); je ne crois pas utile de donner ici la démonstration qui est tout à fait la même que pour le problème des centres fixes : il me suffira de renvoyer à un travail récent de M. Serret. Je passe tout de suite à la partie la plus intéressante de la discussion.

Nous avons supposé, dans ce qui précède, que ρ_0, ν_0 étaient les valeurs initiales quelconques de ρ et de μ; supposons maintenant que la valeur initiale de ρ ou de μ soit égale à c. Nous aurons encore deux solutions singulières sous les conditions précédemment énoncées, c'est-à-dire pourvu que, pour $\rho = c$, on ait $\frac{dP}{d\rho} = 0$, et pour $\mu = c$, $\frac{dQ}{d\mu} = 0$. Mais si la somme 2ρ des distances du point attiré aux deux centres fixes est précisément égale à la distance $2c$ de ces centres, le point attiré se trouve évidemment sur la ligne qui joint les centres d'action, et entre les deux. Si $2\mu = c$, le point attiré se trouve encore sur la ligne des centres, mais en dehors des centres. Ainsi, le cas particulier où le point attiré se trouve sur la ligne même des centres est résolu par deux solutions singulières de la première des équations du mouvement. Voyons ce que deviennent en même temps les deux autres équations du mouvement. Ces deux équations, qui doivent suffire à la détermination complète du mouvement, contiennent trois constantes arbitraires; mais l'une d'elles peut s'exprimer en fonction des deux autres par la relation $\frac{dP}{d\rho} = 0$, pour $\rho = c$.

En supposant, pour plus de simplicité, $k = 0$, on a

$$P = \sqrt{(\rho^2 - c^2)[2C\rho^4 + 2(g + g')\rho^3 - B\rho^2 + Ac^2]};$$

la condition pour que le polynôme P ait deux racines égales à c est évidemment exprimée par l'équation

$$2Cc^2 + 2(g+g')c - B + A = 0,$$

d'où l'on tire

$$B = A + 2Cc^2 + 2(g+g')c.$$

Avant de faire $\rho = c$ dans les équations qui donnent $d\varphi$ et dt, remplaçons-y $\frac{\rho d\rho}{\sqrt{P}}$ par $\frac{\mu d\mu}{\sqrt{Q}}$; nous aurons

$$d\varphi = \frac{c^2\sqrt{A(\mu^2-\rho^2)}}{\rho^2\mu\sqrt{Q}}\,d\mu, \quad dt = \mu\frac{(\rho^2-\mu^2)}{\sqrt{Q}}\,d\mu.$$

Faisons maintenant $\rho = c$, et remplaçant la constante B par la valeur que nous venons de trouver, on aura, pour la solution du problème du mouvement du point matériel entre les deux centres mobiles et sur la ligne qui les joint, les deux équations suivantes :

$$(2) \qquad d\varphi = \frac{H\sqrt{\mu^2-c^2}}{\mu\sqrt{M}}\,d\mu,$$

$$(3) \qquad dt = \frac{\mu\sqrt{\mu^2-c^2}}{\sqrt{M}}\,d\mu.$$

En posant

$$\sqrt{A} = H$$

et

$$M = 2C\mu^4 + 2(g-g')\mu^3 - [H^2 + 2Cc^2 + 2(g+g')c]\mu^2 + H^2c^2,$$

μ étant évidemment la distance du point attiré à l'origine des coordonnées, l'équation (2) est l'équation de la courbe en coordonnées polaires. Quant aux constantes H et C, elles seront déterminées au moyen des équations

$$(4) \qquad \frac{V^2}{2} = \frac{g}{c+\mu} + \frac{g'}{c-\mu} + C,$$

$$(5) \qquad \mu^2\,d\varphi = H\,dt,$$

dans lesquelles on aura remplacé V, μ, $\frac{d\varphi}{dt}$ par leurs valeurs initiales données. L'équation (5) se déduit d'ailleurs des équations (2) et (3) par la division membre à membre de ces deux équations.

On arrivera de la même manière aux équations du problème dans le cas de $\mu = c$, et il est facile de voir que les équations qui conviennent à ce cas peuvent se déduire des équations correspondantes à $\mu = c$ par le simple changement de g' en $-g'$. (Nous supposons tacitement que g' est la force appliquée au centre d'action qui est le plus près du mobile, lorsque celui-ci se trouve en dehors des centres.)

On peut vérifier d'une manière très-simple que les formules précédemment trouvées pour le cas qui nous occupe sont bien celles que nous donnerait la solution directe du problème.

En effet, dans ce cas, le point matériel peut être considéré comme soumis à l'action d'une force unique émanant d'un centre fixe, et dont l'intensité serait $\frac{g}{c+\mu} \pm \frac{g'}{c-\mu}$, le signe $+$ ou le signe $-$ étant choisi selon que le mobile est ou n'est pas entre les deux centres d'action. Mais, d'après les formules données en Mécanique pour le mouvement d'un point attiré vers un centre fixe, on peut écrire immédiatement les deux équations

$$\frac{d\mu^2 + \mu^2 d\varphi^2}{2\,dt^2} = \frac{g}{c+\mu} \pm \frac{g'}{c-\mu} + \mathrm{C},$$

$$\frac{\mu^2 d\varphi}{dt} = \mathrm{H};$$

et en faisant le calcul très-simple relatif à la séparation des variables, on retombe précisément sur les équations (2) et (3), ou sur les équations qui s'en déduisent par le changement de g' en $-g'$.

Les formules (2) et (3) font, en général, dépendre la solution du problème des fonctions abéliennes; mais, dans le cas de $g = g'$ si le mobile se trouve entre les deux centres d'action, et $g = -g'$ si le point attiré se trouve en dehors des centres, la solution ne dépend plus que des fonctions elliptiques.

Nous pouvons, maintenant, donner une idée de la courbe décrite dans les deux cas particuliers que nous venons d'énoncer, et auxquels, à partir de ce moment, nous allons nous borner uniquement.

Les équations du mouvement (2) et (3) peuvent se mettre sous la forme

$$\text{(6)} \qquad \frac{\mu d\varphi}{d\mu} = \frac{H\sqrt{c^2-\mu^2}}{\sqrt{2C(\mu^2-\alpha^2)(6^2-\mu^2)}},$$

$$\text{(7)} \qquad \frac{d\mu}{dt} = \frac{\sqrt{2C(\mu^2-\alpha^2)(6^2-\mu^2)}}{\mu\sqrt{c^2-\mu^2}},$$

α^2 et 6^2 étant des valeurs de μ^2, que l'on obtient en posant

$$M = 2C\mu^4 - (H^2 + 2Cc^2 + 4g)\mu^2 + H^2c^2 = 0.$$

(On trouve facilement d'ailleurs que c est compris entre les deux valeurs α et 6.)

Les équations précédentes (6) et (7) s'appliqueront au mouvement du point mobile sur la ligne des centres d'action, que ce point soit ou ne soit pas entre les deux centres, pourvu que l'on suppose que la force attractive appliquée au centre le plus proche du mobile devienne répulsive lorsque le mobile se trouve sur le prolongement de la ligne des centres : c'est ce que nous supposerons dans tout ce qui va suivre.

Il y aura trois cas à considérer dans la discussion, suivant que C sera positif, négatif ou nul; c'est-à-dire en désignant par V_0 et μ_0 les valeurs initiales de V et de μ, suivant que l'on aura

$$V_0^2 > \frac{4gc}{c^2-\mu_0^2}, \quad V_0^2 < \frac{4gc}{c^2-\mu_0^2}, \quad \text{ou} \quad V_0^2 = \frac{4gc}{c^2-\mu_0^2}.$$

1^er^ *cas.* $\quad V_0^2 > \dfrac{4gc}{c^2-\mu_0^2}.$

L'équation (6) montre que, depuis la valeur $\mu = \alpha$ jusqu'à $\mu = c$, on aura des valeurs réelles pour l'angle φ; que, pour $\mu = \alpha$, la courbe est perpendiculaire au rayon vecteur; et que, pour $\mu = c$, elle est tangente au rayon vecteur. On aura ainsi une branche de courbe qui commencera à une distance de l'origine $\mu = \alpha$, et qui se terminera au cercle $\mu = c$.

Si l'on suppose maintenant que le mobile se trouve sur le prolongement de la ligne des centres sur lequel il a été primitivement placé, on verra sans difficulté que la courbe décrite par le mobile, extérieure au cercle $\mu = c$, commence par être perpendiculaire au rayon vecteur, à une distance de l'origine $\mu = \beta$, et finit par devenir tangente au rayon vecteur lorsque celui-ci est infini.

2^e^ *cas.* $\quad V_0^2 < \frac{4gc}{c^2 - \mu_0^2}.$

Ce second cas se discuterait comme le précédent. On trouverait d'abord, dans l'intérieur du cercle $\mu = c$, une branche de courbe passant par le centre du cercle, et terminée au rayon vecteur $\mu = \alpha$, auquel elle est perpendiculaire; puis, hors du cercle, une seconde branche partant perpendiculairement de la circonférence, pour se terminer à la distance $\mu = \beta$, perpendiculairement au rayon vecteur.

3^e^ *cas.* $\quad V_0^2 = \frac{4gc}{c^2 - \mu_0^2}.$

C étant égal à zéro, il est facile de voir qu'en posant $\frac{Hc}{\sqrt{gc + H^2}} = \alpha$, l'équation différentielle de la courbe peut s'écrire

$$d\varphi = \frac{\alpha}{c\mu} \frac{\sqrt{c^2 - \mu^2}}{\sqrt{\mu^2 - \alpha^2}}.$$

La partie de la courbe située hors du cercle n'existe plus maintenant, et l'on a dans l'intérieur de ce cercle une branche de courbe analogue à celle qui a été trouvée dans le premier cas. Mais ce qui est remarquable, c'est que cette branche de courbe est la moitié de l'arc d'une épicycloïde compris entre deux points de rebroussement successifs. Cette épicycloïde, comme il est facile de le voir d'ailleurs, est engendrée par un point de la circonférence d'un cercle de rayon $\frac{c - \alpha}{2}$ roulant intérieurement sur le cercle $\mu = c$.

Dans le dernier cas que nous venons d'examiner, l'équation différentielle de la courbe était intégrable; on peut se demander s'il existe d'autres cas d'intégration.

Il est évident que les seconds membres des équations (2) et (3), dans lesquelles M a la valeur que nous avons donnée plus haut, ne pourraient devenir des différentielles exactes que dans deux cas : si $\sqrt{\mu^2 - c^2}$

était facteur commun au numérateur et au dénominateur des seconds membres, ou bien si M était un carré parfait. Or il est facile de voir d'abord que le dernier cas ne peut jamais se présenter; car, en exprimant la condition pour que $M = 0$ ait deux racines égales, on trouve une équation impossible entre H et C. Quant au premier cas, si l'on met l'équation différentielle de la courbe sous la forme

$$d\varphi = \frac{H\sqrt{c^2 - \mu^2}\, d\mu}{\mu\sqrt{(C\mu^2 - H^2)(c^2 - \mu^2) + 4gc}},$$

on voit que $\sqrt{c^2 - \mu^2}$ ne pourrait être facteur commun que si $gc = 0$. Or les cas de $g = 0$, $c = 0$ sont évidemment à exclure; et d'ailleurs si l'on faisait l'intégration, on trouverait l'équation polaire d'une ligne droite, comme cela doit être évidemment.